

УДК 521.13

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЗАМЕН ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ О ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ЧАСТЬ I

Н. Ю. Сабурова¹

Рассматривается применение асимптотического метода последовательных канонических замен переменных в задаче о поступательно-вращательном движении двух твердых тел. Разработана процедура построения первого приближения к точному решению системы дифференциальных уравнений, моделирующих рассматриваемую задачу.

Ключевые слова: каноническое преобразование, малый параметр, поступательно-вращательное движение, твердые тела.

1. Введение. Метод построения условно-периодических решений канонических систем дифференциальных уравнений (метод последовательных канонических замен переменных) изложен в работах [4, 5]. Указанный метод применялся для исследования поступательно-вращательного движения твердых тел в рамках спутниковых вариантов задачи двух твердых тел [6, 7]. В силу сложности дифференциальных уравнений, описывающих поступательно-вращательное движение двух твердых тел, исследователи оставляли в уравнениях лишь несколько первых членов разложения силовой функции задачи в тот или иной ряд.

В данной работе используется представление силовой функции в виде бесконечного ряда, для того чтобы можно было в дальнейшем получать решения с любой степенью точности. Кроме того, в упомянутых работах в качестве малого параметра выбиралась величина, характеризующая отличие исследуемых тел от сфер и отношение линейных размеров тел к расстоянию между ними. Однако известно, что размеры тел системы Земля–Луна, системы Плутона и его спутника Харона (был открыт в 1978 г.), некоторых двойных астероидов сравнимы с расстоянием между ними. Для указанных систем такой выбор малого параметра является малоэффективным. В предлагаемой работе разработан новый подход к выбору малого параметра, который позволил исследовать новый класс задач о поступательно-вращательном движении двух твердых тел.

2. Постановка задачи. Рассмотрим классическую задачу о поступательно-вращательном движении двух абсолютно твердых тел M_1 и M_2 , элементарные части которых взаимно притягиваются по закону Ньютона. При этом предполагается, что тела имеют произвольную внешнюю форму и внутреннее строение и не имеют общих частей. Пусть O_j — центр инерции тела M_j , m_j — его масса, I_{1j} , I_{2j} , I_{3j} — главные центральные моменты инерции ($j = 1, 2$).

Введем в рассмотрение систему координат $O_1x_1x_2x_3$ с началом в центре инерции тела M_1 , оси сохраняют некоторое неизменное направление в пространстве. Для описания движения тел выберем канонические переменные Делоне–Андуайе $L, G, H, l, g, h, L_j, G_j, H_j, l_j, g_j, h_j$ ($j = 1, 2$) [2].

Для удобства записи дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения двух твердых тел [3] в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ представим в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{00}(\mathbf{p}_0) + H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (2)$$

где

$$H_{00}(\mathbf{p}_0) = \frac{\nu^2 \eta^3}{2L^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left[\frac{G_j^2}{I_{1j}} + \frac{I_{1j} - I_{3j}}{I_{1j}I_{3j}} L_j^2 \right],$$

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{I_{2i}} - \frac{1}{I_{1i}} \right) G_i^2 \sin^2 J_i \cos^2 l_i + \left(U - f \frac{m_1 m_2}{r} \right),$$

¹ Архангельский государственный технический университет, строительный факультет, наб. Северной Двины, 17, 163007, г. Архангельск; e-mail: primat@agtu.ru

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}^*), & \mathbf{q} &= (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}^*), \\ \mathbf{p}_0 &= (L, L_1, L_2, G_1, G_2), & \mathbf{q}_0 &= (l, l_1, l_2, g_1, g_2), \\ \mathbf{p}^* &= (G, H, H_1, H_2), & \mathbf{q}^* &= (g, h, h_1, h_2), \\ \nu &= f(m_1 + m_2), & \eta &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, & \cos J_j &= \frac{L_j}{G_j} \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

f — гравитационная постоянная, r — расстояние между центрами инерции тел, U — силовая функция взаимодействия двух твердых тел [2]:

$$U = f \int_{(M_1)} \int_{(M_2)} \frac{dm_1 dm_2}{\Delta},$$

Δ — расстояние между элементарными массами dm_1 и dm_2 , а интегрирование проводится по всему объему тел M_1 и M_2 .

Функции H_{00} и H_1 принято называть “невозмущенной” и “возмущающей” частями гамильтониана F соответственно.

Для получения явного вида возмущающей функции H_1 воспользуемся разложением силовой функции взаимодействия двух твердых тел в ряд Фурье, приведенным в работе [9]:

$$\begin{aligned} U &= f m_1 m_2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^j \sum_{k'=0}^n \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{a^{n+j+1}} \left[\Gamma_{jmnk'}^{CC} C_{jm}^{(1)} C_{nk'}^{(2)} + \Gamma_{jmnk'}^{SS} S_{jm}^{(1)} S_{nk'}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{jmnk'}^{SC} S_{jm}^{(1)} C_{nk'}^{(2)} + \Gamma_{jmnk'}^{CS} C_{jm}^{(1)} S_{nk'}^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где r_{0j} — некоторый параметр, связанный с телом M_j ($j = 1, 2$) и имеющий единицы длины; $C_{nk}^{(j)}$, $S_{nk}^{(j)}$ — постоянные Стокса для тела M_j ($j = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n$) [1], для реальных небесных тел постоянные Стокса вычисляются по спутниковым наблюдениям;

$$\begin{aligned} \Gamma_{jmnk'}^{CC} &= 2k_{jmnk'} \operatorname{Re} [Z_{jnmk'} + (-1)^m Z_{jn,-mk'}], \\ \Gamma_{jmnk'}^{SS} &= 2k_{jmnk'} \operatorname{Re} [-Z_{jnmk'} + (-1)^m Z_{jn,-mk'}], \\ \Gamma_{jmnk'}^{SC} &= 2k_{jmnk'} \operatorname{Im} [Z_{jnmk'} - (-1)^m Z_{jn,-mk'}], \\ \Gamma_{jmnk'}^{CS} &= 2k_{jmnk'} \operatorname{Im} [Z_{jnmk'} + (-1)^m Z_{jn,-mk'}], \end{aligned} \quad (4)$$

здесь Re и Im означают действительную и мнимую части функции;

$$k_{jmnk'} = (-1)^{m+k'} \pi \left[\frac{(j+m)!(n+k')!}{(2j+1)(j-m)!(2n+1)(n-k')!} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Z_{jnmk'} &= \sum_{p=0}^{n+j} \sum_{k=-n}^n \sum_{m'=-j}^j \sum_{m''=-j}^j \sum_{k'=-n}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{-n-j-1, j+n-2p}(e) \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+k'+m'+m+j}}{2^{j+n} p!(j+n-p)!} \times \\ &\quad \times \left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!(2j+1)(2n+1)}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!} \right]^{1/2} \times \\ &\quad \times \Delta_{j+n-2p, m'+k}^{(j+n)}(I) \Delta_{m'', -m'}^{(j)}(I_1) \Delta_{-m, m''}^{(j)}(J_1) \Delta_{k'', -k}^{(n)}(I_2) \Delta_{-k', k''}^{(n)}(J_2) \times \\ &\quad \times \exp i [m'' g_1 - m' h_1 - m l_1 + k'' g_2 - k h_2 - k' l_2 + q l + (j+n-2p)g + \\ &\quad + (m'+k)h + \frac{\pi}{2} (j+n-k'-m)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{m'm}^{(j)}(\vartheta) &= \sum_{\varkappa=\max(0, m-m')}^{\min(j-m', j+m)} (-1)^{\varkappa} \frac{[(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{1/2}}{(j-m'-\varkappa)!(j+m-\varkappa)!\varkappa!(\varkappa+m'-m)!} \times \\ &\quad \times \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \right)^{2j+m-m'-2\varkappa} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{2\varkappa+m'-m}, \quad m, m' = -j, -j+1, \dots, 0, 1, \dots, j; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \cos I &= \frac{H}{G}, \quad \cos I_s = \frac{H_s}{G_s}, \quad \cos J_s = \frac{L_s}{G_s} \quad (s = 1, 2), \\ a &= \frac{L^2}{\eta^2 \nu}, \quad e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2}; \end{aligned} \quad (8)$$

$X_q^{n,s}(e)$ — коэффициенты Ганзена [2].

Поставим задачу: используя асимптотический метод последовательных канонических замен переменных, построить первое приближение к точному решению системы уравнений (1) с гамильтонианом (2).

3. Выбор малого параметра. Допустим, что в искомом решении переменные I, I_j, J_j ограничены сверху некоторыми значениями $\hat{I}, \hat{I}_j, \hat{J}_j$ ($j = 1, 2$) соответственно.

Введем малый параметр по формуле

$$\mu = \max \left\{ \left| \sin \frac{\hat{J}_j}{2} \right|, \left| \sin \frac{\hat{I}_j}{2} \right| \quad (j = 1, 2); \left| \sin \frac{\hat{I}}{2} \right|, SP, D \right\}. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} SP &= \max \left\{ |S_{nk}^{(i)}|, |C_{nk}^{(i)}|, k = 1, 2, 3, \dots, n; n = 2, 3, 4, \dots, \bar{n}; i = 1, 2 \right\}, \\ D &= \max \left\{ |\tilde{U}_n^{(D)}|, n = 3, 5, 7, \dots, 2 \left[\frac{\bar{n}}{2} \right] + 1 \right\}, \end{aligned}$$

\bar{n} — некоторое заданное натуральное число, определяющее порядок, до которого будут учитываться гармоники в разложении силовой функции задачи U , квадратные скобки означают целую часть числа,

$$\tilde{U}_n^{(D)} = \frac{U_n^{(D)}}{(r_{01} + r_{02})^{n-1}},$$

где $U_n^{(D)}$ — коэффициенты разложения силовой функции в случае Дубошина (случай Дубошина — это случай плоского движения двух осесимметричных тел, оси вращения которых во все время движения остаются перпендикулярными плоскости орбиты) [8]:

$$U^{(D)} = f m_1 m_2 \sum_{\substack{n=1 \\ (\text{неч.})}}^{\infty} \frac{U_n^{(D)}}{r^n} = f m_1 m_2 \sum_{\substack{j=0 \\ (j+n-\text{чет.})}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{r^{n+j+1}} \frac{(-1)^{n+(n+j)/2}}{2^{n+j} n! j!} \left[\frac{(n+j)!}{\left(\frac{n+j}{2}\right)!} \right]^2,$$

откуда нетрудно получить несколько первых коэффициентов:

$$\begin{aligned} U_1^{(D)} &= 1, \\ U_3^{(D)} &= -\frac{1}{2} \left(r_{01}^2 C_{20}^{(1)} + r_{02}^2 C_{20}^{(2)} \right), \\ U_5^{(D)} &= \frac{3}{8} \left(r_{01}^4 C_{40}^{(1)} + r_{02}^4 C_{40}^{(2)} \right) + \frac{9}{4} r_{01}^2 r_{02}^2 C_{20}^{(1)} C_{20}^{(2)}, \\ U_7^{(D)} &= -\frac{5}{16} \left(r_{01}^6 C_{60}^{(1)} + r_{02}^6 C_{60}^{(2)} \right) - \frac{75}{16} \left(r_{01}^4 r_{02}^2 C_{40}^{(1)} C_{20}^{(2)} + r_{01}^2 r_{02}^4 C_{20}^{(1)} C_{40}^{(2)} \right) + \frac{25}{4} r_{01}^3 r_{02}^3 C_{30}^{(1)} C_{30}^{(2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, малый параметр характеризует отличие рассматриваемых движений и параметров тел от частного случая кеплеровского движения двух осесимметричных тел в случае Дубошина.

Нетрудно показать, что при выборе малого параметра в виде (9) первое слагаемое в функции H_1

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{I_{2i}} - \frac{1}{I_{1i}} \right) G_i^2 \sin^2 J_i \cos^2 l_i$$

имеет третий (или более высокий) порядок малости относительно μ , т.е.

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = O(\mu^3) + \left(U - f \frac{m_1 m_2}{r} \right). \quad (11)$$

Второе слагаемое в (11) содержит члены любых порядков малости, начиная с первого. Тогда, учитывая разложение (3)–(6), функцию H_1 можно представить в следующем виде:

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{\|\mathbf{k}\| \geq 0} \{ a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \cos(\mathbf{k}_0 \mathbf{q}_0 + \mathbf{k}^* \mathbf{q}^*) + b_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{q}_0 + \mathbf{k}^* \mathbf{q}^*) \} + O(\mu^3), \quad (12)$$

где через \mathbf{k} обозначен вектор с целочисленными компонентами k_1, k_2, \dots, k_9 :

$$\begin{aligned} k_1 &= q, & k_4 &= m'', & k_7 &= m' + k, \\ k_2 &= -m, & k_5 &= k'', & k_8 &= -m', \\ k_3 &= -k', & k_6 &= j + n - 2p, & k_9 &= -k, \end{aligned}$$

в котором выделены две векторные составляющие

$$\mathbf{k}_0 = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5), \quad \mathbf{k}^* = (k_6, k_7, k_8, k_9),$$

$\|\mathbf{k}\|$ — норма вектора \mathbf{k} , определяемая формулой $\|\mathbf{k}\| = \sum_{\nu=1}^n |k_\nu|$; $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$, $b_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ — некоторые функции переменных \mathbf{p} , явный вид которых может быть найден с использованием разложения (3)–(6).

4. Исключение короткопериодической части гамильтониана. Представим функцию H_1 в следующем виде:

$$H_1 = \bar{H}_1 + H_1^{sp} + RH_1,$$

где функция \bar{H}_1 будет содержать вековые и долгопериодические члены первого порядка малости относительно малого параметра μ ; функция H_1^{sp} — короткопериодические члены первого порядка; функция RH_1 будет содержать вековые и периодические члены второго и более высоких порядков малости. Таким образом,

$$\bar{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \sum'_{\|\mathbf{k}_0\|=0} \{a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \cos \mathbf{k}^* \mathbf{q}^* + b_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \sin \mathbf{k}^* \mathbf{q}^*\}; \quad (13)$$

$$H_1^{sp}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum'_{\|\mathbf{k}_0\|>0} \{a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \cos (\mathbf{k}_0 \mathbf{q}_0 + \mathbf{k}^* \mathbf{q}^*) + b_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \sin (\mathbf{k}_0 \mathbf{q}_0 + \mathbf{k}^* \mathbf{q}^*)\}. \quad (14)$$

Штрих при сумме в выражениях (13) и (14) означает, что в них включены члены первого порядка малости относительно малого параметра μ .

Явный вид функции \bar{H}_1 согласно формуле (13) можно получить, если в разложении (12) функции H_1 в ряд Фурье положить все компоненты вектора \mathbf{k}_0 равными нулю, т.е. $q = m = k' = m'' = k'' = 0$.

Тогда, учитывая формулы (3)–(6), находим

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) &= f m_1 m_2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{a^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \sum_{p=0}^{n+j} \sum_{k=-n}^n \sum_{m'=-j}^j X_0^{-n-j-1, j+n-2p}(e) \frac{(-1)^{k+m'+j}}{2^{j+n} p!(j+n-p)!} \times \\ &\times \left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \Delta_{j+n-2p, m'+k}^{(j+n)}(I) \Delta_{0, -m'}^{(j)}(I_1) \Delta_{0,0}^{(j)}(J_1) \Delta_{0, -k}^{(n)}(I_2) \Delta_{0,0}^{(n)}(J_2) \times \\ &\times \cos \left(-m'h_1 - kh_2 + (j+n-2p)g + (m'+k)h + \frac{\pi}{2}(j+n) \right), \end{aligned}$$

где переменные a, e, I, I_j, J_j ($j = 1, 2$) связаны с переменными \mathbf{p} формулами (8). Штрих при сумме $\sum'_{j=0}^{\infty}$ означает, что исключаются слагаемые, для которых $j = n = 0$.

Согласно общей идее метода построения условно-периодических решений канонических систем дифференциальных уравнений следует ввести такую каноническую замену переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, чтобы в новых переменных возмущающая часть H_1 гамильтониана H приняла форму

$$H_1 = \bar{H}_1 + RH_2,$$

т.е. чтобы в новых переменных короткопериодическая часть H_1^{sp} обратилась в нуль. Это, вообще говоря, может быть достигнуто канонической заменой переменных

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{P} = (P_1, \dots, P_9), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_9),$$

определяемой формулами

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}, \quad (15)$$

где производящая функция $S(\mathbf{P}, \mathbf{q})$ определяется из уравнения

$$\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \mathbf{P}}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right) + H_1^{sp}(\mathbf{P}, \mathbf{q}) = 0, \quad (16)$$

$$H_0^{(1)} = H_{00}(\mathbf{P}_0) + \bar{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*), \quad \mathbf{P}_0 = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5).$$

Одно из решений уравнения (16) имеет вид

$$S(\mathbf{P}, \mathbf{q}) = \sum'_{\|\mathbf{k}_0\| > 0} \{ S'_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*) \sin \mathbf{k}\mathbf{q} + S''_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*) \cos \mathbf{k}\mathbf{q} \},$$

$$S'_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*) = -\frac{a_{\mathbf{k}}(\mathbf{P})}{\left(\mathbf{k}_0, \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \mathbf{P}_0} \right)}, \quad S''_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}^*) = \frac{b_{\mathbf{k}}(\mathbf{P})}{\left(\mathbf{k}_0, \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \mathbf{P}_0} \right)}.$$

Через $\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \mathbf{P}_0}$ обозначен вектор с компонентами $\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_s}$ ($s = 1, 2, 3, 4, 5$).

Уравнения движения (1) в новых переменных (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) снова будут иметь канонический вид

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad (17)$$

где

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = H_{00}(\mathbf{P}_0) + \bar{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*) + RH_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q}^* = (Q_6, Q_7, Q_8, Q_9), \quad (18)$$

$$H_{00}(\mathbf{P}_0) = \frac{\nu^2 \eta^3}{2P_1^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{P_4^2}{I_{11}} + \frac{I_{11} - I_{31}}{I_{11}I_{31}} P_2^2 + \frac{P_5^2}{I_{12}} + \frac{I_{12} - I_{32}}{I_{12}I_{32}} P_3^2 \right), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*) = & f m_1 m_2 \sum'_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar{a}^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \sum_{p=0}^{n+j} \sum_{k=-n}^n \sum_{m'=-j}^j X_0^{-n-j-1, j+n-2p}(\bar{e}) \frac{(-1)^{k+m'+j}}{2^{j+n} p! (j+n-p)!} \times \\ & \times \left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!} \right]^{1/2} \times \\ & \times \Delta_{j+n-2p, m'+k}^{(j+n)}(\bar{I}) \Delta_{0, -m'}^{(j)}(\bar{I}_1) \Delta_{0,0}^{(j)}(\bar{J}_1) \Delta_{0, -k}^{(n)}(\bar{I}_2) \Delta_{0,0}^{(n)}(\bar{J}_2) \times \\ & \times \cos \left(-m' Q_8 - k Q_9 + (j+n-2p) Q_6 + (m'+k) Q_7 + \frac{\pi}{2} (j+n) \right), \\ & \cos \bar{I} = \frac{P_7}{P_6}, \cos \bar{I}_1 = \frac{P_8}{P_4}, \cos \bar{I}_2 = \frac{P_9}{P_5}, \cos \bar{J}_1 = \frac{P_2}{P_4}, \cos \bar{J}_2 = \frac{P_3}{P_5}, \\ & \bar{a} = \frac{P_1^2}{\eta^2 \nu}, \quad \bar{e}^2 = 1 - \frac{P_6^2}{P_1^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$RH_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = O(\mu^2).$$

Таким образом, в результате замены $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ по формулам (15) система уравнений (1) с гамильтонианом (2) преобразуется в систему уравнений (17) с гамильтонианом (18), в котором с точностью до членов $O(\mu^2)$ отсутствует короткопериодическая часть H_1^{sp} .

5. Необходимые и достаточные условия существования стационарных движений. Пренебрежем в гамильтониане (18) членом $RH_2 = O(\mu^2)$. В результате получим приближенную систему уравнений, соответствующую точной системе уравнений (17):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_0 = 0, \quad \dot{\mathbf{Q}}_0 = -\frac{\partial H_{00}}{\partial \mathbf{P}_0} - \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \mathbf{P}_0}, \\ \dot{\mathbf{P}}^* = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \mathbf{Q}^*}, \quad \dot{\mathbf{Q}}^* = -\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \mathbf{P}^*}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}^*), & \mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}^*), \\ \mathbf{P}_0 &= (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5), & \mathbf{Q}_0 &= (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5), \\ \mathbf{P}^* &= (P_6, P_7, P_8, P_9), & \mathbf{Q}^* &= (Q_6, Q_7, Q_8, Q_9). \end{aligned}$$

Будем искать стационарные решения осредненной системы уравнений (21). Под стационарными решениями понимаются такие решения, для которых все позиционные переменные \mathbf{P} и медленные угловые переменные \mathbf{Q}^* являются постоянными, а быстрые угловые переменные \mathbf{Q}_0 являются линейными функциями времени.

Стационарные решения системы уравнений (21) ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} P_i &= P_{i0} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \\ Q_j &= Q_{j0} = \text{const}, \quad j = 6, 7, 8, 9, \\ Q_s &= Q_{s0} + \omega_s t, \quad s = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Здесь ω_s ($s = 1, 2, 3, 4, 5$) — некоторые числа, называемые частотами движения.

Необходимые условия существования стационарных решений (22) системы уравнений (21) имеют вид

$$\dot{P}_s = 0 \equiv 0, \quad (23)$$

$$\dot{P}_j = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial Q_j} \equiv 0, \quad (24)$$

$$\dot{Q}_s = -\frac{\partial H_{00}}{\partial P_s} - \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial P_s} \equiv \omega_s, \quad (25)$$

$$\dot{Q}_j = -\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial P_j} \equiv 0, \quad (26)$$

$j = 6, 7, 8, 9; s = 1, 2, 3, 4, 5.$

Уравнения (23) удовлетворяются тождественно.

Нетрудно убедиться, что если угловые переменные Q_6, Q_7, Q_8 и Q_9 удовлетворяют условиям

$$Q_7 - Q_8 = \pi z_1, \quad Q_7 - Q_9 = \pi z_2, \quad Q_6 = \frac{\pi}{2} + \pi z_3, \quad (27)$$

где z_1, z_2, z_3 — целые числа, то уравнения (24) будут также удовлетворяться тождественно.

Уравнения (26) с учетом формул (20) можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{e}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}} = 0, \\ \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

($\sin \bar{I} \neq 0, \sin \bar{I}_j \neq 0$ ($j = 1, 2$)), \bar{H}_1 определяется формулой

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*) &= f m_1 m_2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar{a}^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \times \\ &\times \sum_{p=0}^{n+j} \sum_{k=-n}^n \sum_{m'=-j}^j X_0^{-n-j-1, j+n-2p}(\bar{e}) (-1)^{m' z_1 + k z_2 + (j+n-2p) z_3 + j+n-p} \times \\ &\times \left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \frac{(-1)^{k+m'+j}}{2^{j+n} p!(j+n-p)!} \Delta_{j+n-2p, m'+k}^{(j+n)}(\bar{I}) \Delta_{0, -m'}^{(j)}(\bar{I}_1) \Delta_{0,0}^{(j)}(\bar{J}_1) \Delta_{0,-k}^{(n)}(\bar{I}_2) \Delta_{0,0}^{(n)}(\bar{J}_2). \end{aligned}$$

Исходя из явного вида (7) функций $\Delta_{m,m'}^{(j)}(\vartheta)$, нетрудно убедиться, что при выборе малого параметра по формуле (9) функция $\bar{H}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*)$ с точностью до членов порядка μ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 = & f m_1 m_2 \sum_{\substack{j=0 \\ (j+n - \text{нечет})}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{z_2+z_3+\frac{i+n+1}{2}} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar{a}^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \left[\frac{(n+1)!}{(n-1)!} \right]^{1/2} \sin \bar{I}_2 X_0^{-n-j-1,1}(\bar{e}) A_{jn \frac{i+n-1}{2} 10} + \\ & + f m_1 m_2 \sum_{\substack{j=1 \\ (j+n - \text{нечет})}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{z_1+z_3+\frac{i+n+1}{2}} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar{a}^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \left[\frac{(j+1)!}{(j-1)!} \right]^{1/2} \sin \bar{I}_1 X_0^{-n-j-1,1}(\bar{e}) A_{jn \frac{i+n-1}{2} 01} + \\ & + f m_1 m_2 \sum_{\substack{j=0 \\ (j+n - \text{нечет})}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{z_3+\frac{i+n+1}{2}} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar{a}^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} \left[\frac{(j+n+1)!}{(j+n-1)!} \right]^{1/2} \sin \bar{I} X_0^{-n-j-1,1}(\bar{e}) A_{jn \frac{i+n-1}{2} 00} + \\ & + f m_1 m_2 \sum_{\substack{j=0 \\ (j+n - \text{чет})}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{i+n}{2}} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar{a}^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} X_0^{-n-j-1,0}(\bar{e}) A_{jn \frac{i+n}{2} 00}, \end{aligned}$$

где

$$A_{jnpkm'} = \left[\frac{(2j+2n-2p)!(2p)!(j+n+m'+k)!(j+n-m'-k)!}{(j-m')!(j+m')!(n+k)!(n-k)!} \right]^{1/2} \frac{(-1)^{k+m'+j}}{2^{j+n} p! (j+n-p)!}.$$

Уравнения (28) определяют зависимости между переменными $\bar{a}, \bar{I}, \bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \bar{J}_2$ (а значит, и между позиционными переменными \mathbf{P}) на стационарном решении. Решение системы уравнений (28) зависит от конкретной задачи. Пример решения этой системы будет приведен ниже.

Наконец, рассмотрим группу уравнений (25). Подставляя в эти уравнения найденные значения переменных \mathbf{P} и \mathbf{Q}^* , получим скорости ω_s изменения переменных Q_s ($s = 1, 2, 3, 4, 5$), являющихся быстрыми угловыми переменными отыскиваемого стационарного решения:

$$\omega_s = - \left. \frac{\partial}{\partial P_s} (H_{00} + \bar{H}_1) \right|_{\substack{P_i = P_{i0} \ (i=1,2,\dots,9) \\ Q_j = Q_{j0} \ (j=6,7,8,9)}}.$$

Используя формулы (19) и (20), нетрудно получить следующие выражения для ω_s ($s = 1, 2, 3, 4, 5$):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\sqrt{\nu}}{\bar{a}\sqrt{\bar{a}}} - \frac{1}{\eta\nu} \left[2\sqrt{\bar{a}} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{a}} + \frac{1-\bar{e}^2}{\bar{e}\sqrt{\bar{a}}} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{e}} \right]; \\ \omega_2 &= \frac{I_{11} - I_{31}}{I_{11} I_{31}} \bar{G}_1 \cos \bar{J}_1 + \frac{1}{\bar{G}_1 \sin \bar{J}_1} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{J}_1}; \\ \omega_3 &= \frac{I_{12} - I_{32}}{I_{12} I_{32}} \bar{G}_2 \cos \bar{J}_2 + \frac{1}{\bar{G}_2 \sin \bar{J}_2} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{J}_2}; \\ \omega_4 &= \frac{\bar{G}_1}{I_{11}} - \frac{1}{\bar{G}_1} \left[\text{ctg } \bar{I}_1 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}_1} + \text{ctg } \bar{J}_1 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{J}_1} \right]; \\ \omega_5 &= \frac{\bar{G}_2}{I_{12}} - \frac{1}{\bar{G}_2} \left[\text{ctg } \bar{I}_2 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}_2} + \text{ctg } \bar{J}_2 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{J}_2} \right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Таким образом, найдены стационарные решения

$$\left. \begin{aligned} P_i &= P_{i0} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \\ Q_j &= Q_{j0} = \text{const}, \quad j = 6, 7, 8, 9, \\ Q_s &= Q_{s0} + \omega_s t, \quad s = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \right\}$$

системы уравнений (21).

Полученное приближенное решение системы уравнений (17), т.е. решение в переменных \mathbf{P}, \mathbf{Q} , можно рассматривать как приближенное решение исходной системы уравнений (1) в переменных \mathbf{p}, \mathbf{q} . Чем меньше величина μ , тем ближе вычисленное решение к точному, поскольку $|\mathbf{P} - \mathbf{p}| \sim S$ и $|\mathbf{Q} - \mathbf{q}| \sim S$, а $S \sim \mu$.

Найденные семейства стационарных решений в задаче о поступательно-вращательном движении двух твердых тел представляют значительный практический и теоретический интерес. Они составляют основу — промежуточные решения (орбиты) — аналитических теорий движения небесных тел. При этом указанные промежуточные решения являются решениями нового типа, учитывающими уже в первом приближении возмущающие члены.

В дальнейшем предполагается использовать найденные семейства стационарных решений в задаче о поступательно-вращательном движении двух твердых тел для построения в их окрестности условно-периодических решений рассматриваемой задачи.

6. Пример стационарного решения. Построим стационарные решения для конкретной системы двух твердых тел. В Солнечной системе случай Дубошина реализуется (приближенно) для спутника Атлас планеты Сатурн и для спутника Сатурна Телесто. Данные о телах Солнечной системы можно найти на информационном сайте отдела небесной механики ГАИШ МГУ [10].

Приведем некоторые параметры системы Сатурн–Атлас. Угловая скорость орбитального движения Атласа равна его угловой скорости вращения и составляет $598,306^\circ/\text{сут}$. Угловая скорость вращения Сатурна равна $810,794^\circ/\text{сут}$. Экваториальный радиус Сатурна — 60628 км, полярный — 54364 км. Средний экваториальный радиус Атласа равен 17,9 км, его полярный радиус — 7,5 км. Отклонения экватора спутника от круга составляет 1,2 км (экватор слегка вытянут в направлении Сатурна). Радиус орбиты Атласа — 137700 км.

Масса Сатурна, умноженная на гравитационную постоянную, равна $37931200,0 \text{ км}^3/\text{с}^2$; масса Атласа, умноженная на гравитационную постоянную, составляет $0,00072 \text{ км}^3/\text{с}^2$. Стоксовы постоянные Сатурна

$$C_{20} = -0,016298; \quad C_{30} = 0; \quad C_{40} = 0,000915; \quad C_{50} = 0; \quad C_{60} = -0,000103. \quad (30)$$

Относительно гравитационного поля Атласа ничего не известно.

В качестве параметров исследуемых тел примем следующие величины: за r_{01} и r_{02} примем экваториальный радиус Сатурна и средний экваториальный радиус Атласа соответственно; за массы тел m_1 и m_2 примем массы Сатурна и Атласа соответственно; за стоксовы постоянные $C_{n0}^{(1)}$ ($n = 2, 3, 4, 5, 6$) тела M_1 примем стоксовы постоянные Сатурна (30).

Выберем единицы измерения длины, массы и времени таким образом, чтобы $f m_1$, $r_{01} + r_{02}$ и масса второго тела m_2 были равны единице ($f \tilde{m}_1 = \tilde{r}_{01} + \tilde{r}_{02} = \tilde{m}_2 = 1$). Переходим к безразмерным величинам

$$\tilde{r}_{01} = 0,999705; \quad \tilde{m}_1 = 5268222222; \quad \tilde{r}_{02} = 0,000295, \quad \tilde{m}_2 = 1 \quad (31)$$

(тильда означает безразмерную величину).

Согласно изложенной выше теории выражения $|\tilde{U}_m^{(D)}|$ ($m = 3, 5, 7, \dots$), где $\tilde{U}_m^{(D)}$ — безразмерные коэффициенты в разложении силовой функции в случае Дубошина, должны быть малыми величинами. Допустим, что

$$\tilde{U}_3^{(D)} = -0,0001; \quad \tilde{U}_5^{(D)} = \tilde{U}_7^{(D)} = \dots = \tilde{U}_{13}^{(D)} = 0,0001. \quad (32)$$

Выражения коэффициентов $U_m^{(D)}$ ($m = 3, 5, 7$) через стоксовы постоянные имеют вид (10).

Выразим произведения $C_{n0}^{(2)} r_{02}^n$ из выражений (10) и перейдем к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} C_{20}^{(2)} \tilde{r}_{02}^2 &= -2\tilde{U}_3^{(D)} - \tilde{r}_{01}^2 C_{20}^{(1)}, \\ C_{40}^{(2)} \tilde{r}_{02}^4 &= \frac{8}{3} \left[\tilde{U}_5^{(D)} - \frac{9}{4} \tilde{r}_{01}^2 \tilde{r}_{02}^2 C_{20}^{(1)} C_{20}^{(2)} \right] - \tilde{r}_{01}^4 C_{40}^{(1)}, \\ C_{60}^{(2)} \tilde{r}_{02}^6 &= -\frac{16}{5} \left[\tilde{U}_7^{(D)} + \frac{75}{16} \left\{ \tilde{r}_{01}^4 \tilde{r}_{02}^2 C_{40}^{(1)} C_{20}^{(2)} + \tilde{r}_{01}^2 \tilde{r}_{02}^4 C_{20}^{(1)} C_{40}^{(2)} \right\} - \frac{25}{4} \tilde{r}_{01}^3 \tilde{r}_{02}^3 C_{30}^{(1)} C_{30}^{(2)} \right] - \tilde{r}_{01}^6 C_{60}^{(1)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя (30), (31) и (32) в (33), находим

$$C_{20}^{(2)} \tilde{r}_{02}^2 \approx 0,016488; \quad C_{40}^{(2)} \tilde{r}_{02}^4 \approx 0,000964; \quad C_{60}^{(2)} \tilde{r}_{02}^6 \approx -0,000208.$$

Выпишем значения произведений $C_{n0}^{(1)} \tilde{r}_{01}^n$ ($n = 2, 4, 6$) для первого тела:

$$C_{20}^{(1)} \tilde{r}_{01}^2 \approx -0,016288; \quad C_{40}^{(1)} \tilde{r}_{01}^4 \approx 0,000914; \quad C_{60}^{(1)} \tilde{r}_{01}^6 \approx -0,000103.$$

Так как на стоксовы постоянные $C_{30}^{(2)}$ и $C_{50}^{(2)}$ не накладывается никаких ограничений, они могут принимать любые значения. Положим $C_{30}^{(2)} = C_{50}^{(2)} = 0$. Стоксовы постоянные $C_{n0}^{(i)}$ ($i = 1, 2; n \geq 7$) также положим

равными нулю. Кроме того, примем за момент инерции I_{3i} тела M_i ($i = 1, 2$) следующую величину (момент инерции однородного сфероида с полуосью r_{0i} относительно оси симметрии):

$$I_{3i} = \frac{2}{5} r_{0i}^2 m_i.$$

Таким образом,

$$\tilde{I}_{31} = 21060449290; \quad \tilde{I}_{32} = 3,4846 \cdot 10^{-8}.$$

Для осесимметричного тела имеем [1]:

$$C_{20}^{(i)} = \frac{1}{m_i r_{0i}^2} (I_{1i} - I_{3i}),$$

откуда находим

$$I_{1i} = m_i r_{0i}^2 C_{20}^{(i)} + I_{3i},$$

и, таким образом,

$$\tilde{I}_{11} = 20202341280; \quad \tilde{I}_{12} = 0,01649.$$

Нахождение стационарных решений будем проводить в следующем порядке.

1) Выбираем одну из многочисленных комбинаций угловых переменных Q_6, Q_7, Q_8, Q_9 , удовлетворяющих уравнениям (27), например,

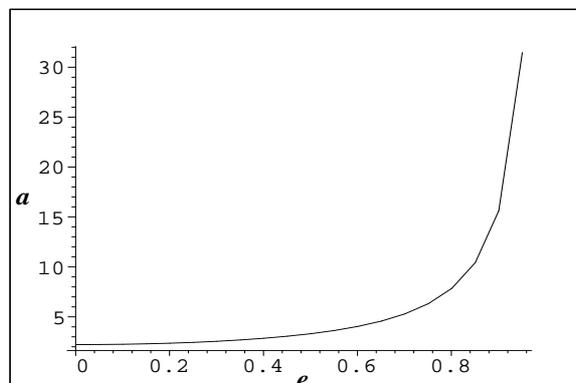
$$Q_6 = \frac{\pi}{2}; \quad Q_7 = Q_8 = Q_9 = 0.$$

2) Стационарные значения позиционных переменных $\bar{e}, \bar{a}, \bar{I}, \bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \bar{J}_2$ нужно выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли системе уравнений (28). Можно показать, что три последние уравнения системы (28) для рассматриваемой задачи удовлетворяются тождественно, а первое уравнение примет вид

$$\sum_{\substack{j=0 \\ (j+n-\text{чет})}}^6 \sum_{n=0}^6 (-1)^{\frac{j+n}{2}} \frac{r_{01}^j r_{02}^n}{\bar{a}^{n+j+1}} C_{j0}^{(1)} C_{n0}^{(2)} A_{jn \frac{n+j}{2} 00} \frac{dX_0^{-n-j-1,0}(\bar{e})}{d\bar{e}} = 0. \quad (34)$$

Так как переменные $\bar{I}, \bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \bar{J}_2$ не входят в это уравнение, то на стационарном решении они могут принимать любые ненулевые (порядка μ) значения, например

$$\bar{I} = 0,0001, \quad \bar{I}_1 = 0,0001, \quad \bar{I}_2 = 0,0001, \quad \bar{J}_1 = 0,0001, \quad \bar{J}_2 = 0,0001.$$



Зависимость a от e на стационарном решении

Уравнение (34) решалось численно на ЭВМ. Его решение представлено на рисунке в виде кривой $f(\bar{e}, \bar{a}) = 0$. В качестве большой полуоси орбиты на стационарном решении выберем радиус орбиты Атласа

$\bar{a} = 2,2705574$ и по выбранному значению \bar{a} находим соответствующее значение эксцентриситета \bar{e} по кривой $f(\bar{e}, \bar{a})$: $\bar{e} = 0,122000$.

3) В качестве стационарного значения \bar{G}_i вектора кинетического момента вращательного движения возьмем величину $\tilde{w}_i \tilde{I}_{3i}$ ($i = 1, 2$), где w_1 и w_2 — угловые скорости вращения Сатурна и Атласа соответственно. Таким образом,

$$\bar{G}_1 = \tilde{w}_1 \tilde{I}_{31} = 48885987,78; \quad \bar{G}_2 = \tilde{w}_2 \tilde{I}_{32} = 1,33060.$$

4) В качестве начальных значений Q_{s0} угловых переменных Q_s ($s = 1, 2, 3, 4, 5$) примем $Q_{s0} = 0$ и вычислим скорости их изменения ω_s по формулам (29):

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \frac{\sqrt{\nu}}{\bar{a}\sqrt{\bar{a}}} - \frac{2\sqrt{\bar{a}}}{\eta\nu} \cdot \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{a}} \approx 0,2922283183; & \tilde{\omega}_2 &= \frac{\tilde{I}_{11} - \tilde{I}_{31}}{\tilde{I}_{11}\tilde{I}_{31}} \bar{G}_1 \cos \bar{J}_1 \approx 2964869013; \\ \tilde{\omega}_3 &= \frac{\tilde{I}_{12} - \tilde{I}_{32}}{\tilde{I}_{12}\tilde{I}_{32}} \bar{G}_2 \cos \bar{J}_2 \approx 38184047,06; & \tilde{\omega}_4 &= \frac{\bar{G}_1}{\tilde{I}_{11}} = -0,056970; & \tilde{\omega}_5 &= \frac{\bar{G}_2}{\tilde{I}_{12}} \approx 80,698826. \end{aligned}$$

Таким образом, для рассматриваемого случая найдено стационарное решение, определяемое формулами

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 2,2705574; & \bar{e} &= 0,122000; & \bar{I} &= 0,0001; \\ \bar{I}_1 &= 0,0001; & \bar{I}_2 &= 0,0001; & \bar{G}_1 &= 48885987,78; \\ \bar{G}_2 &= 1,33060; & \bar{J}_1 &= 0,0001; & \bar{J}_2 &= 0,0001; \\ Q_1 &= 0,2922283183 \tau; & Q_2 &= 2964869013 \tau; & Q_3 &= 38184047,06 \tau; \\ Q_4 &= -0,056970 \tau; & Q_5 &= 80,698826 \tau; & Q_6 &= \pi/2; \\ Q_7 &= 0; & Q_8 &= 0; & Q_9 &= 0, \end{aligned}$$

τ — безразмерное время (за единицу времени принята величина, равная 0,028 сут).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
2. Абалкин В.Л., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
3. Баркин Ю.В. Уравнения поступательно-вращательного движения небесных тел в оскулирующих элементах // Астрон. журн. 1977. **54**, № 2. 413–424.
4. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971.
5. Журавлев С.Г. Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. Т. 1. Орбитальное движение. Архангельск: Солти, 2000.
6. Журавлев С.Г., Зленко А.А. О стационарных решениях в задаче о поступательно-вращательном движении трехосного спутника трехосной планеты // Астрон. журн. 1983. **60**, № 2. 367–374.
7. Зленко А.А. О стационарных решениях в задаче о поступательно-вращательном движении осесимметричного спутника трехосной планеты // Космич. исслед. 1981. **19**, № 5. 688–694.
8. Сабурова Н.Ю. Об одном представлении разложения силовой функции взаимного притяжения двух абсолютно твердых тел // Тр. каф. прикл. матем. Вып. 1. Архангельск: Солти, 2001. 23–68.
9. Sidlichovsky M. The elimination of the short periodic perturbations in the problem of two finite bodies // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1981. **32**, № 3. 159–167.
9. Информационный сайт отдела небесной механики ГАИШ МГУ (<http://lnfm1.sai.msu.ru/neb>).

Поступила в редакцию
04.02.2003