

УДК 519.62

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА

Г. В. Кривовичев<sup>1</sup>, С. А. Михеев<sup>2</sup>

Исследуется устойчивость трехслойных конечно-разностных решеточных схем Больцмана. Производная по времени аппроксимируется с использованием центральной разностной производной. Проводится анализ устойчивости по начальным условиям с использованием линейного приближения. Для исследования используется метод фон Неймана. Показано, что устойчивость схем можно улучшить за счет представления значений функций распределения средними арифметическими их значений на ближайших слоях. Показано, что использование специальных аппроксимаций конвективных членов кинетических уравнений позволяет получать области устойчивости, площадь которых больше, чем в случае использования отдельных аппроксимаций производных по пространственным переменным.

**Ключевые слова:** метод решеточных уравнений Больцмана, решеточные схемы Больцмана, устойчивость по начальным условиям, метод Неймана.

**1. Введение.** Метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее LBM) в последние годы активно используется при решении самых разных задач гидродинамики вязкой жидкости [1, 2]. Популярность метода и значительное количество публикаций во многом связаны с простотой его алгоритма и широкими возможностями для распараллеливания вычислений, особенно при реализации на графических ускорителях с использованием технологии CUDA [3–10]. Метод является альтернативой “традиционным” численным методам решения задач гидродинамики, основанным на решении начально-краевых задач для уравнений механики сплошной среды. В некоторых случаях метод LBM даже обладает преимуществами по сравнению с этими методами — например, при расчетах многофазных и многокомпонентных течений [7–9], течений со свободными поверхностями [11] и течений в пористых средах [12].

Один из недостатков метода LBM связан с тем, что число Куранта для него является постоянным и равным единице, что задает жесткую связь на значения шагов сеток по времени и пространственным переменным, таким образом исключая возможность их независимого варьирования. Для исправления этой ситуации в ряде работ были предложены так называемые конечно-разностные решеточные схемы Больцмана (finite-difference-based lattice Boltzmann schemes) [13–17], позволяющие независимо варьировать значения сеточных шагов и использовать адаптивные сетки.

В настоящей статье продолжаются исследования, начатые в [16, 17]. С помощью метода Неймана исследуется устойчивость по начальным условиям трехслойных конечно-разностных решеточных схем Больцмана.

**2. Трехслойные конечно-разностные решеточные схемы Больцмана.** В методе LBM среда моделируется ансамблем псевдочастиц с заданными скоростями. Область, в которой происходит течение, разбивается сеткой с ячейками определенной формы, что задает в ней так называемую решетку (lattice). За шаг по времени  $\delta t$  частицы переходят между узлами решетки.

В настоящей работе рассматривается только случай плоских изотермических течений вязкой ньютоновской жидкости. Ограничимся рассмотрением равномерной сетки с ячейками квадратной формы, построенной с шагом  $l$  по обеим декартовым координатам. В этом случае удобно использовать набор скоростей D2Q9:  $V_i = V v_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , где  $V = l/\delta t$ , а векторы  $v_i$  задаются таким образом:  $v_1 = (0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1)$ ,  $v_4 = (-1, 0)$ ,  $v_5 = (0, -1)$ ,  $v_6 = (1, 1)$ ,  $v_7 = (-1, 1)$ ,  $v_8 = (-1, -1)$ ,  $v_9 = (1, -1)$ .

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; доцент, e-mail: gera1983k@bk.ru

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; студент, e-mail: helps2@rambler.ru

Динамика ансамбля псевдочастиц описывается системой уравнений, полученной из кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука с использованием “метода дискретных скоростей” Бродуэлла, которая в безразмерных переменных имеет следующий вид [14, 18, 19]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{(\text{eq})}), \quad (1)$$

где  $t$  — безразмерное время (время, нормированное на  $\delta t$ ),  $f_i$  — безразмерные функции распределения частиц со скоростями  $\mathbf{v}_i$ ,  $\nabla f_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^T$ ,  $x$  и  $y$  — безразмерные пространственные переменные (декартовы координаты, нормированные на  $l$ ),  $f_i^{(\text{eq})}$  — приближенные равновесные функции распределения (аппроксимируют равновесные функции распределения Максвелла при малых числах Маха),  $\tau$  — безразмерное время релаксации.

В настоящей работе, как и в [16, 17], будут рассматриваться явные конечно-разностные схемы, построенные на равномерных по безразмерным пространственным переменным и безразмерному времени сетках с шагами  $h$  и  $\Delta t$  соответственно. В [16, 17] производная по  $t$  аппроксимировалась с первым порядком по времени с помощью правой разностной производной. Здесь мы будем аппроксимировать эту производную со вторым порядком с использованием центральной разностной производной

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t} \approx \frac{f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j - \Delta t, \mathbf{r}_{kl})}{2\Delta t}, \quad (2)$$

где  $t_j$  — узел сетки, разбивающей временной промежуток,  $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$  — узел сетки по пространственным переменным. Как и в [16], рассмотрим три разностные схемы, полученные при следующих аппроксимациях производных по пространственным переменным.

1. С использованием центральных разностных производных:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{2h}, \quad \frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{2h}.$$

2. С использованием направленных разностей первого порядка:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx R_{ix}^1 = \begin{cases} \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{h}, & v_{ix} \geq 0, \\ \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{h}, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx R_{iy}^1 = \begin{cases} \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{h}, & v_{iy} \geq 0, \\ \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{h}, & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

3. С использованием направленных разностей второго порядка:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx R_{ix}^2 = \begin{cases} \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-2l})}{2h}, & v_{ix} \geq 0, \\ \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+2l})}{2h}, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx R_{iy}^2 = \begin{cases} \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-2})}{2h}, & v_{iy} \geq 0, \\ \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+2})}{2h}, & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Построенные таким образом разностные схемы будем называть схемами 1–3 соответственно.

По аналогии с [14, 17] рассмотрим еще три схемы, построенные посредством специальной аппроксимации члена  $\mathbf{v}_i \nabla f_i$ .

1. С использованием аналога центральной разностной производной:

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{2h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i h) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)).$$

2. С использованием аналога направленных разностей первого порядка:

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)).$$

3. С использованием аналога направленных разностей второго порядка:

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{2h} (3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h)).$$

Разностные схемы, построенные с использованием таких аппроксимаций, будем называть схемами 4–6 соответственно.

На основе метода Чепмена–Энскога, применяемого к дифференциальным приближениям этих схем, нами были получены уравнения гидродинамики и выражения для коэффициента численной вязкости. Все эти выражения оказались не зависящими от шагов  $h$  и  $\Delta t$  и в точности совпадающими с выражением для кинематического коэффициента вязкости, приведенного в [14] для системы (1) в случае набора D2Q9:

$$\nu = \frac{l^2}{3\delta t} \tau, \text{ что весьма существенно при их применении к решению практических задач.}$$

У таких конечно-разностных схем в коэффициенте численной вязкости отсутствует нефизичная добавка в отличие от обычного решеточного уравнения Больцмана, для которого соответствующее выражение имеет

$$\text{вид } \nu = \frac{l^2}{3\delta t} \left( \tau - \frac{1}{2} \right).$$

Заметим, что построенные схемы являются трехслойными (двухшаговыми по времени). Устойчивость таких классов конечно-разностных решеточных схем Больцмана в известной авторам литературе не исследовалась.

**3. Задача об исследовании устойчивости.** В настоящей работе, как и в [16, 17, 20], исследуется устойчивость построенных схем по начальным условиям. Рассматриваются стационарные пространственно однородные режимы течения в неограниченной области, для которых такие безразмерные макровеличины, как плотность  $\rho$  и скорость среды  $\mathbf{u}$  являются постоянными. Значения равновесных функций распределения в этом случае тоже являются постоянными:  $f_i^{(\text{eq})} = \bar{f}_i^{(\text{eq})} = \text{const}$  [20]. Их совокупность является невозмущенным решением каждой из схем 1–6. Рассматриваются два режима течения:  $u_x = U = \text{const}, u_y = 0$  (режим 1) и  $u_x = u_y = U = \text{const}$  (режим 2) при  $\rho = 1$ .

Как и в [16, 17, 20], будет выполнено исследование устойчивости по линейному приближению с помощью метода Неймана. Заметим, что основанный на нем критерий устойчивости удобно применять, вообще говоря, к двухслойным разностным схемам [21]. В связи с этим, используя эквивалентные преобразования, на одном из этапов метода Неймана перейдем к двухслойным схемам повышенной размерности. Проведем все типовые выкладки для случая схемы 1. При  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_9)^T$  имеем

$$f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) = f_i(t_j - \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) - \frac{\Delta t}{h} \left( v_{ix} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})) + v_{iy} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})) \right) - \frac{2\Delta t}{\tau} \left( f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) \right). \quad (3)$$

Будем далее искать решение (3) в виде  $f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \bar{f}_i^{(\text{eq})} + \delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})$ , где  $\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})$  — отклонения относительно невозмущенного решения  $\bar{f}_i^{(\text{eq})}$ . Производя линеаризацию членов  $f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl}))$  в окрестности невозмущенного решения, получим из (3) следующую систему в отклонениях:

$$\delta f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) = \delta f_i(t_j - \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) - \frac{\Delta t}{h} \left( v_{ix} (\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - \delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})) + v_{iy} (\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - \delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})) \right) - \frac{2\Delta t}{\tau} \delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{2\Delta t}{\tau} \sum_{s=1}^9 \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}(\bar{\mathbf{f}}^{(\text{eq})})}{\partial f_s} \delta f_s(t_j, \mathbf{r}_{kl}). \quad (4)$$

В соответствии с методом Неймана, представим решение (4) в виде

$$\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = F_i(t_j) \exp(i\Theta \mathbf{r}_{kl}^T), \quad (5)$$

где  $i^2 = -1$ ,  $\Theta = (\theta_x, \theta_y)$ ,  $\theta_x \in [-\pi, \pi]$ ,  $\theta_y \in [-\pi, \pi]$ .

Подставляя (5) в (4), получим трехслойную разностную схему для определения  $F_i$ :

$$F_i(t_j + \Delta t) = F_i(t_j - \Delta t) + \sum_{s=1}^9 G_{is} F_s(t_j), \quad (6)$$

$$\text{где } G_{is} = \begin{cases} -\frac{2i\Delta t}{h} (v_{ix} \sin(\theta_x h) + v_{iy} \sin(\theta_y h)) - \frac{2\Delta t}{\tau} + \frac{2\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}(\bar{\mathbf{F}}^{(\text{eq})})}{\partial f_s}, & s = i, \\ \frac{2\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}(\bar{\mathbf{F}}^{(\text{eq})})}{\partial f_s}, & s \neq i. \end{cases}$$

Вводя новые переменные  $S_i(t_j) = F_i(t_j - \Delta t)$ ,  $i = \overline{1, 9}$ ,  $S_i(t_j) = F_{i-9}(t_j)$ ,  $i = \overline{10, 18}$ , получим, что схема (6) сведется к двухслойной схеме

$$S_i(t_j + \Delta t) = \sum_{m=1}^{18} A_{im} S_m(t_j). \quad (7)$$

Здесь  $A_{im}$  — элементы матрицы перехода  $A = \begin{pmatrix} O_{9 \times 9} & E_{9 \times 9} \\ E_{9 \times 9} & G_{9 \times 9} \end{pmatrix}$ , где  $O$  и  $E$  — нулевая и единичная матрицы, а блок  $G$  образован величинами  $G_{is}$ . Линейные приближения остальных разностных схем сводятся к типовой системе разностных уравнений с различными выражениями для компонент блока  $G$ .

Таким образом, задача об исследовании устойчивости невозмущенного решения (3) сведена к задаче об исследовании устойчивости нулевого решения схемы (7). Известно, что ее решение будет устойчиво, если все собственные значения матрицы  $A$  будут лежать в единичном круге [21].

При всех принятых допущениях собственные значения являются функциями следующих параметров:  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $U$ ,  $\Delta t$ ,  $h$  и  $\tau$ , причем четыре последних параметра являются входными. Для упрощения вместо  $\Delta t$  и  $h$  будем рассматривать параметр Куранта  $\gamma = v\Delta t/h$ , где  $v = 1$  — модуль безразмерной скорости псевдочастиц по основным направлениям решетки (направлениям осей  $Ox$  и  $Oy$ ).

Для численного решения задач на собственные значения использовался QR-алгоритм, реализованный на языке FORTRAN 90 в пакете EISPACK [22].

Исследовались области устойчивости на плоскости  $(\tau, U)$  при различных значениях  $\gamma$ . Для построения областей и вычисления их площадей область изменения параметров  $(\tau, U)$  разбивалась равномерной сеткой из  $100 \times 100$  узлов. Считалось, что ее узел входит в область устойчивости, если при фиксированных значениях  $\tau$  и  $U$  для всех значений  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  собственные значения по модулю не превосходят единицы. Область изменения  $\theta_x$  и  $\theta_y$  разбивалась равномерной сеткой из  $100 \times 100$  узлов (для контроля производился пересчет на сетке из  $200 \times 200$  узлов). Параметр  $U$  полагался изменяющимся от 0 до 1, параметр  $\tau$  — от 0 до 100 и от 0 до 2. Последнее делалось в связи с важностью такого диапазона значений  $\tau$  для ряда практических задач. Площадь области устойчивости вычислялась как мера Жордана плоского множества.

Расчеты производились при следующих значениях  $\gamma$ : 0.1, 0.25, 0.5, 0.75 и 1. Заметим, что для всех предложенных схем 1–6 полученные области устойчивости в случае обоих режимов оказались пустыми. Проблема, по всей видимости, связана с использованием аппроксимации вида (2).

В связи с возникшими трудностями было предложено модифицировать схемы 1–6 путем пересчета на промежуточном временном слое, что позволило получить области устойчивости с ненулевой площадью и таким образом улучшить ситуацию с устойчивостью построенных схем.

**4. Модифицированные разностные схемы.** Все основные выкладки проведем для случая схемы 1, заметив, что все операции для схем 2–6 абсолютно аналогичные.

Для удобства и сокращения записи будем аппроксимировать производную по  $t$  не в узле  $t_j$ , а в узле  $t_{j+1/2} = t_j + \Delta t/2$  с полуцелым шагом  $\Delta t/2$ :  $\frac{\partial f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t} \approx \frac{f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\Delta t}$ , не меняя выражений,

аппроксимирующих производные по пространственным переменным в этом же узле. Получим разностную схему следующего вида:

$$f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - v_{ix} \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k-1l})) - v_{iy} \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl-1})) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}))). \quad (8)$$

Данная схема ничем, кроме величины шага по  $t$ , по сути не отличается от схемы 1. Однако предлагается модифицировать ее следующим образом — значения  $f_i$  в узле  $t_j$  представить через значения на ближайших слоях на сетке с полуцелым шагом

$$f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \tilde{f}_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \frac{1}{2} (f_i(t_{j-1/2}, \mathbf{r}_{kl}) + f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})) \quad (9)$$

с целью коррекции решения на этом слое и затем подставлять это значение в (8).

Учитывая то, что  $\tilde{f}_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t^2} + O(\Delta t^2)$ , можно говорить о том, что представление (9) аппроксимирует  $f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})$  со вторым порядком по  $t$  локально, а следовательно, и в сеточной норме  $C$  при всех предположениях о гладкости  $f_i$ .

Подставляя (9) в (8), получим отличную от (8) разностную схему

$$f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = \frac{1}{2} (f_i(t_{j-1/2}, \mathbf{r}_{kl}) + f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})) - v_{ix} \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{k-1l})) - v_{iy} \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl-1})) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}))), \quad (10)$$

в которой для расчетов используются значения на временных слоях:  $t = t_{j-1/2}, t_{j+1/2}, t_{j+1}$ . При практическом применении начальный шаг можно выбрать с помощью одной из двухслойных схем, предложенных в [13–17].

Аналогично строятся модификации схем 2–6. Построенные схемы будем называть схемами М1–М6.

Рассматривая задачу об исследовании устойчивости, заключаем, что при исследовании линейного приближения (10) эта задача сводится к исследованию устойчивости нулевого решения линейной разностной системы вида

$$F_i(t_{j-1/2} + 3\Delta t/2) = \frac{1}{2} (F_i(t_{j-1/2}) + F_i(t_{j-1/2} + \Delta t)) + \sum_{s=1}^9 G_{is} F_s(t_{j-1/2} + \Delta t), \quad (11)$$

где  $G_{is} = \begin{cases} -\frac{i\Delta t}{h} (v_{ix} \sin(\theta_x h) + v_{iy} \sin(\theta_y h)) - \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}(\bar{\mathbf{f}}^{(eq)})}{\partial f_s}, & s = i, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}(\bar{\mathbf{f}}^{(eq)})}{\partial f_s}, & s \neq i. \end{cases}$

Введем новые переменные  $S_i(t_{j-1/2}) = F_i(t_{j-1/2})$ ,  $i = \overline{1, 9}$ ,  $S_i(t_j) = F_{i-9}(t_{j-1/2} + \Delta t/2)$ ,  $i = \overline{10, 18}$ ,  $S_i(t_{j-1/2}) = F_{i-18}(t_{j-1/2} + \Delta t)$ ,  $i = \overline{19, 27}$ . Тогда система (11) сведется к двухслойной схеме

$$S_i(t_{j-1/2} + \Delta t/2) = \sum_{m=1}^{27} A_{im} S_m(t_{j-1/2}),$$

где  $A_{im}$  — элементы матрицы следующей структуры:  $A = \begin{pmatrix} O_{9 \times 9} & E_{9 \times 9} & O_{9 \times 9} \\ O_{9 \times 9} & O_{9 \times 9} & E_{9 \times 9} \\ \frac{1}{2} E_{9 \times 9} & O_{9 \times 9} & K_{9 \times 9} \end{pmatrix}$ , где  $K = \frac{1}{2} E + G$ .

## 5. Области устойчивости модифицированных схем.

**5.1. Случай промежутка  $\tau \in [0, 100]$ .** В табл. 1 представлены значения площадей областей устойчивости для случаев схем М1–М3 при  $\gamma = 0.1$  и  $\gamma = 0.25$  для обоих режимов. Заметим, что при  $\gamma = 0.5$  и выше области устойчивости оказались пустыми.

Таблица 1  
Площади областей устойчивости  
схем М1–М3

Схема	$\gamma$	Режим 1	Режим 2
М1	0.1	54.127	51.872
	0.25	53.617	51.668
М2	0.1	61.167	57.035
	0.25	0	0
М3	0.1	54.423	51.219
	0.25	0	0

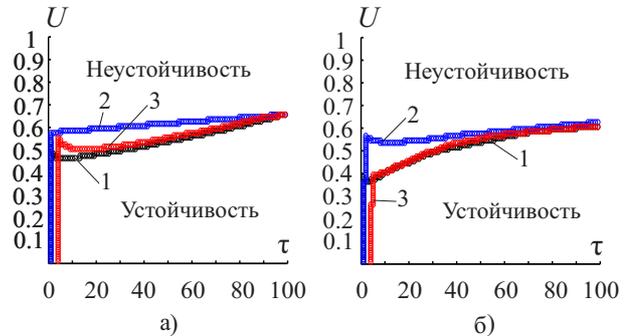


Рис. 1. Границы областей устойчивости схем М1–М3 при  $\gamma = 0.1$ : а) случай режима 1; б) случай режима 2. Кривая 1 – схема М1; кривая 2 – схема М2; кривая 3 – схема М3

На рис. 1 представлены границы областей устойчивости в случае  $\gamma = 0.1$  для обоих режимов. В целом, для схем М1–М3, не использующих специальную аппроксимацию члена  $v_i \nabla f_i$ , характерна та же ситуация, что и для явных двухслойных схем [16]. Площади областей устойчивости для случая режима 1 больше, чем для случая режима 2. Площади для схемы М2 больше, чем площади для схем М1 и М3, которые близки по величине. В то же время, при  $\gamma = 0.25$  площади областей устойчивости для схем М2 и М3 равны нулю, тогда как в случае схемы М1 область устойчивости не является пустой.

Таблица 2  
Площади областей устойчивости  
схем М4–М6

Схема	$\gamma$	Режим 1	Режим 2
М4	0.1	54.129	50.587
	0.25	54.137	52.178
	0.5	53.719	52.413
М5	0.1	61.168	54.882
	0.25	60.310	54.250
	0.5	0	0
М6	0.1	56.066	52.546
	0.25	0	0
	0.5	0	0

Таблица 3  
Площади областей устойчивости  
схемы М4

Значение $\gamma$	Режим 1	Режим 2
0.125	54.137	51.607
0.2	57.729	52.728
0.4	62.443	53.341
0.75	69.911	52.699
0.8	64.167	52.617
0.9	6.5708	4.1730

Ситуация со схемами М4–М6, построенными с использованием специальной аппроксимации члена  $v_i \nabla f_i$ , оказалась иной — соответствующие значения площадей областей устойчивости представлены в табл. 2. Приведены лишь результаты для случаев  $\gamma = 0.1, 0.25$  и  $0.5$ , так как после  $\gamma = 0.5$  области устойчивости для схем М5 и М6 оказались пустыми. На рис. 2 представлены границы областей устойчивости для случаев обоих режимов при  $\gamma = 0.1$  и  $\gamma = 0.25$ .

Следует отметить, что при  $\gamma = 0.1$  площади областей устойчивости схем М1 и М4, а также схем М2 и М5 практически равны друг другу. Для схемы М6 при этом же значении  $\gamma$  площадь немного увеличивается.

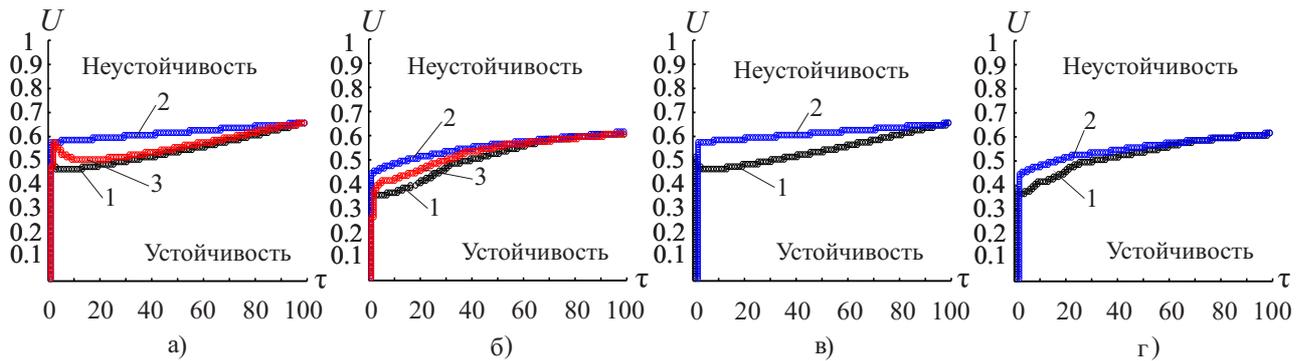


Рис. 2. Границы областей устойчивости схем М4–М6 при  $\gamma = 0.1$  и  $\gamma = 0.25$ : а)  $\gamma = 0.1$ , режим 1; б)  $\gamma = 0.1$ , режим 2; в)  $\gamma = 0.25$ , режим 1; г)  $\gamma = 0.25$ , режим 2. Кривая 1 — схема М1; кривая 2 — схема М2; кривая 3 — схема М3

При  $\gamma = 0.25$  для схемы М5 по сравнению с М2 имеем ненулевую площадь области устойчивости.

При исследовании схемы М4 было обнаружено, что при увеличении  $\gamma$  в случаях обоих режимов площадь увеличивается, причем немонотонным образом, в случае режима 1 с максимальным значением при  $\gamma = 0.75$ , в случае режима 2 — при  $\gamma = 0.4$ . Однако при приближении к  $\gamma = 1$  площадь начинает уменьшаться, а сама область при таком значении  $\gamma$  является уже пустым множеством. Соответствующие результаты представлены в табл. 3. На рис. 3 представлены границы областей устойчивости в случаях обоих режимов. Заметим, что подобной ситуации для схемы с центральными разностями без использования специальной аппроксимации члена  $v_i \nabla f_i$  не наблюдалось.

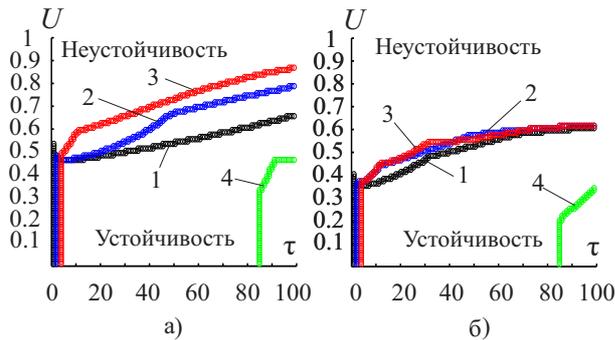


Рис. 3. Границы областей устойчивости схемы М4 при различных  $\gamma$ : а) режим 1; б) режим 2. Кривая 1 —  $\gamma = 0.1$ ; кривая 2 —  $\gamma = 0.4$ ; кривая 3 —  $\gamma = 0.75$ ; кривая 4 —  $\gamma = 0.9$

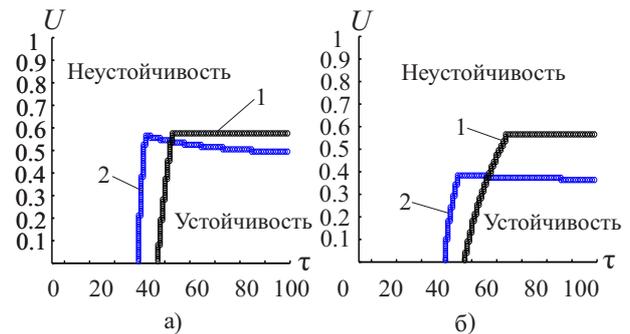


Рис. 4. Границы областей устойчивости схем М1–М3 при  $\gamma = 0.1$ : а) режим 1; б) режим 2. Кривая 1 — схема М1; кривая 2 — схема М2

**5.2. Случай промежутка  $\tau \in [0, 2]$ .** Рассмотрим интересный для практических приложений случай, когда значения  $\tau$  оказываются относительно малыми. Для обычного решеточного уравнения Больцмана характерно следующее ограничение, обеспечивающее устойчивость:  $\tau > 1/2$ . Случай значений  $\tau$ , близких к  $1/2$ , соответствует ситуации, когда малой является их численная вязкость. Поскольку для представленных выше схем выражение для коэффициента численной вязкости полностью совпадает с выражением для коэффициента кинематической вязкости, случаю близких к нулю значений  $\tau$  будет соответствовать случай близких к нулю значений  $\nu$ . Последнее имеет место для случая больших чисел Рейнольдса, что отвечает турбулентным течениям.

В табл. 4 и 5 приведены площади областей устойчивости схем М1–М6 при  $\tau \in [0, 2]$ . Как можно заметить, и в данной ситуации площади областей устойчивости схем М4–М6 оказались больше, чем для схем М1–М3. При этом при  $\gamma = 0.5$  области устойчивости схем М1–М3, М5–М6 оказались пустыми в отличие от схемы М4.

На рис. 4 и 5 представлены границы областей устойчивости. Как можно видеть, значения  $\tau$ , близкие к нулю, не входят в области устойчивости. Последнее говорит о том, что представленные схемы не будут

Таблица 4  
Площади областей устойчивости  
схем М1–М3

Схема	$\gamma$	Режим 1	Режим 2
М1	0.1	0.651	0.461
	0.25	0.277	0.169
М2	0.1	0.609	0.545
	0.25	0	0
М3	0.1	0	0
	0.25	0	0

Таблица 5  
Площади областей устойчивости  
схем М4–М6

Схема	$\gamma$	Режим 1	Режим 2
М4	0.1	0.732	0.551
	0.25	0.568	0.418
	0.5	0.204	0.139
М5	0.1	0.764	0.583
	0.25	0.433	0.307
	0.5	0	0
М6	0.1	0.556	0.349
	0.25	0	0
	0.5	0	0

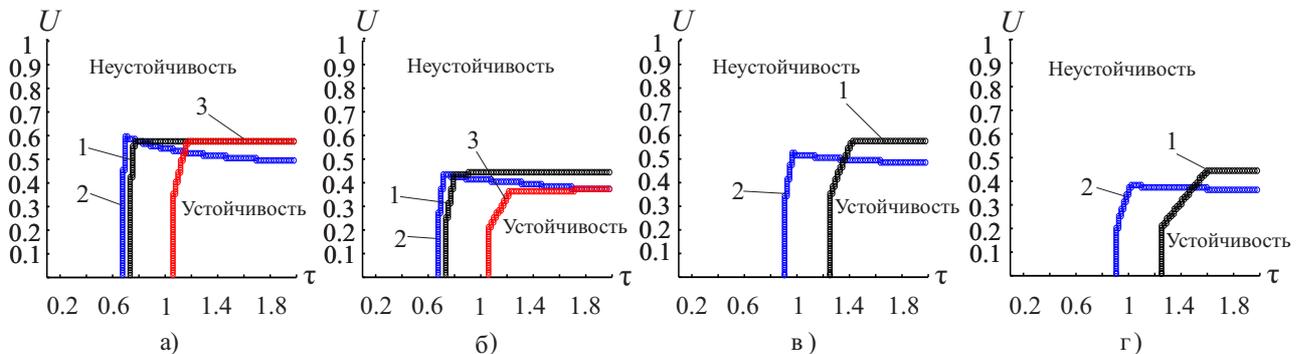


Рис. 5. Границы областей устойчивости схем М4–М6 при различных  $\gamma$ : а)  $\gamma = 0.1$ , режим 1; б)  $\gamma = 0.1$ , режим 2; в)  $\gamma = 0.25$ , режим 1; д)  $\gamma = 0.25$ , режим 2. Кривая 1 — схема М4; кривая 2 — схема М5; кривая 3 — схема М6

применимы в ряде практических задач. Однако схемы вполне могут применяться при моделировании течений, при которых значения  $\tau$  близко к единице, и для моделирования течений с большими значениями этого параметра, что соответствует случаю малых чисел Рейнольдса. Заметим, что одно из важных применений метода LBM связано с моделированием течений в пористых средах, которые происходят при умеренных и малых числах Рейнольдса [23, 24].

**6. Заключение.** В настоящей статье исследована устойчивость трехслойных конечно-разностных решеточных схем Больцмана в случае, когда производная по времени аппроксимируется с использованием центральной разностной производной. Для улучшения устойчивости предложено использовать представление значений функций распределения на промежуточном слое средними арифметическими их значений на ближайших слоях. Показано, что наибольшие по площади области устойчивости могут быть получены при использовании специальной аппроксимации члена  $v_i \nabla f_i$ , предложенной в [14, 17].

В дальнейшем планируется исследовать устойчивость других видов явных многослойных схем, полученных при использовании методов типа Рунге–Кутты и Адамса–Башфорта. Полученные в работе результаты могут оказаться полезными при сравнении друг с другом различных типов решеточных схем Больцмана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chen S., Doolen G.D. Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1998. **30**. 329–364.

2. *Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D.* The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *Int. J. Multiphase Flow*. 2003. **29**. 117–169.
3. *Delbosc N., Summers J.L., Khan A.I., Kapur N., Noakes C.J.* Optimized implementation of the lattice Boltzmann method on a graphics processing unit toward real-time fluid simulation // *Comput. Math. Appl.* 2014. **67**, N 2. 462–475.
4. *Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С.* Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. **12**. 227–231.
5. *Бикулов Д.А., Сенин Д.С., Демин Д.С., Дмитриев А.В., Грачев Н.Е.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 13–19.
6. *Бикулов Д.А., Сенин Д.С.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана без хранимых значений функций распределения для GPU // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 370–374.
7. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 130–138.
8. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 384–390.
9. *Kupershtokh A.L.* Three-dimensional LBE simulations of a decay of liquid dielectrics with a solute gas into the system of gas–vapor channels under the action of strong electric fields // *Comput. Math. Appl.* 2014. **67**, N 2. 340–349.
10. *Lin L.-S., Chang H.-W., Lin C.-A.* Multi relaxation time lattice Boltzmann simulations of transition in deep 2D lid driven cavity using GPU // *Computers & Fluids*. 2013. **80**. 381–387.
11. *Zhao Z., Huang P., Li Y., Li J.* A lattice Boltzmann method for viscous free surface waves in two dimensions // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2013. **71**, N 2. 223–248.
12. *Yong Y., Lou X., Li S., Yang C., Yin X.* Direct simulation of the influence of the pore structure on the diffusion process in porous media // *Computers and Mathematics with Applications*. 2014. **67**, N 2. 412–423.
13. *Seta T., Takahashi R.* Numerical stability analysis of FDLBM // *Journal of Statistical Physics*. 2002. **107**, N 1/2. 557–572.
14. *Sofonea V., Sekerka R.F.* Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // *Journal of Computational Physics*. 2003. **184**, N 2. 422–434.
15. *Tsutahara M.* The finite-difference lattice Boltzmann method and its application in computational aeroacoustics // *Fluid Dynamics Research*. 2012. **44**, N 4. 045507–045525.
16. *Кривовичев Г.В.* Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 332–340.
17. *Кривовичев Г.В.* Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 1–8.
18. *Broadwell J.E.* Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method // *Journal of Fluid Mechanics*. 1964. **19**, N 3. 401–414.
19. *Abe T.* Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation // *Journal of Computational Physics*. 1997. **131**, N 1. 241–246.
20. *Sterling J.D., Chen S.* Stability analysis of lattice Boltzmann methods // *Journal of Computational Physics*. 1996. **123**, N 1. 196–206.
21. *Рухтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
22. *Smith B.T., Boyle J.M., Dongarra J.J., Garbow B.S., Ikebe Y., Klema V.C., Moler C.B.* Matrix Eigensystem Routines. EISPACK Guide. Heidelberg: Springer, 1976.
23. *Taghilou M., Rahimian M.H.* Investigation of two-phase flow in porous media using lattice Boltzmann method // *Computers and Mathematics with Applications*. 2014. **67**, N 2. 424–436.
24. *Cho H., Jeong N., Sung H.J.* Permeability of microscale fibrous porous media using the lattice Boltzmann method // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2013. **44**. 435–443.

Поступила в редакцию  
18.02.2014

---

## Stability of Three-Layer Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes

G. V. Krivovichev<sup>1</sup> and S. A. Mikheev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Associate Professor, e-mail: gera1983k@bk.ru*

<sup>2</sup> Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Student, e-mail: helps2@rambler.ru

Received February 18, 2014

**Abstract:** Stability of three-layer finite difference-based lattice Boltzmann schemes is studied. The time derivative is approximated by the central difference. The stability analysis with respect to initial conditions is performed. The Neumann method is used. It is shown that the stability of the schemes can be improved by the usage of averages of distribution function values on the nearest time layers. It is also shown that the usage of special approximations for the convective terms in the kinetic equations allows one to increase the stability domains in comparison with the case of the schemes with separate approximations of spatial derivatives.

**Keywords:** lattice Boltzmann method, lattice Boltzmann schemes, stability with respect to initial conditions, Neumann method.

### References

1. S. Chen and G. D. Doolen, "Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30**, 329–364 (1998).
2. R. R. Nourgaliev, T. N. Dinh, T. G. Theofanous, and D. Joseph, "The Lattice Boltzmann Equation Method: Theoretical Interpretation, Numerics and Implications," *Int. J. Multiphase Flow* **29**, 117–169 (2003).
3. N. Delbosc, J. L. Summers, A. I. Khan, et al., "Optimized Implementation of the Lattice Boltzmann Method on a Graphics Processing Unit toward Real-Time Fluid Simulation," *Comput. Math. Appl.* **67** (2), 462–475 (2014).
4. N. E. Grachev, A. V. Dmitriev, and D. S. Senin, "Simulation of Gas Dynamics with the Lattice Boltzmann Method," *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 227–231 (2011).
5. D. A. Bikulov, D. S. Senin, D. S. Demin, et al., "Implementation of the lattice Boltzmann method on GPU clusters," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 13–19 (2012).
6. D. A. Bikulov and D. S. Senin, "Implementation of the Lattice Boltzmann Method without Stored Distribution Functions on GPU," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 370–374 (2013).
7. A. L. Kupershtokh, "Three-Dimensional Simulations of Two-Phase Liquid–Vapor Systems on GPU Using the Lattice Boltzmann Method," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 130–138 (2012).
8. A. L. Kupershtokh, "Three-Dimensional LBE Simulations on Hybrid GPU-Clusters for the Decay of a Binary Mixture of Liquid Dielectrics with a Solute Gas to a System of Gas–Vapor Channels," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 384–390 (2012).
9. A. L. Kupershtokh, "Three-Dimensional LBE Simulations of a Decay of Liquid Dielectrics with a Solute Gas into the System of Gas–Vapor Channels under the Action of Strong Electric Fields," *Comput. Math. Appl.* **67** (2), 340–349 (2014).
10. L.-S. Lin, H.-W. Chang, and C.-A. Lin, "Multi Relaxation Time Lattice Boltzmann Simulations of Transition in Deep 2D Lid Driven Cavity Using GPU," *Comput. & Fluids* **80**, 381–387 (2013).
11. Z. Zhao, P. Huang, Y. Li, and J. Li, "A Lattice Boltzmann Method for Viscous Free Surface Waves in Two Dimensions," *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **71** (2), 223–248 (2013).
12. Y. Yong, X. Lou, S. Li, et al., "Direct Simulation of the Influence of the Pore Structure on the Diffusion Process in Porous Media," *Comput. Math. Appl.* **67** (2), 412–423 (2014).
13. T. Seta and R. Takahashi, "Numerical Stability Analysis of FDLBM," *J. Stat. Phys.* **107** (1/2), 557–572 (2002).
14. V. Sofonea and R. F. Sekerka, "Viscosity of Finite Difference Lattice Boltzmann Models," *J. Comput. Phys.* **184** (2), 422–434 (2003).
15. M. Tsutahara, "The Finite-Difference Lattice Boltzmann Method and Its Application in Computational Aeroacoustics," *Fluid Dyn. Res.* **44** (4), 045507–045525 (2012).
16. G. V. Krivovichev, "Investigation of the Stability of Explicit Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 332–340 (2012).
17. G. V. Krivovichev, "Stability of Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 1–8 (2013).

18. J. E. Broadwell, "Study of Rarefied Shear Flow by the Discrete Velocity Method," *J. Fluid Mech.* **19** (3), 401–414 (1964).
19. T. Abe, "Derivation of the Lattice Boltzmann Method by Means of the Discrete Ordinate Method for the Boltzmann Equation," *J. Comput. Phys.* **131** (1), 241–246 (1997).
20. J. D. Sterling and S. Chen, "Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods," *J. Comput. Phys.* **123** (1), 196–206 (1996).
21. R. D. Richtmyer and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial-Value Problems* (Interscience, New York, 1967; Mir, Moscow, 1972).
22. B. T. Smith, J. M. Boyle, J. J. Dongarra, B. S. Garbow, Y. Ikebe, V. C. Klema, and C. B. Moler, *Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide* (Springer, Heidelberg, 1976).
23. M. Taghilou and M. H. Rahimian, "Investigation of Two-Phase Flow in Porous Media Using Lattice Boltzmann Method," *Comput. Math. Appl.* **67** (2), 424–436 (2014).
24. H. Cho, N. Jeong, and H. J. Sung, "Permeability of Microscale Fibrous Porous Media Using the Lattice Boltzmann Method," *Int. J. Heat Fluid Flow* **44**, 435–443 (2013).