

УДК 519.63:539.37

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛН В СРЕДЕ КЕЛЬВИНА–ФОЙХТА

В. М. Садовский¹, О. В. Садовская²

На основе метода Иванова конструирования разностных схем с заданными диссипативными свойствами строится вычислительный алгоритм для решения динамических задач теории вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта. В одномерной задаче результаты расчетов сопоставляются с точным решением, описывающим распространение плоских монохроматических волн. При решении двумерных задач применяется метод суммарной аппроксимации с расщеплением системы по пространственным переменным. Тестирование алгоритма осуществляется на решении задачи о бегущих поверхностных волнах. Для иллюстрации работоспособности метода приводится численное решение задачи Лэмба в вязкоупругой постановке о мгновенном действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости.

Ключевые слова: вязкоупругость, волновые движения, диссипативная разностная схема, вычислительные алгоритмы.

1. Введение. Математическая модель Кельвина–Фойхта является одной из двух основных моделей механики вязкоупругих сред. Альтернативная ей модель Максвелла служит для описания зольей — мелкодисперсных упругих частиц, взвешенных в вязкой жидкости. В соответствии с реологической схемой этой модели, изображенной на рис. 1а, деформация в таких средах разлагается в сумму упругой и вязкой составляющих. Под действием длительных нагрузок проявляется свойство ползучести — необратимая деформация монотонно и неограниченно нарастает со временем. Система уравнений динамики вязкоупругой среды Максвелла относится к гиперболическому типу [1]. Этим определяется выбор численных методов [2] решения волновых задач на ее основе.

Модель Кельвина–Фойхта описывает гели — пористые упругие скелеты, заполненные вязкой жидкостью. Соответствующая реологическая схема приведена на рис. 1б. В данном случае в сумму упругой и вязкой составляющих разлагается не деформация, а напряжение. При постоянных нагрузках деформация среды оказывается ограниченной — она нарастает только до предельного упругого значения. Это служит аргументом в пользу применимости уравнений Кельвина–Фойхта к анализу напряженно-деформированного состояния геоматериалов (грунтов, трещиноватых горных пород) [3].

Система уравнений динамики среды Кельвина–Фойхта не является гиперболической, поэтому вопрос о выборе надежных численных методов нетривиален. При решении задач о распространении волн эффективными оказываются методы, основанные на интегральных преобразованиях по времени или по пространственным переменным [4–7]. Медленные волновые движения вязкоупругой среды исследуются на основе конечно-элементной аппроксимации уравнений с применением разрывного метода Галеркина [8–10], неоспоримым достоинством которого является возможность рассмотрения областей сложной формы. Прямое численное решение динамических задач осуществляется с помощью различных вариантов разностной схемы Неймана–Рихтмайера на сдвинутых сетках [11–13]. Однако при простоте численной реализации получаемые таким образом схемы немонотонны, а потому требуют введения дополнительной искусственной вязкости при расчете решений с высокочастотными возмущениями,

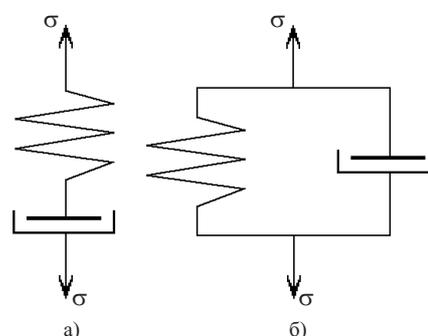


Рис. 1. Реологические схемы вязкоупругих сред: а) модель Максвелла, б) модель Кельвина–Фойхта

¹ Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 50/44, 660036, Красноярск; зам. директора, e-mail: sadov@icm.krasn.ru

² Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 50/44, 660036, Красноярск; ст. науч. сотр., e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru

большими градиентами и ударными волнами, вызванными импульсными и сосредоточенными воздействиями. В какой форме следует выбирать тензор искусственной вязкости, чтобы ее введение не повлияло на характер решения в средах, сопротивляющихся сдвигу, до конца не ясно.

Важный класс положительных разностных схем для эволюционных систем уравнений в частных производных был введен Фридрихсом [14], связавшим свойство положительности, гарантирующее устойчивость счета, с диссипативностью и монотонностью (отсутствием паразитных осцилляций численного решения). Однако на практике при использовании положительных схем возникает проблема согласованной аппроксимации граничных условий задачи.

Конструктивный метод построения диссипативных разностных схем с заранее заданной искусственной диссипацией энергии для решения основных краевых задач линейной динамической теории упругости был предложен Ивановым [15]. Этот метод оказался эффективным для более широкого класса задач, включающего в себя краевые задачи для уравнений пластин и оболочек [16]. В настоящей статье метод Иванова применяется к задачам динамики вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта.

2. Одномерная модель. Система уравнений одномерных движений вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта с плоскими продольными волнами может быть записана в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \sigma = s + \eta \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь v — скорость частиц, σ и s — полное напряжение и его упругая составляющая, η — безразмерный параметр, характеризующий вязкость. С помощью простых преобразований эта система приводится к параболическому уравнению третьего порядка для v : $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t}$. Такое же уравнение выполняется для σ и для s . Монохроматические волны — точные решения вида $v = v_0 \exp i(\omega t - lx)$, которые используются в дальнейшем для апостериорного оценивания погрешности приближенных вычислений, описываются дисперсионным уравнением $\omega^2 = (1 + i\omega\eta)l^2$ (ω — круговая частота, l — волновое число).

При численном решении краевых задач для системы уравнений (1) в соответствии с методом Иванова рассматривается расширенная система

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \sigma = s + \eta \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad (2)$$

в которой v' и σ' — вспомогательные функции, не равные, вообще говоря, v и σ . Умножая первое уравнение системы (2) на v , второе — на s и суммируя результаты, можно получить уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2 + s^2) = v \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + s \frac{\partial v'}{\partial x} = (v - v') \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\sigma - \sigma') \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial (v\sigma')}{\partial x} - \eta \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2,$$

которое преобразуется в уравнение изменения энергии для (1), если $v = v'$ и $\sigma = \sigma'$. Замыкающие уравнения к системе (2) записываются в виде:

$$\begin{pmatrix} v - v' \\ \sigma - \sigma' \end{pmatrix} = -D \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \sigma' \\ v' \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где D — заданная неотрицательно определенная матрица размерности 2×2 .

Для системы (2), (3) выполняется уравнение изменения энергии, в котором по сравнению с аналогичным уравнением для (1) появляется дополнительное диссипативное слагаемое, представляющее собой неотрицательную квадратичную форму относительно производных по x от σ' и v' с коэффициентами, являющимися элементами матрицы D . Используя это уравнение, легко получить интегральные априорные оценки, позволяющие доказать единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решений краевых задач с диссипативными граничными условиями для расширенной системы. В общих чертах техника доказательства изложена, например, в [17].

В действительности при построении разностной схемы приведенные выше рассуждения повторяются на дискретном уровне. Пусть τ и h — шаги равномерной сетки по времени и по пространственной переменной. Дискретный аналог системы (2) записывается в виде следующей системы разностных уравнений:

$$\frac{v^j - v_j}{\tau} = \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{h}, \quad \frac{s^j - s_j}{\tau} = \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h}, \quad \sigma_j = \frac{s^j + s_j}{2} + \eta \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h}. \quad (4)$$

Здесь величины с целым индексом $j = 1, \dots, n$, аппроксимирующие основные функции, относятся к нижней и верхней граням пространственно-временной ячейки сетки, а величины с полуцелыми индексами, аппроксимирующие вспомогательные функции, относятся к ее боковым граням.

Дискретный аналог уравнения изменения энергии получается в результате умножения первого и второго уравнений системы (4) на $\frac{v^j + v_j}{2}$ и $\frac{s^j + s_j}{2}$ соответственно. В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{(v^j)^2 - v_j^2}{2\tau} + \frac{(s^j)^2 - s_j^2}{2\tau} &= \left(\frac{v^j + v_j}{2} - \frac{v_{j+1/2} + v_{j-1/2}}{2} \right) \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{h} + \\ &+ \left(\sigma_j - \frac{\sigma_{j+1/2} + \sigma_{j-1/2}}{2} \right) \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h} + \\ &+ \frac{(v\sigma)_{j+1/2} - (v\sigma)_{j-1/2}}{h} - \eta \left(\frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h} \right)^2. \end{aligned}$$

Уравнения, аппроксимирующие (3), записываются в виде

$$\begin{pmatrix} v^j + v_j - v_{j+1/2} - v_{j-1/2} \\ 2\sigma_j - \sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2} \end{pmatrix} = -\frac{2}{h} D \begin{pmatrix} \sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2} \\ v_{j+1/2} - v_{j-1/2} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

С помощью метода априорных оценок можно получить строгое доказательство пошаговой устойчивости получаемой таким образом разностной схемы в среднеквадратичной норме, если на границе области решения поставлены диссипативные граничные условия, которые формулируются в терминах v, σ и обеспечивают выполнение неравенств

$$(\Delta v \Delta \sigma)_{1/2} \leq 0, \quad (\Delta v \Delta \sigma)_{n+1/2} \geq 0 \quad (6)$$

для разностей $\Delta v = \hat{v} - v$, $\Delta \sigma = \hat{\sigma} - \sigma$ произвольных пар функций v, σ и $\hat{v}, \hat{\sigma}$, удовлетворяющих этим условиям.

Следует заметить, что схема (4), (5) аппроксимирует систему (1) только при условии малости коэффициентов матрицы $D = O(h)$. Для простоты выберем в качестве D диагональную матрицу специального вида $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha = \beta = \frac{h - \tau}{2} \geq 0$. В работе Иванова [15] было показано, что для гиперболической системы уравнений линейной теории упругости такой выбор отвечает схеме распада разрыва Годунова. В этом случае с учетом (4) система уравнений (5) преобразуется к виду

$$\frac{v_{j+1/2} + v_{j-1/2}}{2} - \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{2} = v_j, \quad \frac{\sigma_{j+1/2} + \sigma_{j-1/2}}{2} - \left(1 + \frac{2\eta}{h} \right) \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{2} = s_j. \quad (7)$$

Чтобы построить экономичный алгоритм численной реализации схемы, выберем разрешающие уравнения для системы (7) в следующей форме: $v_{j+1/2} - \sigma_{j+1/2} = v_j - X_j$, $v_{j-1/2} + \sigma_{j-1/2} = v_j + Y_j$. Входящие сюда неизвестные величины X_j и Y_j определяются из сопоставления этих уравнений с уравнениями (7): $X_j = Y_j = s_j + \eta \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h}$.

Разрешающие уравнения служат обобщением соотношений на характеристиках уравнений невязкой упругой среды. Для внутренних ячеек расчетной области они приводят к следующей системе разностных уравнений:

$$\begin{aligned} v_{j-1/2} &= \frac{v_j + v_{j-1}}{2} + \frac{s_j - s_{j-1}}{2} + \eta \frac{v_{j+1/2} - 2v_{j-1/2} + v_{j-3/2}}{2h}, \\ \sigma_{j-1/2} &= \frac{s_j + s_{j-1}}{2} + \frac{v_j - v_{j-1}}{2} + \eta \frac{v_{j+1/2} - v_{j-3/2}}{2h}. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое уравнение системы (8) позволяет вычислить величины $v_{j-1/2}$ с помощью алгоритма трехточечной прогонки. Для этого задаются граничные условия на границе области. Основными являются кинематические условия для скоростей $v_{1/2} = v_{1/2}^0$, $v_{n+1/2} = v_{n+1/2}^0$ и динамические условия для напряжений $\sigma_{1/2} = \sigma_{1/2}^0$, $\sigma_{n+1/2} = \sigma_{n+1/2}^0$, которые автоматически удовлетворяют неравенствам (6). Допускаются смешанные граничные условия разного типа на разных границах. При численной реализации алгоритма прогонки динамические условия переписываются в терминах скоростей:

$$v_{1/2} + \sigma_{1/2}^0 = v_1 + s_1 + \eta \frac{v_{3/2} - v_{1/2}}{h}, \quad v_{n+1/2} - \sigma_{n+1/2}^0 = v_n - s_n - \eta \frac{v_{n+1/2} - v_{n-1/2}}{h}.$$

Можно показать, что во всех случаях выполняется условие диагонального преобладания, гарантирующее устойчивость метода прогонки.

Заметим, что начальные данные задачи также формулируются в терминах скоростей и полных напряжений. При этом начальные значения s_j , необходимые для организации вычислительного процесса, определяются в силу третьего уравнения системы (1). С помощью второго уравнения системы (8) и граничных условий после прогонки вычисляются величины $\sigma_{j-1/2}$ для всех $j = 1, \dots, n + 1$. В этом состоит шаг-предиктор разностной схемы. Шаг-корректор выполняется по формулам (4).

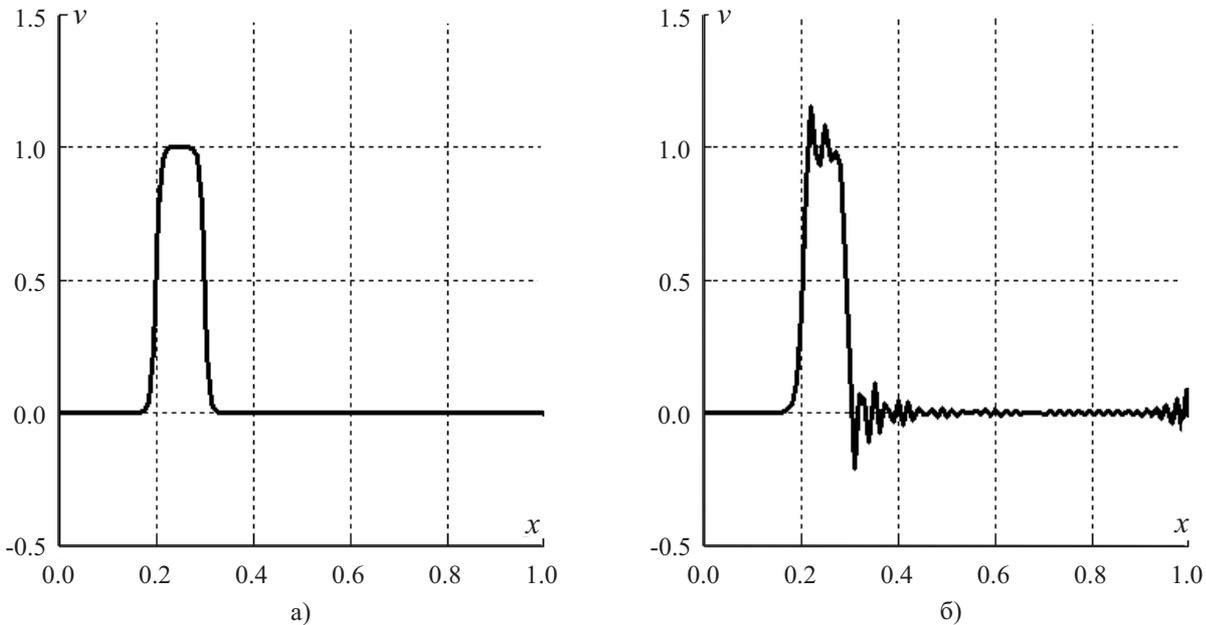


Рис. 2. Профиль скорости за фронтом волны: а) диссипативная схема, б) схема на сдвинутых сетках

Описанный алгоритм реализован в системе Matlab на высокопроизводительном компьютере Flagman с графическими ускорителями. Для проверки качества построенной схемы проводились расчеты серии задач о распространении волн, вызванных действием П-образных импульсов напряжения на правой границе. Результаты показали, что профили скорости, полученные на основе диссипативной схемы (рис. 2а), практически монотонны — лишены паразитных осцилляций, характерных для схемы на сдвинутых сетках (рис. 2б). Длительность импульса в расчетах составляла 0.1 по шкале безразмерного времени. Сетка по пространственной переменной состояла из 100 узлов. Шаг по времени выбирался в соответствии с равенством $\tau = h$. В этом случае искусственная диссипация в схеме отсутствует, поскольку $\alpha = \beta = 0$. Безразмерный параметр вязкости η равнялся 0.0001. С его увеличением амплитуда волны быстро убывает по мере продвижения, соответствующим образом убывает амплитуда паразитных осцилляций схемы на сдвинутых сетках. Осцилляции становятся малыми при увеличении длительности импульса и практически исчезают, если напряжение, действующее на правой границе, меняется плавно, без скачков.

Использовалась следующая разностная схема на сдвинутых сетках:

$$\frac{v_{j-1/2}^{k+1} - v_{j-1/2}^k}{\tau} = \frac{\sigma_j^{k+1/2} - \sigma_{j-1}^{k+1/2}}{h}, \quad \frac{s_j^{k+1/2} - s_j^{k-1/2}}{\tau} = \frac{v_{j+1/2}^k - v_{j-1/2}^k}{h},$$

$$\sigma_j^{k+1/2} = s_j^{k+1/2} + \gamma\eta \frac{v_{j+1/2}^{k+1} - v_{j-1/2}^{k+1}}{2h} + (1 - \gamma)\eta \frac{v_{j+1/2}^k - v_{j-1/2}^k}{2h}$$

с весовым коэффициентом $\gamma = 1$. Для корректного счета задачи при наличии больших градиентов решения в схему необходимо добавить слагаемое с искусственной вязкостью [11], которое в представленных расчетах отсутствует.

В расчетах задачи с меньшим шагом по времени $\tau < h$ вязкость диссипативной схемы (4), (8) оказывает заметное влияние, искусственно подавляя амплитуду волны. Для оценки точности расчетов проводилось сравнение численных решений с решениями, описывающими монохроматические волны. Начальные данные и граничные условия задавались в соответствии с точным решением. Вычислялась относительная погрешность приближения скорости частиц по равномерной норме при фиксированном t в диапазоне

$0 < x < 1$. С увеличением t погрешность постепенно стабилизируется на всех частотах. Зависимости относительной погрешности от безразмерной циклической частоты волны $\nu = \omega/(2\pi)$ при $t = 1$ для разных значений коэффициента вязкости приведены на рис. 3а ($\tau = h$) и рис. 3б ($\tau = 0.5h$). Кривые 1 соответствуют $\eta = 0.0001$, кривые 2 — $\eta = 0.001$ и кривые 3 — $\eta = 0.01$. Расчеты были выполнены на сетке, содержащей 300 узлов.

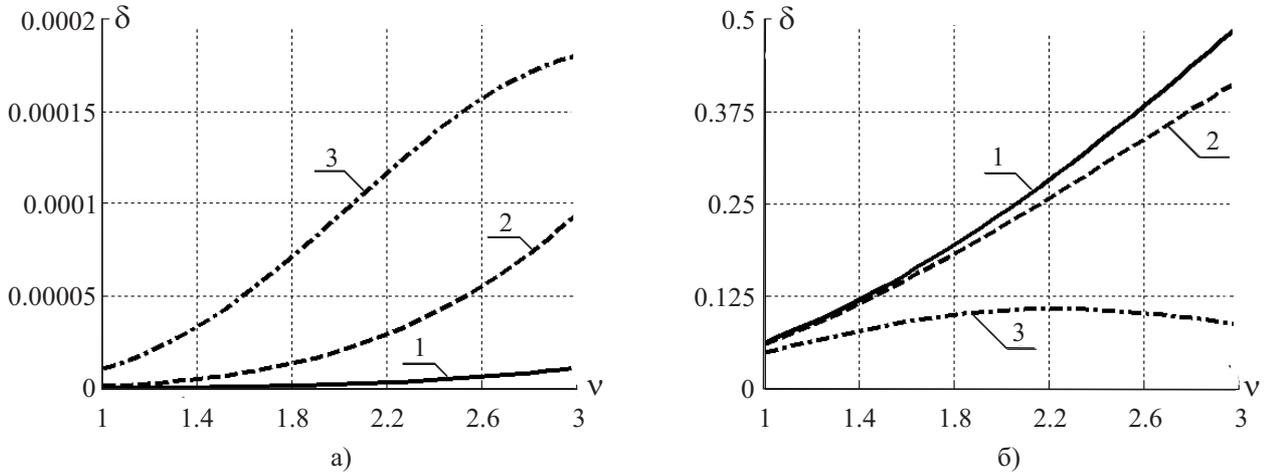


Рис. 3. Зависимость относительной погрешности от частоты: а) $\tau = h$, б) $\tau = 0.5h$

При $\tau = h$ схема имеет второй порядок точности (в этом случае матрица D равна нулю). С ростом частоты погрешность решения нарастает, оставаясь достаточно малой до тех пор, пока длина волны на порядок превышает шаг сетки по пространственной переменной. При $\tau = 0.5h$ коэффициенты матрицы D сопоставимы со значениями параметра вязкости, поэтому схема дает большую погрешность.

Было установлено, что существенно повысить точность можно за счет предельной реконструкции решения, используемой в ENO-схемах (Essentially Non-Oscillatory) для гиперболических систем уравнений [18]. Процедура предельной реконструкции сводится к замене кусочно-постоянных распределений скоростей и напряжений в ячейках кусочно-линейными сплайнами с минимальными разрывами на границах ячеек. Она применялась по отношению к величинам $v \pm s$, которые в системе уравнений упругой (невязкой) среды представляют собой инварианты Римана. После реконструкции значения инвариантов Римана в формулах (8) вычислялись в точках выхода характеристик системы уравнений, приходящих в центры боковых граней ячеек.

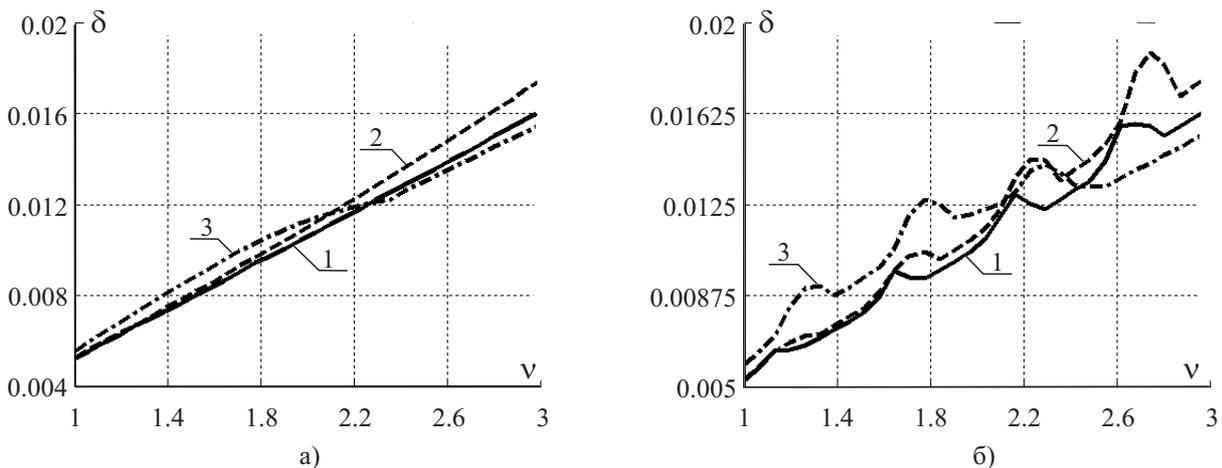


Рис. 4. Зависимость относительной погрешности от частоты: а) $t = 1$, б) $t = 3$

На рис. 4а представлены графики зависимости погрешности расчетов монохроматических волн от частоты для тех же значений параметров, что и на рис. 3б. На рис. 4б приведены аналогичные графики для трехкратно увеличенного значения времени. Расчеты показали, что погрешность полученной таким образом нелинейной схемы значительно ниже, чем погрешность схемы без реконструкции решения.

3. Метод расщепления. Двумерные уравнения динамики вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта записываются в терминах проекций вектора скорости v_j на оси декартовой системы координат и компонент симметричных тензоров полных напряжений σ_{jk} и упругих напряжений s_{jk} в виде системы

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}, & \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial s_{11}}{\partial t} &= \left(\kappa + \frac{4\mu}{3}\right) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \left(\kappa - \frac{2\mu}{3}\right) \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial s_{22}}{\partial t} &= \left(\kappa - \frac{2\mu}{3}\right) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \left(\kappa + \frac{4\mu}{3}\right) \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial s_{12}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), & \sigma_{11} &= s_{11} + \frac{2\eta}{3} \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{22} &= s_{22} - \frac{2\eta}{3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), & \sigma_{12} &= s_{12} + \eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \end{aligned}$$

где ρ — плотность, κ — модуль объемного сжатия, μ — модуль сдвига и η — коэффициент вязкости. Эта система приводится к матричной форме

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = B^1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + B^2 \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad V = U + C^1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + C^2 \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad (9)$$

$$U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ s_{11} \\ s_{22} \\ s_{12} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты a_j и α_k выражаются через феноменологические параметры среды: $a_1 = \frac{3\kappa + 4\mu}{4\mu(3\kappa + \mu)}$, $a_2 = -\frac{3\kappa - 2\mu}{4\mu(3\kappa + \mu)}$, $a_3 = \frac{1}{\mu}$, $\alpha_1 = \frac{4\eta}{3}$, $\alpha_2 = -\frac{2\eta}{3}$, $\alpha_3 = \eta$. Матрицы A, B^1 и B^2 симметричны. Матрица A положительно определена при естественных ограничениях на параметры: $\rho > 0$, $\kappa > 0$, $\mu > 0$ и $\eta \geq 0$. Для системы (9) выполняется уравнение изменения энергии:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} UAU = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} VB^1V + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} VB^2V - \left\| \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\| D^0 \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

где D^0 — симметричная неотрицательно определенная матрица, представляющая собой произведение блочных матриц (звездочка обозначает транспонирование): $D^0 = \left\| \begin{pmatrix} C^1 & 0 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix} \right\|^* \left\| \begin{pmatrix} B^1 & B^2 \\ B^1 & B^2 \end{pmatrix} \right\|$. Отличные от нуля коэффициенты матрицы имеют вид $D_{11}^0 = D_{77}^0 = \alpha_1$, $D_{17}^0 = D_{71}^0 = \alpha_2$, $D_{22}^0 = D_{66}^0 = D_{26}^0 = D_{62}^0 = \alpha_3$.

Последовательное построение разностной схемы с заданными диссипативными свойствами для решения двумерной системы по аналогии с одномерной приводит к специальному классу неявных схем, для численной реализации которых трудно подобрать экономичные алгоритмы. Поэтому численное решение краевых задач для системы (9) осуществлялось с помощью процедуры расщепления по пространственным переменным. Наряду с классическим вариантом метода расщепления (метода суммарной аппроксимации) применялся вариант двуциклического расщепления, в котором на каждом шаге по времени $(t, t + \Delta t)$ ре-

шается следующая серия одномерных задач:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} &= B^1 \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_1}, & V^{(1)} &= U^{(1)} + C^1 \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_1} + C^2 \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x_2}, \\ A \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} &= B^2 \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_2}, & V^{(2)} &= U^{(2)} + C^1 \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_1} + C^2 \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_2}, \\ A \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} &= B^2 \frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_2}, & V^{(3)} &= U^{(3)} + C^1 \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_1} + C^2 \frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_2}, \\ A \frac{\partial U^{(4)}}{\partial t} &= B^1 \frac{\partial V^{(4)}}{\partial x_1}, & V^{(4)} &= U^{(4)} + C^1 \frac{\partial V^{(4)}}{\partial x_1} + C^2 \frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Вектор-функция $V^{(0)}$ берется из расчета предыдущего шага по времени, а при $t = 0$ — из начальных условий задачи. Начальные данные к системам уравнений на стадиях расщепления и решение, отнесенное к новому временному слою, определяются по формулам

$$\begin{aligned} U^{(1)}(t) &= U(t), & U^{(2)}(t) &= U^{(1)}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right), & U^{(3)}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= U^{(2)}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ U^{(4)}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= U^{(3)}(t + \Delta t), & U(t + \Delta t) &= U^{(4)}(t + \Delta t). \end{aligned}$$

Большая серия методических расчетов показала, что полученная разностная схема устойчива при выполнении условий устойчивости одномерных схем на стадиях расщепления или чуть более жесткого условия, при котором дополнительная диссипация энергии подавляет влияние слагаемых с производными в поперечном направлении в формулах пересчета вектора V через U , взятых с предыдущих стадий.

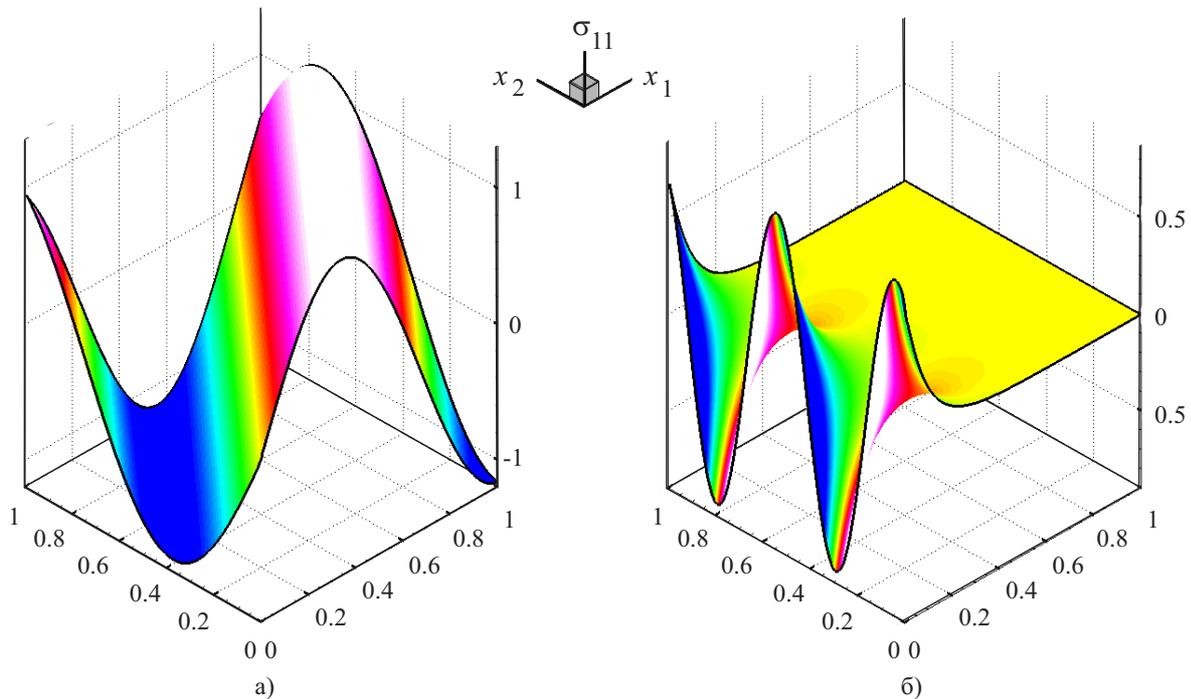


Рис. 5. Поверхность нормального напряжения σ_{11} в задаче о бегущей волне: а) сверхзвуковая волна со скоростью $c = 1.5 c_1$, б) дозвуковая волна со скоростью $c = c_1/2$

Точное решение $V = \bar{V} \exp(i\omega t - \lambda x_1 - i l x_2)$, описывающее затухающую по глубине монохроматическую волну, бегущую с постоянной скоростью $c = \omega/l$ вдоль оси x_2 по границе вязкоупругой полуплоскости $x_1 \geq 0$, использовалось при тестировании алгоритма и программы. Компоненты вектора \bar{V} определялись

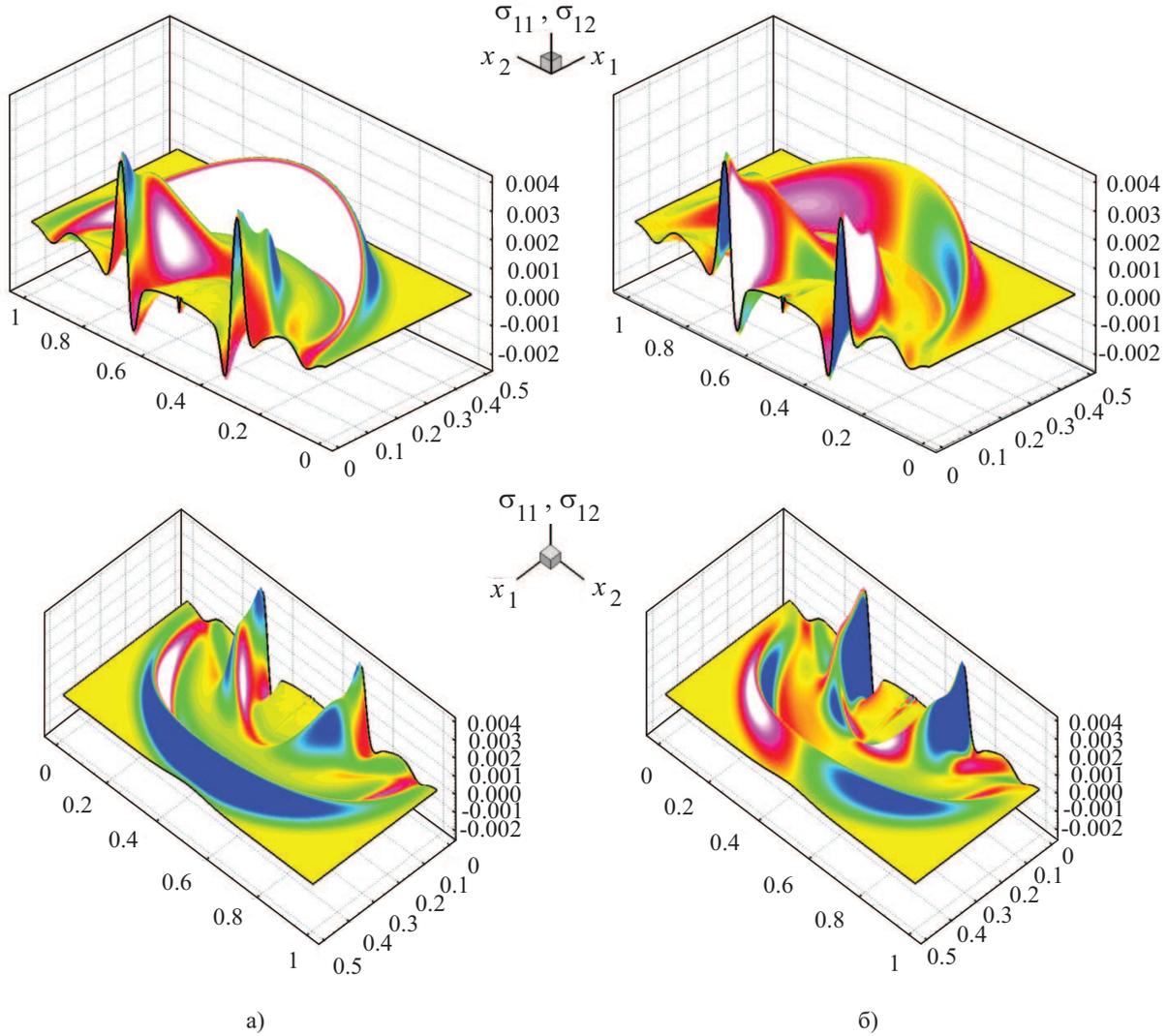


Рис. 6. Поверхности нормального напряжения σ_{11} (а) и касательного напряжения σ_{12} (б) в задаче Лэмба

из следующей однородной системы амплитудных уравнений:

$$\begin{aligned} i\omega\rho\bar{v}_1 + \lambda\bar{\sigma}_{11} + i\bar{\sigma}_{12} &= 0, & i\omega\rho\bar{v}_2 + \lambda\bar{\sigma}_{12} + i\bar{\sigma}_{22} &= 0, \\ i\omega\bar{\sigma}_{11} + \left(\kappa + \frac{4\psi}{3}\right)\lambda\bar{v}_1 + \left(\kappa - \frac{2\psi}{3}\right)i\bar{v}_2 &= 0, & i\omega\bar{\sigma}_{22} + \left(\kappa - \frac{2\psi}{3}\right)\lambda\bar{v}_1 + \left(\kappa + \frac{4\psi}{3}\right)i\bar{v}_2 &= 0, \\ i\omega\bar{\sigma}_{12} + \psi(i\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2) &= 0, & \psi &= \mu + i\omega\eta. \end{aligned}$$

Равенство нулю определителя матрицы системы, при котором существует нетривиальное решение, выполняется, если $\lambda = \pm\lambda_1$ или $\lambda = \pm\lambda_2$, где $\lambda_1 = l\sqrt{1 - \frac{\rho c^2}{\kappa + 4\psi/3}}$, $\lambda_2 = l\sqrt{1 - \frac{\rho c^2}{\psi}}$. Амплитуды проекций вектора скорости в этом случае связаны равенством

$$\left(\omega^2\rho - \psi l^2 + \left(\kappa + \frac{4\psi}{3}\right)\lambda^2\right)\bar{v}_1 + \left(\kappa + \frac{\psi}{3}\right)i\lambda\bar{v}_2 = 0,$$

а амплитуды напряжений находятся непосредственно из системы.

Решение качественно меняется в зависимости от того, как скорость волны соотносится со скоростями продольных и поперечных упругих волн: $c_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 4\mu/3}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. В сверхзвуковых режимах ($c > c_1$ при $\lambda = \pm\lambda_1$ и $c > c_2$ при $\lambda = \pm\lambda_2$) степень затухания волны по глубине значительно меньше, чем в соответствующих дозвуковых режимах.

Численное решение задачи строилось на основе двумерной системы уравнений, обезразмеренной по формулам: $x'_j = \frac{x_j}{a}$, $t' = \frac{c_p t}{a}$, $v'_j = \frac{v_j}{c_p}$, $\sigma'_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\rho c_1^2}$, $s'_{jk} = \frac{s_{jk}}{\rho c_1^2}$, где a — пространственный масштаб задачи, при соотношении скоростей упругих продольных и поперечных волн $c_2 = \frac{1}{2} c_1$ с безразмерным коэффициентом вязкости $\frac{\eta}{\rho a c_1} = 0.001$.

На рис. 5а изображена поверхность нормального напряжения σ_{11} в случае сверхзвуковой продольной волны, движущейся со скоростью $c = 1.5 c_1$, на рис. 5б — в случае дозвуковой волны со скоростью $c = c_1/2$. Апостериорный анализ погрешности численного решения при разных соотношениях шагов сетки по времени и по пространственным переменным показал, что схема соответствует первому порядку аппроксимации, однако применение процедуры реконструкции решения на стадиях расщепления приводит к существенному повышению точности.

На рис. 6 приведены поверхности нормального и касательного напряжений в задаче Лэмба о мгновенном действии сосредоточенной силы по нормали к границе вязкоупругой полуплоскости. Расчеты проведены при тех же значениях параметров. Время на рисунках соответствует моменту прихода головной продольной волны на границу области. Полученные пространственные картины позволяют визуально оценить соотношение амплитуд продольных, поперечных, конических и поверхностных волн, которые с увеличением вязкости среды принимают все более пологую, сглаженную форму.

Заметим в заключение, что конечной целью данного направления исследований является разработка надежного вычислительного алгоритма для расчета течений сыпучей среды при наличии застойных зон в движущемся потоке на основе оригинальной математической модели [19]. Проведенные в [20] расчеты сдвиговых течений по схеме второго порядка, построенной по методу Неймана–Рихтмайера, выявили недостатки схемы, связанные с немонотонностью решений, которые препятствуют получению адекватных численных результатов. Разностная схема, построенная по методу Иванова, обладает важным достоинством — она является неявной на шаге предиктор и явной на шаге корректор. Это позволяет обоснованно применять нелинейные корректирующие процедуры типа корректировки напряжений Уилкинса при расчете задач с пластическими деформациями и с учетом различного сопротивления материала растяжению и сжатию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14–01–00130) и Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 18 “Алгоритмы и математическое обеспечение для вычислительных систем сверхвысокой производительности”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965.
4. Kosloff D., Baysal E. Forward modeling by a Fourier method // *Geophys.* 1982. **47**, N 10. 1402–1412.
5. Hestholm S. Three-dimensional finite difference viscoelastic wave modeling including surface topography // *Geophys. J. Int.* 1999. **139**. 852–878.
6. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // *Geophys. Prosp.* 2003. **51**, N 1. 37–48.
7. Carcione J.M., Poletto F., Gei D. 3-D wave simulation in anelastic media using the Kelvin–Voigt constitutive equation // *J. Comput. Phys.* 2004. **196**, N 1. 282–297.
8. Mesquita A.D., Coda H.B. Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements // *Appl. Math. Model.* 2002. **26**. 501–516.
9. Bécache E., Ezziyani A., Joly P. A mixed finite element approach for viscoelastic wave propagation // *Comput. Geosci.* 2004. **8**, N 3. 255–299.
10. Bajpai S., Nataraj N., Pani A.K. On a two-grid finite element scheme for the equations of motion arising in Kelvin–Voigt model // *Adv. Comput. Math.* 2014. **40**, N 2. 1–29 (published online; DOI 10.1007/s10444-013-9340-1).
11. Neumann J., Richtmyer R.D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // *J. Appl. Phys.* 1950. **21**, N 3. 232–237.
12. Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // *Geophys.* 1986. **51**, N 4. 889–901.
13. Костин В.И., Лисица В.В., Решетова Г.В., Чеверда В.А. Конечно-разностный метод численного моделирования распространения сейсмических волн в трехмерно-неоднородных разномасштабных средах // *Вычисли-*

- тельные методы и программирование. 2011. **12**. 321–329.
14. Friedrichs K.O. Symmetric hyperbolic linear differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1954. **7**, N 2. 345–392.
 15. Иванов Г.В. Построение схем решения плоской динамической задачи теории упругости на основе аппроксимации линейными полиномами // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики. Сиб. отд-ние АН СССР. Вып. 37.* Новосибирск, 1978. 63–77.
 16. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002.
 17. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
 18. Каменецкий В.Ф., Семенов А.Ю. Самосогласованное выделение разрывов при сквозных расчетах газодинамических течений // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики.* 1994. **34**, № 10. 1489–1502.
 19. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008.
 20. Красненко А.Н., Садовская О.В. Математическое моделирование сдвиговых течений сыпучей среды с застойными зонами // *Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления. Тр. Всеросс. научн. конф., посвящ. 75-летию со дня рождения академика В. П. Мясникова.* Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2011. 91–96.

Поступила в редакцию
14.01.2014

A Numerical Algorithm for the Analysis of Viscoelastic Waves in the Kelvin–Voigt Medium

V. M. Sadovskii¹ and O. V. Sadovskaya²

¹ *Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Akademgorodok 50/44, Krasnoyarsk, 660036, Russia; Professor, Deputy Director, e-mail: sadov@icm.krasn.ru*

² *Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Akademgorodok 50/44, Krasnoyarsk, 660036, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru*

Received January 14, 2014

Abstract: A numerical algorithm for solving dynamic problems in the theory of the viscoelastic Kelvin–Voigt medium is proposed on the basis of Ivanov’s method of constructing difference schemes with prescribed dissipative properties. In the one-dimensional case, the numerical results are compared with the exact solution describing the propagation of plane monochromatic waves. When solving two-dimensional problems, the summary approximation method and the splitting method with respect to the spatial variables are applied. The algorithm is tested by solving the problem of traveling surface waves. For illustration of the method’s efficiency, the Lamb’s problem on the instantaneous action of a concentrated force at the boundary of a half-plane is solved in a viscoelastic formulation.

Keywords: viscoelasticity, wave motions, dissipative difference scheme, numerical algorithms.

References

1. S. K. Godunov and E. I. Romenskii, *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws* (Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1998; Kluwer, New York, 2003).
2. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; Boca Raton, CRC Press, 2001).
3. M. Reiner, *Rheology. Theory and Applications* (Academic, New York, 1956; Nauka, Moscow, 1965).
4. D. Kosloff and E. Baysal, “Forward Modeling by a Fourier Method,” *Geophys.* **47** (10), 1402–1412 (1982).
5. S. Hestholm, “Three-Dimensional Finite Difference Viscoelastic Wave Modeling Including Surface Topography,” *Geophys. J. Int.* **139**, 852–878 (1999).
6. B. G. Mikhailenko, A. A. Mikhailov, and G. V. Reshetova, “Numerical Viscoelastic Modeling by the Spectral Laguerre Method,” *Geophys. Prosp.* **51** (1), 37–48 (2003).
7. J. M. Carcione, F. Poletto, and D. Gei, “3-D Wave Simulation in Anelastic Media Using the Kelvin–Voigt Constitutive Equation,” *J. Comput. Phys.* **196** (1), 282–297 (2004).
8. A. D. Mesquita and H. B. Coda, “Alternative Kelvin Viscoelastic Procedure for Finite Elements,” *Appl. Math. Model.* **26**, 501–516 (2002).

9. E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly, “A Mixed Finite Element Approach for Viscoelastic Wave Propagation,” *Comput. Geosci.* **8** (3), 255–299 (2004).
10. S. Bajpai, N. Nataraj, and A. K. Pani, “On a Two-Grid Finite Element Scheme for the Equations of Motion Arising in Kelvin–Voigt Model,” *Adv. Comput. Math.* **40** (2), 1–29 (2014). doi 10.1007/s10444-013-9340-1
11. J. Neumann and R. D. Richtmyer, “A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks,” *J. Appl. Phys.* **21** (3), 232–237 (1950).
12. J. Virieux, “P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity–Stress Finite-Difference Method,” *Geophys.* **51** (4), 889–901 (1986).
13. V. I. Kostin, V. V. Lisitsa, G. V. Reshetova, and V. A. Tcheverda, “A Finite-Difference Method for the Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation through Multiscale Media,” *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 321–329 (2011).
14. K. O. Friedrichs, “Symmetric Hyperbolic Linear Differential Equations,” *Comm. Pure Appl. Math.* **7** (2), 345–392 (1954).
15. G. V. Ivanov, “Construction of Schemes for Solving a Plane Dynamic Problem in the Theory of Elasticity on the Basis of Approximation by Linear Polynomials,” in *Dynamics of Continuous Media* (Hydrodynamics Inst., Novosibirsk, 1978), Issue 37, pp. 63–77.
16. G. V. Ivanov, Yu. M. Volchkov, I. O. Bogul’skii, S. A. Anisimov, and V. D. Kurguzov, *Numerical Solution of Dynamical Problems of Viscoelastic Deformation of Solids* (Sib. Univ. Izdat., Novosibirsk, 2002) [in Russian].
17. S. K. Godunov, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
18. V. F. Kamenetskii and A. Yu. Semenov, “The Self-Consistent Selection Spans through Calculations of Gas-Dynamic Currents,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **34** (10), 1489–1502 (1994) [*Comput. Math. Math. Phys.* **34** (10), 1287–1297 (1994)].
19. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials* (Fizmatlit, Moscow, 2008; Springer, Heidelberg, 2012).
20. A. N. Krasnenko and O. V. Sadovskaya, “Mathematical Modeling of Shear Flows of Granular Media with Stagnation Zones,” in *Fundamental and Applied Problems in Mechanics and Control Processes: Dedicated to the 75th Anniversary of Academician V.P. Myasnikov* (Inst. Autom. Contr. Processes, Vladivostok, 2011), pp. 91–96.