

УДК 517.97; 539.376

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАЦИОНАЛЬНОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Бормотин<sup>1</sup>

Формулируется постановка обратных квазистатических задач теории ползучести в виде оптимального управления. На основе критерия минимизации поврежденности в функционалах обратных задач находятся оптимальные законы деформирования в ползучести. При численном решении обратных задач формообразования итеративным методом используется непрерывная функция оптимального нагружения, зависящая от двух параметров. Построен и численно реализован метод определения параметров по заданным условиям задачи. Решение каждого шага итеративного метода выполняется методом конечных элементов в программной системе MSC.Marc. Дан сравнительный анализ результатов расчета изгиба пластинки при различных режимах нагружения.

**Ключевые слова:** обратная задача ползучести, поврежденность, вариационные принципы, задача многокритериальной оптимизации, оптимальное управление, метод конечных элементов.

**1. Постановка и решение обратных задач оптимального управления.** Пусть  $V \subset R^3$  — ограниченная область с достаточно регулярной границей  $S$ . Обозначим через  $u = (u_1, u_2, u_3)$  и  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$  векторы текущих и остаточных перемещений  $u, \tilde{u} \in [W_2^1(Q)]^3$ ,  $Q = V \times [0 \leq t \leq T]$ .

В постановке обратных задач формообразования используются функционалы вариационного принципа Хилла [1], описывающие задачи квазистатического деформирования. В этом случае предполагается выполнение кинематических граничных условий  $\dot{u}_i = \dot{u}_i^*$  на границе  $S$ , условий на остаточные скорости перемещений  $\dot{\tilde{u}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^*$ , соотношений между деформациями и перемещениями и соотношений между напряжениями и деформациями. При такой формулировке, выраженной в скоростях, путь деформирования определяется однозначно по заданным остаточным скоростям перемещений, и в этом случае доказывается единственность, устойчивость решения и строится итеративный метод [2–4].

В случае заданных остаточных перемещений в конечный момент времени соответствующие текущие перемещения на всем промежутке времени могут быть различными. Для однозначности определения вводится критерий оптимальности с использованием параметра поврежденности. Параметр поврежденности дает количественную оценку накопления в материале поврежденности в процессе ползучести и остаточного прочностного ресурса. Таким образом, формулируется задача оптимального деформирования: как следует деформировать элемент среды в течение заданного времени  $t^*$ , чтобы в момент времени  $t = t^*$  получить заданные значения деформаций ползучести при условии минимальности параметра поврежденности  $\Omega$  [5, 6]?

При учете рассеянной энергии параметр поврежденности определяется формулой

$$\dot{\Omega} = \frac{dA}{A^* dt} = \frac{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^c}{A^* dt} = \frac{\sigma_{ij} \eta_{ij}}{A^*},$$

где  $A^*$  — критическая величина работы разрушения истинного напряжения на деформации ползучести (рассеянная энергия к моменту разрушения);  $A = A(t)$  — рассеянная энергия [7, 8];  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\eta_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^c$  — скорости деформаций ползучести.

Таким образом, задача оптимизации заключается в нахождении такого пути деформирования за время  $T$ , при котором значение интеграла

$$\Omega(T) = \int_0^T \dot{\Omega} dt = \frac{1}{A^*} \int_0^T \sigma_{ij} \eta_{ij} dt$$

будет минимальным.

<sup>1</sup> Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, самолетостроительный факультет, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; доцент, e-mail: cvmi@knastu.ru

На основе теории многокритериальной оптимизации [9–12], с помощью метода весовых коэффициентов и принимая за критерии качества функционалы вариационных принципов задач неупругого деформирования и упругой разгрузки, функционал обратной задачи оптимального деформирования представляется в виде

$$J_o(\dot{u}_i, \dot{\tilde{u}}_i) = w'_1 \left[ \int_V W(\dot{\epsilon}_{ij}) dV - \int_S \dot{p}_i \dot{u}_i dS \right] + w'_2 \int_V W(\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}) dV + w'_3 \int_V \sigma_{ij} \eta_{ij} dV, \quad (1)$$

где  $w'_1 > 0$ ,  $w'_2 > 0$ ,  $w'_3 > 0$  – весовые коэффициенты;  $W(\dot{\epsilon}_{ij}) = c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{kl} / 2 - c_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij} \eta_{kl}$  и  $W(\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}) = c_{ijkl} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl} / 2 - c_{ijkl} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} \eta_{kl}$  – потенциалы деформирования в теории ползучести [13];  $c_{ijkl}$  – компоненты симметричного тензора упругих констант;  $\dot{\epsilon}_{ij}$  и  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}$  – скорости текущих и остаточных деформаций;  $\dot{p}_i$  – компоненты скорости усилия на поверхности  $S$ ;  $\dot{u}_i$  и  $\dot{\tilde{u}}_i$  – скорости текущих и остаточных перемещений;  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ; и

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}). \quad (2)$$

Здесь выражения с повторяющимися индексами означают суммирование по ним от 1 до 3, а через запятую обозначено дифференцирование:  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

В частности, по закону установившейся ползучести деформации могут быть определены в виде  $\eta_{ij} = \gamma s_{ij}$ , где  $\gamma = \frac{3}{2} B \bar{\sigma}^{n-1}$ ,  $s_{ij}$  – компоненты девиатора тензора напряжений,  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$  – эффективное напряжение (интенсивность напряжений),  $B$  и  $n$  – константы ползучести [13].

Задача минимизации функционала (1) представляет собой задачу оптимального управления, в которой функциями состояния являются функции остаточных перемещений  $\tilde{u}_i$ , а функциями управления – текущие перемещения  $u_i$ .

Деление целевого функционала на положительное действительное число не изменит условий оптимальности и, следовательно, самого решения. Пусть  $w_1 = w'_2/w'_1$  и  $w_2 = w'_3/w'_1$  [10]. Тогда функционал (1) примет вид

$$J_o(\dot{u}_i, \dot{\tilde{u}}_i) = \left[ \int_V W(\dot{\epsilon}_{ij}) dV - \int_S \dot{p}_i \dot{u}_i dS \right] + w_1 \int_V W(\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}) dV + w_2 \int_V \sigma_{ij} \eta_{ij} dV. \quad (3)$$

При деформировании детали возможны ограничения на технологический процесс и критерии разрушения, а также некоторые другие ограничения, которые можно учитывать в описании функционала (3) [14].

Учитывая независимость вариаций  $\dot{u}_i$ ,  $\dot{\tilde{u}}_i$ ,  $\eta_{ij}$  и выражений (2), из равенства  $\delta J_o = 0$  получаем уравнения равновесия для текущих и остаточных скоростей напряжений и уравнение

$$w_2 \sigma_{ij} = c_{klij} (\dot{\epsilon}_{kl} + w_1 \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl}) \quad (4)$$

в области  $V$ , а также граничные условия на поверхности  $S$  [14, 15].

При известном пути нагружения в работах [2–4] на основе функционалов обратной задачи построен итеративный метод в виде

$$\dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k), \quad 0 < \alpha^k < 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

и доказана сходимость его к решению обратных задач формообразования.

Для учета критерия оптимальности в численном решении обратных задач формообразования необходимо на каждом шаге интегрирования уравнений метода конечных элементов обеспечить выполнение соотношения (4).

В обратной задаче одноосного растяжения стержня в теории ползучести с минимальной поврежденностью на основе соотношения (4) определена зависимость рационального пути нагружения от весовых коэффициентов и времени в следующем виде [14]:

$$p = \left[ (1 + w_1) EB / w_2 + (p^{*(1-n)} - (1 + w_1) EB / w_2) e^{w_2(1-n)t} \right]^{\frac{1}{1-n}},$$

где  $p = p(t)$  – прикладываемые к стержню растягивающие усилия,  $E$  – модуль упругости и  $p^*$  – начальная нагрузка. Аналогичное выражение строится для перемещений.

При рассмотрении задач изгиба пластин в случае малых деформаций с помощью соотношения (4) с учетом ряда ограничений определяется путь деформирования в виде линейной функции  $w = tw^*/T$ , где  $w^*$  — прогиб в конечный момент времени. В случае весьма тонкой пластинки, прогибы которой могут во много раз превысить ее толщину, определен оптимальный путь деформирования в виде  $w = \sqrt{\frac{t}{T}} w^*$  [6, 15].

Пусть искомым прогиб имеет вид

$$w(t, x_1, x_2) = \frac{f(t)}{f(T)} w^*(x_1, x_2), \quad (6)$$

где

$$f(t) = \left[ \frac{(1+w_1)EB}{w_2} + \left( B^{-1/n} - \frac{(1+w_1)EB}{w_2} \right) e^{w_2(1-n)t} \right]^{\frac{n}{1-n}}, \quad (7)$$

$x_1, x_2$  — координаты декартовой системы в срединной плоскости пластинки и  $T$  — конечное время деформирования в режиме ползучести.

Таким образом, оптимальный путь нагружения предлагается определять по формулам (6) и (7) с учетом значений весовых коэффициентов.

**2. Алгоритм и результаты рационального решения обратной задачи формообразования.** Поиск весовых коэффициентов в законе деформирования (7) с целью минимизации рассеянной энергии в решении обратной задачи формообразования предлагается проводить по следующему алгоритму.

Зададимся некоторым достаточно малым положительным числом  $h$ , которое будем называть шагом варьирования. Пусть  $i$ -е приближение построено, т.е. известны значения  $w_1^i$  и  $w_2^i$ .

Шаг 1. Для определения  $w_1^{i+1}$  и  $w_2^{i+1}$  воспользуемся методом локальных вариаций [16, 17]. Находятся значения  $w_{1+}^{i+1} = w_1^i + h$ ,  $w_{1-}^{i+1} = w_1^i - h$ ,  $w_{2+}^{i+1} = w_2^i + h$  и  $w_{2-}^{i+1} = w_2^i - h$ . Для каждого допустимого варианта (выполняются условия положительности весовых коэффициентов) решается обратная задача формообразования итеративным методом (5) с учетом кинематического нагружения в виде (6).

Шаг 2. По найденным параметрам вычисляются значения рассеянной энергии и определяются наименьшие. Найденные значения коэффициентов используются для построения последующих итераций. Далее возвращаемся к шагу 1 (причем возможно увеличение или уменьшение шага  $h$ ), пока для оптимальных значений работы не выполнится условие  $|A^{i+1} - A^i| < \epsilon$  ( $\epsilon$  — заданная точность).

В задачах оптимизации с ограничениями на напряжения после определения  $(w_{1+}^{i+1}, w_{2+}^{i+1})$  и  $(w_{1-}^{i+1}, w_{2-}^{i+1})$  проверяются условия допустимости и только затем выбираются оптимальные параметры.

Задачи деформирования тел в теории ползучести решаются численно путем проведения пространственной дискретизации нелинейных уравнений механики деформируемого твердого тела с помощью метода конечных элементов. При пошаговом интегрировании уравнений по времени используется явная схема Эйлера и определяются деформации ползучести

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}^c - {}^t\epsilon_{ij}^c = \Delta\epsilon_{ij}^c \approx \dot{\epsilon}_{ij}^c \Delta t,$$

где  ${}^t\epsilon_{ij}^c$  и  ${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}^c$  — деформации ползучести в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  соответственно,  $\Delta t$  — шаг по времени. Расчет рассеянной энергии выполняется по формуле

$$\int_0^T \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^c dt \approx \sum \sigma_{ij} \Delta\epsilon_{ij}^c.$$

Здесь в интегральной сумме напряжения и приращения деформаций вычисляются для каждого момента времени  $t + \Delta t$ . Используя возможности программной системы MSC.Marc дополнять функции пользовательскими подпрограммами (user's subroutines), мы задаем нагрузки и дополняем набор результатов полученной рассеянной энергией  $A$ .

По разработанному алгоритму проводится численное решение рационального формообразования на примере изгиба пластинки с использованием системы MSC.Marc [18]. В расчетах используются характеристики материала АК4-1Т (алюминиевого сплава) пластинки, время деформирования в ползучести  $T = 260$  ч. Материал изотропен, и его характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии и равны следующим значениям: модуль Юнга  $E = 7000$  кг/мм<sup>2</sup> и коэффициент Пуассона  $\nu = 0.4$ . Стадия установившейся ползучести в экспериментах как при сжатии, так и при растяжении описывается законом Нортонса с разными значениями коэффициента  $B$  для каждого из этих видов деформирования:

- сжатие:  $B_1 = 0.25 \times 10^{-14} \text{ (кг/мм}^2\text{)}^{-n_1} \text{ (час)}^{-1}$ ,  $n_1 = 8$ ;
- растяжение:  $B_2 = 0.525 \times 10^{-14} \text{ (кг/мм}^2\text{)}^{-n_2} \text{ (час)}^{-1}$ ,  $n_2 = 8$ .

В рациональном пути нагружения (7) в качестве констант ползучести принимаются их средние значения между константами при сжатии и растяжении.

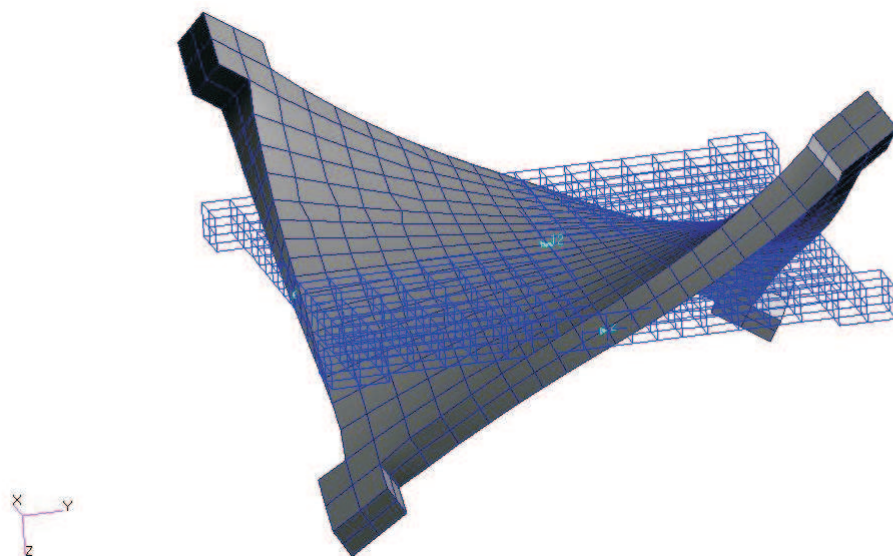


Рис. 1.

На рис. 1 представлена заданная остаточная форма пластинки, для которой необходимо найти упреждающую форму, и ее плоская модель. Прогиб пластинки, моделирующий кручение, задается в виде узловых перемещений по координате, нормальной к поверхности пластинки. Для более полного анализа рассматривается объемная постановка задачи.

Таким образом, для обеспечения заданного остаточного перемещения находятся параметры функции (7), обеспечивающие минимальные значения рассеянной энергии и напряжений.

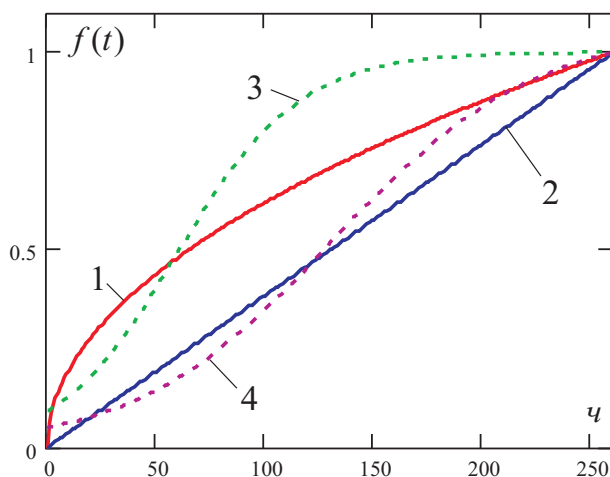


Рис. 2.

На рис. 2 представлены функции прогиба пластинки в случае малых деформаций. Кривая 1 соответствует  $w = \sqrt{\frac{t}{T}} w^*$ , кривая 2 —  $w = \frac{t}{T} w^*$ , кривые 3 и 4 — итерациям по разработанному алгоритму. Значения рассеянной энергии  $A$  кг/мм<sup>2</sup> и эффективного напряжения  $\bar{\sigma}$  кг/мм<sup>2</sup> в конечный момент вре-

мени для этих кривых следующие: (1) 1.72 и 24.8, (2) 1.69 и 27.1, (3) 1.79 и 18.8, (4) 1.7 и 24.1.

По указанным выше результатам расчета в случае малых прогибов пластинки можно обнаружить, что путь деформирования при минимизации рассеянной энергии стремится к линейному. Эти данные подтверждают результаты работ [5, 15]. Кроме того, из этих результатов можно сделать вывод, что с уменьшением рассеянной энергии увеличиваются напряжения в конечный момент времени. При помощи предложенного алгоритма можно определить оптимальный путь деформирования пластинки не только по значениям рассеянной энергии, но и по возникающим напряжениям. Низкие значения напряжений в конечный момент деформирования уменьшают перемещения при упругой разгрузке, что позволяет быстрее и точнее определять упреждающую форму.

В случае больших прогибов на рис. 3 представлены графики функций прогибов. Кривая 1 соответствует  $w = \sqrt{\frac{t}{T}} w^*$ , кривая 2 —  $w = \frac{t}{T} w^*$ , кривые 3, 4 и 5 — итерациям по разработанному алгоритму. Значения рассеянной энергии  $A$  кг/мм<sup>2</sup> и эффективного напряжения  $\bar{\sigma}$  кг/мм<sup>2</sup> в момент времени  $T = 260$  ч. для этих кривых следующие: (1) 3.21 и 32.2, (2) 3.28 и 34.1, (3) 3.4 и 25.4, (4) 3.26 и 32.9, (5) 3.24 и 30.9.

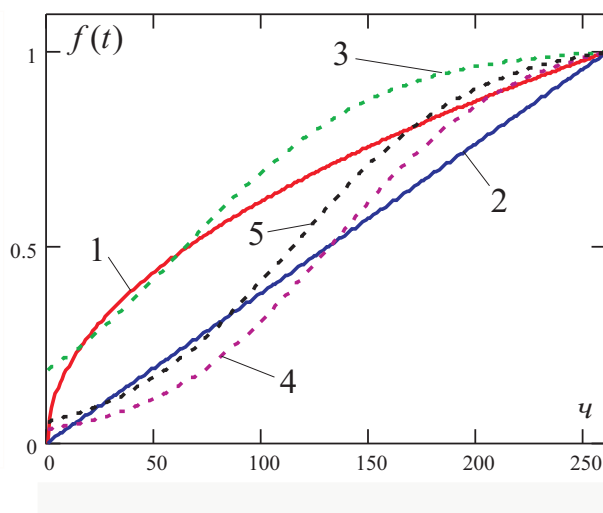


Рис. 3.

Из анализа напряжений в процессе деформирования по путям 1 и 5 можно обнаружить, что незначительное превышение значения рассеянной энергии приводит к уменьшению максимального по времени деформирования эффективного напряжения (для кривой 1:  $\bar{\sigma}_{max} = 36.4$  кг/мм<sup>2</sup> при  $t = 1.7$  ч., для кривой 5:  $\bar{\sigma}_{max} = 33.8$  кг/мм<sup>2</sup> при  $t = 125$  ч.).

**3. Заключение.** Разработанный алгоритм предлагается для определения упреждающей формы с минимальной поврежденностью и ограничениями на значения напряжений в процессе деформирования в ползучести, обеспечивающей заданную остаточную конфигурацию детали. В этом алгоритме решение находится итеративным методом совместно с методом локальных вариаций, определяющим параметры функции нагружения. С использованием параметрической функции нагружения можно определять оптимальные пути деформирования не только по рассеянной энергии, но и по напряжениям.

Постановка обратных квазистатических задач теории ползучести в виде оптимального управления позволяет с помощью разработанного алгоритма находить численные рациональные решения для более сложных задач, свободных от представлений идеальной пластинки и оболочки, в частности при формообразовании панелей крыла [19] или при изготовлении форм днища судна в кораблестроении [20]. Для таких изделий при проектировании необходимо учитывать влияние отклонений от правильных оболочек на собственные изгибные колебания [21].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-08-00845-а), Совета по грантам Президента РФ (МК-481.2013.1) и Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект 909).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill R. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain // J. Mech. Phys. Solids. 1957. **5**, N 4. 229–241.
2. Бормотин К.С. Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 141–148.
3. Бормотин К.С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. **53**, № 12. 2091–2099.
4. Бормотин К.С., Логвина В.С. Метод решения итеративной регуляризацией обратных задач формообразования деталей // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 77–84.
5. Цвелодуб И.Ю. Об оптимальных путях деформирования в условиях ползучести. Некоторые приложения к задачам обработки материалов давлением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 6. 128–136.
6. Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
7. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение, 2004.
8. Горев Б.В., Рубанов В.В., Соснин О.В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Проблемы прочности. 1979. № 7. 62–67.
9. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986.
10. Liu G.P., Yang J.B., Whidborne J.F. Multiobjective optimisation and control. Baldock: Research Studies Press, 2003.
11. Tan K.C., Khor E.F., Lee T.H. Multiobjective evolutionary algorithms and applications. London: Springer, 2005.
12. Gambier A. MPC and PID control based on multi-objective optimization // Proc. of the 2008 American Control Conference. Seattle, June 11–13, 2008. New York: IEEE Press, 2008. 4727–4732.
13. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
14. Бормотин К.С. Обратные задачи оптимального управления в теории ползучести // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. **15**, № 2. 33–42.
15. Бормотин К.С., Олейников А.И. Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // Прикладная механика и техническая физика, 2012. № 5. 136–146.
16. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.
17. Баничук Н.В., Петров В.М., Черноусько Ф.Л. Алгоритм и вопросы сходимости метода локальных вариаций для задач с частными производными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. **13**, № 1. 47–58.
18. Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 346–365.
19. Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикладная математика и техническая физика. 2010. **51**, № 4. 155–165.
20. Тарануха Н.А., Чижиков С.Д. Численное моделирование падения на воду тела с гофрированным днищем // Прикладная механика и техническая физика. 2001. **42**, № 4. 112–118.
21. Тарануха Н.А., Лейзерович Г.С. О влиянии начальных отклонений от идеальной круговой формы цилиндрических оболочек на собственные изгибные колебания // Прикладная механика и техническая физика. 2001. **42**, № 2. 180–187.

Поступила в редакцию  
21.02.2014

---

## A Numerical Method for Solving Inverse Forming Problems in the Creep Mode

K. S. Bormotin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Komsomol'sk-na-Amure State Technical University, Faculty of Aircraft Construction; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; Associate Professor, e-mail: cvmi@knastu.ru*

Received February 21, 2014

**Abstract:** The inverse quasi-static problems of the creep theory is formulated in the form of optimum control. A number of optimum laws of deformation in creep are proposed on the basis of the minimization damage criterion in the functionals of inverse problems. When solving inverse forming problems by an iterative method, a continuous optimum loading function dependent on two parameters is used. A method for finding

the parameters according to the given initial conditions is also proposed and implemented numerically. At each step of the iterative method, the solving procedure is based on a finite element method in the framework of the MSC.Marc software system. A comparative analysis of numerical results is given in the case of plate bending for various modes of loading.

**Keywords:** inverse problems of creep theory, damage, variational principles, problems of multicriteria optimization, optimal control, finite element method.

### References

1. R. Hill, "On Uniqueness and Stability in the Theory of Finite Elastic Strain," *J. Mech. Phys. Solids* **5** (4), 229–241 (1957).
2. K. S. Bormotin, "An Iterative Method for the Solution of Inverse Forming Problems under Creep Conditions," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 141–148 (2013).
3. K. S. Bormotin, "Iterative Method for Solving Geometrically Nonlinear Inverse Problems of Structural Element Shaping," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (12), 2091–2099 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (12), 1908–1915 (2013)].
4. K. S. Bormotin and V. S. Logvina, "A Method of Iterative Regularization for Solving Inverse Problems of Forming Structural Components," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 77–84 (2014).
5. I. Yu. Tsvlodub, "On Optimal Deformation under Creeping Conditions: Some Applications to the Problems of Plastic Working of Materials," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, No. 6, 128–136 (1987).
6. I. Yu. Tsvlodub, *A Stability Postulate and Its Applications in the Theory of Creep for Metallic Materials* (Hydrodynamics Inst., Novosibirsk, 1991) [in Russian].
7. V. P. Radchenko and Yu. A. Eremin, *Rheological Deformation and Failure of Materials and Structural Elements* (Mashinostroenie, Moscow, 2004) [in Russian].
8. B. V. Gorev, V. V. Rubanov, and O. V. Sosnin, "Creep of Materials with Different Properties in Tension and Compression," *Probl. Prochnosti*, No. 7, 62–67 (1979) [*Strength Mater.* **11** (7), 735–740 (1979)].
9. N. V. Banichuk, *Introduction to Structure Optimization* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
10. G. P. Liu, J. B. Yang, and J. F. Whidborne, *Multiobjective Optimisation and Control* (Research Studies Press, Baldock, 2003).
11. K. C. Tan, E. F. Khor, and T. H. Lee, *Multiobjective Evolutionary Algorithms and Applications* (Springer, London, 2005).
12. A. Gambier, "MPC and PID Control Based on Multi-Objective Optimization," in *Proc. 2008 American Control Conf., Seattle, June 11–13, 2008* (IEEE Press, New York, 2008), 4727–4732.
13. S. N. Korobeinikov, *Nonlinear Deformation of Solids* (Izd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
14. K. S. Bormotin, "Inverse Problems of Optimal Control in Creep Theory," *Sib. Zh. Ind. Mat.* **15** (2), 33–42 (2012) [*J. Appl. Industr. Math.* **6** (4), 421–430 (2012)].
15. K. S. Bormotin and A. I. Oleinikov, "Variational Principles and Optimal Solutions of the Inverse Problems of Creep Bending of Plates," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **53** (5), 136–146 (2012) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **53** (5), 751–760 (2012)].
16. F. L. Chernous'ko and N. V. Banichuk, *Variational Problems of Mechanics and Control* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
17. N. V. Banichuk, V. M. Petrov, and F. L. Chernous'ko, "An Algorithm and Problems of the Convergence of the Method of Local Variations for Problems with Partial Derivatives," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **13** (1), 47–58 (1973) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **13** (1), 59–72 (1973)].
18. S. N. Korobeinikov, A. I. Oleinikov, B. V. Gorev, and K. S. Bormotin, "Mathematical Simulation of Creep Processes in Metal Patterns Made of Materials with Different Extension–Compression Properties," *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 346–365 (2008).
19. B. D. Annin, A. I. Oleinikov, and K. S. Bormotin, "Modeling of Forming of Wing Panels of the SSJ-100 Aircraft," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **51** (4), 155–165 (2010) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **51** (4), 579–589 (2010)].
20. N. A. Taranukha and S. D. Chizhiumov, "Numerical Simulation of the Fall of a Body with a Corrugated Bottom on Water," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **42** (4), 112–118 (2001) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **42** (4), 659–664 (2001)].
21. N. A. Taranukha and G. S. Leizerovich, "Effect of Initial Imperfections on the Flexural Eigenvibrations of Cylindrical Shells," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **42** (2), 180–187 (2001) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **42** (2), 345–351 (2001)].