УДК 519.6

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СХОДЯЩИЙСЯ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГОУГОЛЬНИКАХ

И. О. Арушанян[1]

Рассматриваются граничное интегральное уравнение теории потенциала в случае внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа и система граничных интегральных уравнений первой краевой задачи плоской теории упругости в областях с конечным числом угловых точек. Приведены оценки производных ядер и решений указанных типов интегральных уравнений на кривых, являющихся границами односвязных многоугольников, и построен численный метод решения, основанный на использовании одного и того же семейства составных квадратурных формул. Доказана экспоненциальная скорость сходимости метода относительно числа узлов применяемой квадратурной формулы.

Ключевые слова: потенциал двойного слоя, граничные интегральные уравнения, угловые точки, сгущающиеся сетки, метод квадратур, задача Дирихле, оператор Лапласа, теория потенциала, плоская теория упругости.

1. Введение. Одним из методов численного решения эллиптических краевых задач в областях сложной формы является метод граничных интегральных уравнений. Граничные интегральные уравнения можно условно разбить на два класса [10, 12]: прямые, в которых неизвестными являются функции, имеющие смысл в содержательной постановке задачи, и непрямые (более известные как интегральные уравнения теории потенциала), представляющие собой уравнения относительно вспомогательных функций, по которым решение исходной задачи находится интегрированием.

При численном решении граничных интегральных уравнений как классическим методом квадратур, так и методом граничных элементов приходится решать системы линейных уравнений с несимметричными заполненными матрицами. Для экономии вычислительных затрат можно применить два способа. Первый состоит в выборе узлов квадратуры или граничных элементов таким образом, чтобы матрица аппроксимирующей системы имела вид, позволяющий либо быстро решить систему прямыми методами, либо построить эффективно сходящийся к решению итерационный процесс. Второй способ, являющийся предметом изучения в настоящей статье, состоит в уменьшении размерности системы за счет повышения точности аппроксимации. Если граница области содержит угловые точки, то задача построения аппроксимирующей линейной системы существенно усложняется, так как соответствующие интегральные уравнения становятся слабо сингулярными.

На таких областях для некоторых типов прямых граничных интегральных уравнений за счет специального выбора граничных элементов можно обеспечить экспоненциальную относительно числа степеней свободы скорость сходимости [13]. При численном решении интегральных уравнений теории потенциала второго рода более простым в практической реализации, чем метод граничных элементов, является метод квадратур. Стандартный подход в этом случае состоит в построении составной квадратурной формулы, элементарные отрезки которой сгущаются к угловым точкам. На каждом элементарном отрезке используется формула с одинаковым числом узлов. Этот метод обеспечивает алгебраический порядок точности относительно числа узлов [14–20]. Известно, что если граница области и граничные условия являются аналитическими, то метод, основанный на использовании составной формулы средних прямоугольников, имеет экспоненциальную скорость сходимости [6]. В этой связи возникает вопрос о возможности численного решения интегральных уравнений теории потенциала методом квадратур с экспоненциальной точностью в случае, когда граница области имеет угловые точки.

Этот результат может быть достигнут, если аппроксимация интегралов в граничных уравнениях производится с использованием составных квадратурных формул Гаусса, в которых элементарные отрезки сгущаются к угловым точкам контура, а число узлов элементарных формул меняется при приближении к углам. Такой подход позволяет получить экспоненциальную скорость сходимости относительно числа

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; доцент, e-mail: i.arushan@gmail.com

узлов. Соответствующий численный метод предложен в [1–3, 5] для решения граничных интегральных уравнений теории потенциала.

В настоящей статье интегральное уравнение задачи Дирихле для оператора Лапласа и система интегральных уравнений плоской теории упругости аппроксимируются системами линейных алгебраических уравнений с использованием одного и того же семейства составных квадратурных формул, построенных в [4] для специального класса функций со слабой особенностью; при этом достигается экспоненциальная относительно числа узлов скорость сходимости.

2. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей Γ, являющейся замкнутой кривой без самопересечений и допускающей следующее параметрическое представление:

$$\Gamma = \Big\{ x = x(s) = \big(x_1(s), x_2(s)\big), \quad s \in [0, T], \quad x(0) = x(T) \Big\}.$$

Здесь s — натуральный параметр (параметр длины).

В дальнейшем будем считать, что

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{J-1} \Gamma_j,$$

где Γ_j — прямолинейный отрезок, соединяющий угловые точки P_j и P_{j+1} (полагаем $P_0 = P_J$). Обозначим через α_j величину внутреннего угла при вершине P_j, при этом $0 < \alpha_j < 2\pi$ для любого j.

Свяжем с угловыми точками P_j набор чисел $\{s_j\}$, $j = 0, \ldots, J$, так, что

$$x(s_j) = P_j, \quad j = 0, \ldots, J,$$

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{J-1} < s_J = T.$$

В ранее введенной области Ω рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} &\Delta u_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega, \\ &u_0(x) = F_0(x), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

и первую краевую задачу теории упругости:

$$\begin{aligned} &\mu \Delta \overrightarrow{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \overrightarrow{u} = 0, \quad x \in \Omega, \\ &\overrightarrow{u} = \overrightarrow{F}, \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)^T$ — неизвестная вектор-функция, λ, μ — постоянные Ламе и $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2)^T$.

В дальнейшем будем считать, что функции F_i, $i = 0, 1, 2$, являются непрерывными бесконечно дифференцируемыми функциями всюду на Γ, кроме, может быть, угловых точек, где допускаются особенности вида

$$(x - P_j)^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{3}$$

Решение задачи (1) будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \Phi_0(y) \, \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |x - y| \, dl_y$$

с неизвестной плотностью распределения Φ_0, которая является решением граничного интегрального уравнения

$$\Phi_0(x) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \Phi_0(y) \, \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |x - y| \, dl_y = 2F_0(x), \quad x \in \Gamma \backslash \bigcup_{j=0}^{J-1} P_j. \tag{4}$$

Решение задачи (2) будем искать в виде плоского потенциала двойного слоя

$$\overrightarrow{u} = \int\limits_{\Gamma} \big(T_\chi(\partial_y, \overrightarrow{n}) \, \Gamma(y - x) \big) \, \overrightarrow{\Phi}_\chi(y) \, dl_y,$$

где $\Gamma(y - x)$ — фундаментальное решение задачи (2), представляющее собой матрицу с элементами

$$\Gamma_{ij}(y - x) = \frac{\lambda + 3\mu}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\delta_i^j \ln |x - y| - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \, \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \right),$$

а через $T_\chi(\partial_y, \overrightarrow{n})$ обозначен обобщенный оператор напряжения:

$$\big(T_\chi(\partial_y, \overrightarrow{n})\big)_{ij} = \mu\delta_i^j \frac{\partial}{\partial n_y} + (\lambda+\mu)\, n_i(y)\, \frac{\partial}{\partial y_j} + \chi\left(n_j(y)\,\frac{\partial}{\partial y_i} - n_i(y)\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right). \tag{5}$$

Здесь $i, j = 1, 2$ и δ_i^j — символ Кронекера.

Тогда компоненты неизвестной вектор-функции $\overrightarrow{\Phi}_\chi$ являются решением следующей системы интегральных уравнений:

$$\overrightarrow{\Phi}_\chi(x) + \int\limits_\Gamma \big(T_\chi(\partial_y, \overrightarrow{n})\,\Gamma(y-x)\big)\,\overrightarrow{\Phi}_\chi(y)\,dl_y = 2\overrightarrow{F}(x). \tag{6}$$

В случае $\chi = \mu$ оператор (5) является классическим оператором напряжения. Если

$$\chi = \chi_0 = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu},$$

то оператор $T_{\chi_0}(\partial_y, \overrightarrow{n})$ называют оператором псевдонапряжения (см., например, [10, 11]).

При всех значениях $\chi \neq \chi_0$ уравнения (6) даже для областей с гладкими границами являются сингулярными, так как их ядра содержат компоненты вида

$$\frac{\partial}{\partial s_y} \ln|x-y|,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial s_y}$ — касательная производная к кривой Γ в точке y.

В дальнейшем будем рассматривать только случай $\chi = \chi_0$, когда указанные сингулярные компоненты пропадают.

Обозначим

$$T_{\chi_0}(\partial_y, \overrightarrow{n}) \equiv T(\partial_y, \overrightarrow{n}), \quad \overrightarrow{\Phi}_{\chi_0} \equiv \overrightarrow{\Phi}.$$

Перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с численным решением граничного интегрального уравнения (4) и системы граничных интегральных уравнений

$$\overrightarrow{\Phi}(x) + \int\limits_\Gamma \big(T(\partial_y, \overrightarrow{n})\,\Gamma(y-x)\big)\overrightarrow{\Phi}(y)\,dl_y = 2\overrightarrow{F}(x). \tag{7}$$

3. Метод квадратур. Используя введенную выше параметризацию кривой Γ, обозначим

$$\varphi_k(s) = \Phi_k\big(x(s)\big), \quad f_k(s) = 2F_k\big(x(s)\big), \quad k = 0, 1, 2.$$

Пусть t — внутренняя точка отрезка $[s_j, s_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, J-1$. Определим функции $K(s,t)$ и $M(s,t)$ по формулам

$$K(s,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{x_1'(t)\big(x_2(s)-x_2(t)\big) - x_2'(t)\big(x_1(s)-x_1(t)\big)}{\big(x_1(s)-x_1(t)\big)^2 + \big(x_2(s)-x_2(t)\big)^2}, & t \neq s, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t)}{\big(x_1'(t)\big)^2 + \big(x_2'(t)\big)^2}, & t = s, \end{cases}$$

$$M_{k,l}(s,t) = \begin{cases} K(s,t)\left(a\delta_k^l + b\,\dfrac{\big(x_k(s)-x_k(t)\big)\big(x_l(s)-x_l(t)\big)}{\big(x_1(s)-x_1(t)\big)^2 + \big(x_2(s)-x_2(t)\big)^2}\right), & t \neq s, \\[2ex] K(t,t)\left(a\delta_k^l + b\,\dfrac{x_k'(t)x_k'(t)}{\big(x_1'(t)\big)^2 + \big(x_2'(t)\big)^2}\right), & t = s. \end{cases}$$

Здесь

$$a = \frac{2\mu}{\lambda+3\mu}, \quad b = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}, \quad k, l = 1, 2.$$

Из геометрических свойств потенциала двойного слоя следует, что при $s \in [0,T] \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{J} s_j$ выполнены соотношения

$$\int\limits_0^T K(s,t)\, dt = 1, \quad \int\limits_0^T M(s,t)\, dt = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (4) и (7) могут быть записаны в эквивалентной форме

$$2\varphi_0(s) + \int\limits_0^T K(s,t)\big(\varphi_0(t) - \varphi_0(s)\big)\, dt = f_0(s), \quad s \in [0,T], \tag{8}$$

и

$$\begin{gathered} 2\overrightarrow{\varphi}(s) + \int\limits_0^T M(s,t)\big(\overrightarrow{\varphi}(t) - \overrightarrow{\varphi}(s)\big)\, dt = \overrightarrow{f}(s), \\ \overrightarrow{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^T, \quad \overrightarrow{f} = (f_1, f_2)^T, \quad s \in [0,T]. \end{gathered} \tag{9}$$

Основное преимущество такого подхода состоит в повышении гладкости подынтегральных функций вблизи угловых точек кривой Γ.

Известно [9, 10], что для любых непрерывных T-периодических функций f_k, $k = 0,1,2$, уравнения (8) и (9) однозначно разрешимы в пространствах непрерывных T-периодических функций и вектор-функций соответственно.

Приближенные решения уравнения (8) и системы (9) будем строить по общей принципиальной схеме. Пусть $\{n_k\}$ — некоторая возрастающая бесконечная натуральная последовательность. Будем считать, что для каждого $n = n_k$ построена квадратурная формула

$$\int\limits_0^T g(t)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} g(t_j^{(n)}) \equiv S_n(g).$$

Перепишем уравнения (8) и (9) в операторном виде

$$\varphi_0 + K\varphi_0 = f_0, \quad \overrightarrow{\varphi} + M\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{f},$$

где через K и M обозначены линейные ограниченные операторы

$$(Kv_0)(s) = v_0(s) + \int\limits_0^T K(s,t)\big(v_0(t) - v_0(s)\big)\, dt,$$

$$(M\overrightarrow{v})(s) = \overrightarrow{v}(s) + \int\limits_0^T M(s,t)\big(\overrightarrow{v}(t) - \overrightarrow{v}(s)\big)\, dt,$$

определенные на пространствах T-периодических непрерывных функций и вектор-функций соответственно.

Введенное семейство квадратурных формул позволяет рассмотреть следующие линейные ограниченные операторы:

$$(K_n v_0)(s) = v_0(s) + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)}\, K(s, t_j^{(n)})\big(v_0(t_j^{(n)}) - v_0(s)\big),$$

$$(M_n \overrightarrow{v})(s) = \overrightarrow{v}(s) + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)}\, M(s, t_j^{(n)})\big(\overrightarrow{v}(t_j^{(n)}) - \overrightarrow{v}(s)\big).$$

Пусть функция $\varphi_0^{(n)}$ является решением линейного уравнения

$$\varphi_0^{(n)}(s) + K_n\varphi_0^{(n)}(s) = f_0(s), \quad s \in [0,T]. \tag{10}$$

Поиск решения уравнения (10) может быть сведен к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$2\Phi_{0,i}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)}\, K\big(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}\big)\Big(\Phi_{0,j}^{(n)} - \Phi_{0,i}^{(n)}\Big) = f_0(t_i^{(n)}). \tag{11}$$

Действительно, величины $\Phi_{0,i}^{(n)} = \varphi_0^{(n)}(t_i^{(n)})$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют системе (11) для любого решения $\varphi_0^{(n)}$ уравнения (10). Обратно, если набор $\Phi_{0,i}^{(n)}$, $n = 1, \ldots, n$, является решением системы (11), то функция

$$\varphi_0^{(n)}(s) = \Big(f_0(s) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\big(s, t_j^{(n)}\big)\Phi_{0,j}^{(n)}\Big)\Big(2 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\big(s, t_j^{(n)}\big)\Big)^{-1} \tag{12}$$

удовлетворяет уравнению (10).

Похожая связь существует между решением линейного уравнения

$$\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(s) + M_n \overrightarrow{\varphi}^{(n)}(s) = \overrightarrow{f}(s), \quad \overrightarrow{\varphi}^{(n)} = \big(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}\big), \quad s \in [0, T], \tag{13}$$

и системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2\Phi_{1,i}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} \Big(\sum_{m=1}^{2} M_{1,m}(t_i^{(n)}, t_j^{(n)})\Big)\Big(\Phi_{m,j}^{(n)} - \Phi_{m,i}^{(n)}\Big) = f_1(t_i^{(n)}),\\ 2\Phi_{2,i}^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} \Big(\sum_{m=1}^{2} M_{2,m}(t_i^{(n)}, t_j^{(n)})\Big)\Big(\Phi_{m,j}^{(n)} - \Phi_{m,i}^{(n)}\Big) = f_2(t_i^{(n)}). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $i = 1, \ldots, n$. Компоненты вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}^{(n)}$ могут быть при каждом $s \in [0, T]$ определены как решение следующей системы двух линейных уравнений

$$\Big(2 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} M_{1,1}(s, t_j^{(n)})\Big)\varphi_1^{(n)}(s) - \Big(\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} M_{1,2}(s, t_j^{(n)})\Big)\varphi_2^{(n)}(s) =$$

$$= f_1(s) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} \Big(\sum_{m=1}^{2} M_{1,m}(s, t_j^{(n)})\Phi_{m,j}^{(n)}\Big),$$

$$-\Big(\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} M_{2,1}(s, t_j^{(n)})\Big)\varphi_1^{(n)}(s) + \Big(2 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} M_{2,2}(s, t_j^{(n)})\Big)\varphi_2^{(n)}(s) =$$

$$= f_2(s) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} \Big(\sum_{m=1}^{2} M_{2,m}(s, t_j^{(n)})\Phi_{m,j}^{(n)}\Big).$$

Разрешимость этой системы и осуществимость представления (12) исследованы в работах [1, 3].

4. Построение специальной квадратурной формулы. Описанный выше подход к построению приближенных решений интегральных уравнений может быть реализован на основе общего для обеих рассматриваемых задач семейства составных квадратурных формул. В дальнейшем будем использовать следующий результат, полученный в работе [4].

Рассмотрим задачу вычисления интеграла

$$\int_0^1 g(t)\, dt,$$

где функция $g(t)$ определена на $(0, 1]$ и при некотором $0 < \rho < 1$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right| \leqslant \mathrm{const}\, \frac{(n+1)!}{(\rho t)^{n-\beta+1}}. \tag{15}$$

Здесь $t \in (0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 < \beta < 1$.

Утверждение 1. *Если функция g удовлетворяет условиям* (15)*, то существует натуральное число N_0, такое, что для любого натурального числа $N > N_0$ может быть построена квадратурная формула*

$$\overline{S}_N(g) = \sum_{i=1}^{n} \overline{A}_i^{(N)} g(t_i^{(N)})$$

с $n = n(N)$ узлами, такая, что

$$\left| \int_0^1 g(t)dt - \overline{S}_N(g) \right| \leqslant b \exp(-c\sqrt{n}),$$

где $c_1 N^2 \leqslant n \leqslant c_2 N^2$, а постоянные b, c, c_1 и c_2 строго положительны и не зависят от выбора N.

5. Асимптотика решений граничных интегральных уравнений вблизи угловых точек. Для построения квадратурных формул с высоким порядком точности необходима информация о поведении решений интегральных уравнений (8) и (9) вблизи угловых точек контура.

В дальнейшем будем считать, что функции $f_k,\ k = 1, 2$, бесконечно дифференцируемы в любой точке $s \in (s_j, s_{j+1}),\ j = 1, \ldots, J-1$, и при некотором $0 < \gamma < 1$ справедлива оценка

$$\left| \frac{d^n f_k(s)}{ds^n} \right| \leqslant \mathrm{const} \left(\sum_{i=0}^{1} \frac{n!}{\left| x(s) - x(s_{j+i}) \right|^{n-\gamma}} \right).$$

Для каждого $j = 0, \ldots, J$ введем в рассмотрение числа $\beta_{ij},\ i = 0, 1, 2$, такие, что

$$\beta_{0j} = \pi \bigl(\pi + |\pi - \alpha_j|\bigr)^{-1},$$

а число $\beta_{1j} = \beta_{2j}$ является корнем уравнения

$$\left(\left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \sin \beta \bigl(\pi + |\pi - \alpha_j|\bigr) \right)^2 = \Bigl(\beta \sin \bigl(\pi + |\pi - \alpha_j|\bigr) \Bigr)^2$$

с наименьшей положительной вещественной частью. Заметим, что все β_{ij} лежат на интервале $(0.5, 1)$.

Тогда справедлив результат, состоящий в следующем [3, 7, 8]. Рассмотрим набор чисел $\lambda = \{\lambda_{ij}\},\ i = 0, 1, 2,\ j = 0, 1, \ldots, J$, таких, что $0 < \lambda_{ij} < \beta_{ij}$. Тогда существует постоянная $c(\Gamma, f_0, f_1, f_2, \lambda)$, зависящая только от вида кривой Γ, функций f_k, $k = 0, 1, 2$, и набора чисел λ, такая, что для решений уравнений (8) и (9) при каждом $s \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\bigl| \varphi_i(s) - \varphi_i(s_j) \bigr| \leqslant c(\Gamma, f_0, f_1, f_2, \lambda) \left| x(s) - x(s_j) \right|^{\lambda_{ij}}.$$

6. Оценка производных. В дальнейшем для оценки производных подынтегральных выражений в уравнениях (8) и (9) нам потребуется явный вид производных любого порядка функций $K(s,t)$ и $M(s,t)$ по каждой из переменных.

Рассмотрим участок границы между угловыми точками P_j и P_{j+1}. Без ограничения общности будем считать параметризацию кривой Γ такой, что при $s \in [s_j, s_{j+1}]$ будем иметь

$$x_1(s) = s - s_j, \quad x_2(s) = 0.$$

Отметим, что если s и t лежат на одном отрезке $[s_j, s_{j+1}]$, то $K(s,t) = 0$. Пусть $t \in (s_j, s_{j+1}),\ s \notin [s_j, s_{j+1}]$. Тогда

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{x_2(s)}{\bigl((t - s_j) - x_1(s)\bigr)^2 + \bigl(x_2(s)\bigr)^2},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} K(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^m\ m!\ \sin\Bigl((m+1) \operatorname{arcctg} \frac{(t-s_j) - x_1(s)}{x_2(s)}\Bigr)}{\Bigl(\bigl((t - s_j) - x_1(s)\bigr)^2 + \bigl(x_2(s)\bigr)^2\Bigr)^{\frac{m+1}{2}}}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $s \in (s_j, s_{j+1}),\ t \in [s_{j-1}, s_j)$. Получим

$$x_1(t) = (s_j - t) \cos \alpha_j, \quad x_2(t) = (s_j - t) \sin \alpha_j,$$

$$K(s,t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{(s-s_j)\ \sin\alpha_j}{\Big((s-s_j)-(s_j-t)\cos\alpha_j\Big)^2+\Big((s_j-t)\sin\alpha_j\Big)^2},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}K(s,t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^m\ m!\ \left(\sin\!\Big(\alpha_j+(m+1)\operatorname{arcctg}\frac{(s-s_j)-(s_j-t)\cos\alpha_j}{(s_j-t)\sin\alpha_j}\Big)\right)}{\left(\Big((s-s_j)-(s_j-t)\cos\alpha_j\Big)^2+\Big((s_j-t)\sin\alpha_j\Big)^2\right)^{\frac{m+1}{2}}},\quad m=1,2,\ldots.$$

Оценим теперь производные решения $\varphi_0(s)$ уравнения (8) на $(s_j,\, s_{j+1/2}]$. Для любой точки $s\in(s_j,\, s_{j+1/2}]$ имеем

$$\varphi_0(s)=-\int\limits_0^T K(s,t)\big(\varphi_0(t)-\varphi_0(s_j)\big)\,dt-\varphi_0(s_j)+f(s).$$

Продифференцируем правую часть этого равенства m раз по s. Поскольку все функции, стоящие в правой части, дифференцируемы, то существуют и соответствующие производные функции $\varphi(s)$:

$$\frac{d^m\varphi_0(s)}{ds^m}=-\int\limits_0^T\Big(\frac{\partial^m}{\partial s^m}K(s,t)\Big)\big(\varphi_0(t)-\varphi_0(s_j)\big)\,dt+\frac{d^mf(s)}{ds^m}.$$

Учитывая свойства функции f, а также используя явные формулы для производных ядра $K(s,t)$, получим при каждом $\lambda\in\big(0,\,\min\big\{\gamma,\,\beta_{0j}\big\}\big)$ оценку

$$\left|\frac{d^m\varphi_0(s)}{ds^m}\right|\leqslant\text{const}\,\frac{m!}{\Big(d_j\big|x(s)-x(s_j)\big|\Big)^{m-\lambda}},\quad m=1,2,\ldots,$$

$$d_j=\begin{cases}\sqrt{1-\cos\alpha_j}, & \alpha_j\in(0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi)\,,\\ 1, & \alpha_j\in[\pi/2,\pi)\cup(\pi,3\pi/2]\,.\end{cases}$$

Тогда производные функции $K(s,t)\big(\varphi_0(t)-\varphi_0(s)\big)$, стоящей под интегралом в уравнении (8), на интервале $(s_j,s_{j+1/2}]$ удовлетворяют условиям (15), причем можно положить

$$\rho=d_j,\quad \beta=\lambda.$$

Перейдем к оценке производных решения уравнения (9). Функция $M(s,t)$ является комбинацией функций

$$K_{k,l}(s,t)=\frac{\big(x_k(s)-x_k(t)\big)\big(x_l(s)-x_l(t)\big)}{\big(x_1(s)-x_1(t)\big)^2+\big(x_2(s)-x_2(t)\big)^2},\quad k,l=1,2,$$

и функции $K(s,t)$ (ядра уравнения (8)). Производные любых порядков функции $K(s,t)$ вычислены выше. Найдем производные функций $K_{k,l}(s,t)$.

Пусть $t\in(s_j,s_{j+1/2}]$ и $s\in[s_j,s_{j+1}]$. Тогда

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Big(K_{11}(s,t)\Big)=\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\frac{\big(x_1(s)-(t-s_j)\big)^2}{\big(x_1(s)-(t-s_j)\big)^2+\big(x_2(s)\big)^2}\right)=$$

$$=\frac{m!(-1)^{m+1}\ x_2(s)\sin\!\Big((m+1)\operatorname{arcctg}\Big(\frac{(t-s_j)-x_1(s)}{x_2(s)}\Big)\Big)}{\Big(\big(x_1(s)-(t-s_j)\big)^2+\big(x_2(s)\big)^2\Big)^{\frac{m+1}{2}}}=-\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Big(K_{22}(s,t)\Big),$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Big(K_{12}(s,t)\Big)=\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\frac{\big(x_1(s)-(t-s_j)\big)x_2(s)}{\big(x_1(s)-(t-s_j)\big)^2+\big(x_2(s)\big)^2}\right)=$$

$$=\frac{m!\ (-1)^{m+1}\ x_2(s)\cos\!\Big((m+1)\operatorname{arcctg}\Big(\frac{(t-s_j)-x_1(s)}{x_2(s)}\Big)\Big)}{\Big(\big(x_1(s)-(t-s_j)\big)^2+\big(x_2(s)\big)^2\Big)^{\frac{m+1}{2}}}=\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Big(K_{21}(s,t)\Big).$$

Кроме того, будем учитывать, что функции $K_{k,l}(s,t)$ симметричны относительно s и t. Повторяя проведенные выше выкладки, получим для решения уравнения (9) следующую оценку, справедливую при $\lambda \in \big(0, \min\big\{\gamma, \beta_{1j}\big\}\big)$ и $m = 1, 2, \ldots$:

$$\left\| \frac{d^m \overrightarrow{\varphi}(s)}{ds^m} \right\|_\infty \leqslant \text{const}\, \frac{(m+1)!}{\big(d_j |x(s) - x(s_j)\big)^{m-\lambda}}.$$

Таким образом, условия (15) выполнены и для решений φ_0 и $\overrightarrow{\varphi}$ уравнений (8) и (9) соответственно справедливо следующее

Утверждение 2. *Если функции f_k, $k = 0, 1, 2$, удовлетворяют условиям* (3), *то существует натуральное число n_1, такое, что для любого натурального $n > n_1$ может быть построена квадратурная формула с узлами $\{t_j^{(n)}\}$ и коэффициентами $\{A_j^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для которой справедливы неравенства*

$$\max_{s\in[0,T]} \left| \int_0^T K(s,t)\big(\varphi_0(t) - \varphi_0(s)\big)\, dt - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} K\big(s, t_j^{(n)}\big)\big(\varphi_0(t_j^{(n)}) - \varphi_0(s)\big) \right| \leqslant b_0 \exp(-c_0\sqrt{n}),$$

$$\max_{s\in[0,T]} \left\| \int_0^T M(s,t)\big(\overrightarrow{\varphi}(t) - \overrightarrow{\varphi}(s)\big)\, dt - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} M\big(s, t_j^{(n)}\big)\big(\overrightarrow{\varphi}(t_j^{(n)}) - \overrightarrow{\varphi}(s)\big) \right\|_\infty \leqslant b_1 \exp(-c_1\sqrt{n}),$$

причем все постоянные строго положительны и не зависят от выбора n.

7. Сходимость метода квадратур. Перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с разрешимостью аппроксимирующих систем линейных алгебраических уравнений (11) и (14). Свойства построенного семейства составных квадратурных формул позволяют использовать результаты из [1, 3] для доказательства равномерной ограниченности последовательностей операторов $(I + K_n)^{-1}$ и $(I + M_n)^{-1}$. Обобщением этих результатов является

Утверждение 3. *Если область Ω отвечает указанным условиям, то существует целое $n_2 > 0$, такое, что для каждого $n \geqslant n_2$ справедливы неравенства*

$$\big\|(I + K_n)^{-1}\big\|_C \leqslant \text{const}_0, \quad \big\|(I + M_n)^{-1}\big\|_C \leqslant \text{const}_1,$$

причем постоянные не зависят от выбора n.

Отсюда следуют существование и единственность решений уравнений (10) и (13). Из уравнений

$$\varphi_0 + K\varphi_0 = f_0, \quad \varphi_0^{(n)} + K_n \varphi_0^{(n)} = f_0$$

получаем

$$(I + K_n)\big(\varphi_0 - \varphi_0^{(n)}\big) = (K_n - K)\varphi_0.$$

Следовательно,

$$\big\|\varphi_0 - \varphi_0^{(n)}\big\|_C = \big\|(I + K_n)^{-1}(K_n - K)\varphi_0\big\|_C \leqslant \text{const}_0\, \big\|(K_n - K)\varphi_0\big\|_C = O\big(\exp(-c_0\sqrt{n})\big)$$

и

$$\big\|\overrightarrow{\varphi} - \overrightarrow{\varphi}^{(n)}\big\|_C \leqslant \text{const}_1 \big\|(M_n - M)\overrightarrow{\varphi}\big\|_C = O\big(\exp(-c_1\sqrt{n})\big).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14–01–00731-а, 13–01–00096-а, 12–01–00960-а и 12–01–00283-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян И.О.* О численном решении граничных интегральных уравнений второго рода в областях с угловыми точками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. **36**, № 6. 101–113.
2. *Арушанян И.О.* Применение метода граничных интегральных уравнений для численного решения задачи Дирихле в областях с угловыми точками // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**. 1–7.
3. *Арушанян И.О.* Применение метода квадратур для решения граничных интегральных уравнений плоской теории упругости на многоугольниках // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**. 142–154.

4. *Арушанян И.О.* Семейство квадратурных формул для численного решения граничных интегральных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 461–467.
5. *Арушанян И.О.* Численное решение граничных интегральных уравнений на криволинейных многоугольниках // Вестник Московского ун-та. Серия 1: Математика и механика. 2014. № 4. 55–57.
6. *Бахвалов Н.С.* Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. **7**, № 5. 1011–1020.
7. *Arushanyan I.O.* An exponentially convergent method for solving boundary integral equations in domains with corner points. Report No. 9628. Nijmegen: Univ. of Nijmegen, 1996.
8. *Заргарян С.С., Мазья В.Г.* Об асимптотике решений интегральных уравнений теории потенциала в окрестности угловых точек контура // Прикл. матем. и механ. 1984. **48**, вып. 1. 169–174.
9. *Мазья В.Г., Соловьев А.А.* Интегральные уравнения теории логарифмического потенциала на контурах с пиком в пространствах Гёльдера // Алгебра и анализ. 1998. **10**, № 5. 85–142.
10. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Т. 27. М.: ВИНИТИ, 1988. 131–228.
11. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977.
12. *Atkinson K.E.* The numerical solution of integral equations of the second kind. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
13. *Babuška I., Guo B.Q., Stephan E.P.* On the exponential convergence of the h–p version for boundary element Galerkin methods on polygons // Math. Meth. Appl. Sci. 1990. **12**, N 5. 413–427.
14. *Bremer J., Rokhlin V.* Efficient discretization of Laplace boundary integral equations on polygonal domains // J. Comput. Phys. 2010. **229**, N 7. 2507–2525.
15. *Chandler G.A.* Superconvergent approximations to the solution of a boundary integral equation on polygonal domains // SIAM J. Numer. Anal. 1986. **23**, N 6. 1214–1229.
16. *Graham I.G., Chandler G.A.* High-order methods for linear functionals of solutions of second kind integral equations // SIAM J. Numer. Anal. 1988. **25**, N 5. 1118–1137.
17. *Helsing J., Ojala R.* Corner singularities for elliptic problems: integral equations, graded meshes, quadrature, and compressed inverse preconditioning // J. Comput. Phys. 2008. **227**, N 20. 8820–8840.
18. *Kong W.Y., Bremer J., Rokhlin V.* An adaptive fast direct solver for boundary integral equations in two dimensions // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2011. **31**, N 3. 346–369.
19. *Kress R.* A Nyström method for boundary integral equations in domains with corners // Numer. Math. 1990/91. **58**, N 1. 145–161.
20. *Kress R.* Linear integral equations. Heidelberg: Springer, 1999.

Поступила в редакцию
11.05.2014

An Exponentially Convergent Method for Solving Boundary Integral Equations on Polygons

I. O. Arushanyan [1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics;
Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: i.arushan@gmail.com*

Received May 11, 2014

Abstract: The boundary integral equation of the potential theory in the case of the inner Dirichlet problem for the Laplace operator and the system of boundary integral equations of the Dirichlet boundary value problem for the two-dimensional theory of elasticity in domains with a finite number of corner points are considered. The derivatives of kernels and solutions to the above integral equations on the boundaries of simply connected polygons are estimated. A numerical method based on the application of one and the same family of composite quadrature formulas is proposed. It is proved that the proposed method is exponentially convergent with respect to the number of the quadrature nodes in use.

Keywords: double-layer potential, boundary integral equations, corner points, condensing grids, quadrature method, Dirichlet problem, Laplace operator, potential theory, two-dimensional theory of elasticity.

References

1. I. O. Arushanyan, “On the Numerical Solution of Boundary Integral Equations of the Second Kind in Domains with Corner Points,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **36** (6), 101–113 (1996) [Comput. Math. Math. Phys. **36** (6), 773–782 (1996)].

2. I. O. Arushanyan, “The Application of the Boundary Integral Equation Method to Numerical Solution of Dirichlet’s Problem in Domains with Corner Points,” Vychisl. Metody Programm. **1**, 1–7 (2000).

3. I. O. Arushanyan, “Application of the Quadrature Method for Solving Boundary Integral Equations of Plane Elasticity Theory on Polygons,” Vychisl. Metody Programm. **4**, 142–154 (2003).

4. I. O. Arushanyan, “A Family of Quadrature Formulas for Solving Boundary Integral Equations,” Vychisl. Metody Programm. **14**, 461–467 (2013).

5. I. O. Arushanyan, “Numerical Solution of Boundary Integral Equations on Curvilinear Polygons,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 4, 55–57 (2014) [Moscow Univ. Math. Bull. **69** (4), 174–176 (2014)].

6. N. S. Bakhvalov, “On the Optimal Speed of Integrating Analytic Functions,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **7** (5), 1011–1020 (1967) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **7** (5), 63–75 (1967)].

7. I. O. Arushanyan, *An Exponentially Convergent Method for Solving Boundary Integral Equations in Domains with Corner Points*, Report No. 9628 (Univ. of Nijmegen, Nijmegen, 1996).

8. S. S. Zargaryan and V. G. Maz’ya, “The Asymptotic Form of the Solutions of the Integral Equations of Potential Theory in the Neighbourhood of the Corner Points of a Contour,” Prikl. Mat. Mekh. **48** (1), 169–174 (1984) [J. Appl. Math. Mech. **48** (1), 120–124 (1984)].

9. V. G. Maz’ya and A. A. Soloviev, “Integral Equations of Logarithmic Potential Theory on Contours with a Cusp in Hölder Spaces,” Algebra Anal. **10** (5), 85–142 (1998) [St. Petersburg Math. J. **10** (5), 791–832 (1999)].

10. V. G. Maz’ya, “Boundary Integral Equations,” in *Analysis-4* (VINITI, Moscow, 1988), Itogi Nauki Tekh., Ser.: Sovr. Probl. Mat. Fundam. Napr., Vol. 27, pp. 131–228.

11. V. Z. Parton and P. I. Perlin, *Integral Equations in Elasticity* (Nauka, Moscow, 1977; Mir, Moscow, 1982).

12. K. E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997).

13. I. Babuška, B. Q. Guo, and E. P. Stephan, “On the Exponential Convergence of the h–p Version for Boundary Element Galerkin Methods on Polygons,” Math. Meth. Appl. Sci. **12** (5), 413–427 (1990).

14. J. Bremer and V. Rokhlin, “Efficient Discretization of Laplace Boundary Integral Equations on Polygonal Domains,” J. Comput. Phys. **229** (7), 2507–2525 (2010).

15. G. A. Chandler, “Superconvergent Approximations to the Solution of a Boundary Integral Equation on Polygonal Domains,” SIAM J. Numer. Anal. **23** (6), 1214–1229 (1986).

16. I. G. Graham and G. A. Chandler, “High-Order Methods for Linear Functionals of Solutions of Second Kind Integral Equations,” SIAM J. Numer. Anal. **25** (5), 1118–1137 (1988).

17. J. Helsing and R. Ojala, “Corner Singularities for Elliptic Problems: Integral Equations, Graded Meshes, Quadrature, and Compressed Inverse Preconditioning,” J. Comput. Phys. **227** (20), 8820–8840 (2008).

18. W. Y. Kong, J. Bremer, and V. Rokhlin, “An Adaptive Fast Direct Solver for Boundary Integral Equations in Two Dimensions,” Appl. Comput. Harmon. Anal. **31** (3), 346–369 (2011).

19. R. Kress, “A Nyström Method for Boundary Integral Equations in Domains with Corners,” Numer. Math. **58** (1), 145–161 (1990/91).

20. R. Kress, *Linear Integral Equations* (Springer, Heidelberg, 1999).