

УДК 550.341

ОБРАЩЕНИЕ ПОЛНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ: SVD АНАЛИЗ

К. Г. Гадыльшин¹, В. А. Чеверда²

Решение обратной динамической задачи сейсмологии в формулировке нелинейного метода наименьших квадратов находится в центре внимания специалистов в области вычислительной геофизики начиная с середины 80-х годов прошлого века. Примерно с этого же времени известна и так называемая проблема реконструкции макроскоростной составляющей, заключающаяся в невозможности определения плавных вариаций скорости распространения сейсмических волн при отсутствии в спектре зарегистрированного сигнала очень низких временных частот или чрезвычайно больших расстояний между источниками и приемниками. В то же время, именно эта составляющая гарантирует корректное отображение в пространстве изучаемых геологических объектов. В последнее время, благодаря существенным успехам в области геофизического приборостроения, стала возможной регистрация значимой сейсмической информации на частотах вплоть до 5 Гц, однако и этого, как правило, оказывается недостаточно для реконструкции макроскоростного строения среды. В настоящей статье анализируются с математической точки зрения причины этой проблемы путем численного анализа сингулярного спектра производной Фреше оператора обратной задачи, переводящего текущее распределение скорости в наблюдаемые волновые поля. На этой основе предложена модификация целевого функционала, обладающая заметно более высокой чувствительностью к изменчивости макроскоростной модели, известная как формулировка MBTT (аббревиатура от английского Migration Based Travel Times).

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, макроскоростное строение среды, обращение полных волновых полей, сингулярное разложение, анализ разрешающей способности.

1. Введение. Впервые метод реконструкции скоростного строения среды по результатам измерения волновых полей, получивший название “метод обращения полного волнового поля”, или Full Waveform Inversion в англоязычной литературе, был предложен в серии работ французских математиков Ги Шавана (Guy Chavent) и Альберта Тарантолы (Albert Tarantola) в конце 70-х–начале 80-х годов прошлого века [11, 23]. При его реализации скорость распространения волн в среде отыскивается как точка минимума целевого функционала, описывающего среднеквадратичное отклонение зарегистрированных данных от рассчитанных для текущей модели среды. В то время массовое внедрение этого подхода виделось магистральным путем развития методов обработки сейсмических данных. Однако весьма быстро было установлено, что для надежной реконструкции этим методом макроскоростной составляющей, отвечающей за времена пробега волн между достаточно удаленными точками внутри среды, необходимо либо наличие в спектре сигнала весьма низких (5 Гц и ниже) временных частот [17, 18], либо чрезмерно больших (до десяти километров и более) расстояний между источниками и приемниками. Такие нереалистичные по тем временам требования привели к заметному охлаждению интереса к развитию данного направления.

Заметим, что некорректно восстановленная макроскоростная модель приводит к существенному искажению, а порой и полному разрушению волнового изображения среды. Поэтому наиболее распространенной сферой использования метода обращения полных волновых полей на какое-то время стало уточнение тонкой структуры изучаемых объектов в предположении, что макроскоростная модель задана. На этой основе в промышленности стал интенсивно развиваться комбинированный подход к обработке сейсмических данных, состоящий из двух этапов:

1) использование кинематической информации (времена пробега волн) и/или стандартных, весьма трудоемких и порой субъективных методов скоростного анализа, для реконструкции макроскоростного строения [25];

¹ Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск; аспирант, e-mail: Gadulshinkg@ipgg.sbras.ru

² Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; зав. отделом, e-mail: CheverdaVA@ipgg.sbras.ru

2) применение методов обращения полных волновых полей для восстановления физических свойств изучаемой среды (как правило, продольных и поперечных импедансов) при заданной макроскоростной модели.

Новая волна интереса к методу полного обращения волновых полей (начало текущего века) была связана со значительными успехами в области геофизического приборостроения и бурным развитием вычислительной техники. Первое обеспечило понижение порога частотного диапазона устойчивого возбуждения и регистрации сейсмических волн до 5 Гц, а порой и ниже. Одновременно с этим появление тера- и петафлопных высокопроизводительных вычислительных систем позволило перейти к созданию программно-алгоритмических комплексов для решения задач обращения полных сейсмических полей применительно к реалистичным трехмерно-неоднородным сейсмогеологическим моделям. Пожалуй, первым убедительным примером успешного применения метода обращения полного волнового поля для реконструкции макроскоростного строения среды стал успех сотрудников факультета геологических наук и инженерной геологии Королевского университета, г. Кингстон, Онтарио, Канада, при обработке “слепого” теста, известного как *VP model* [14]. Именно в этой публикации был предложен и апробирован метод решения обратной задачи путем минимизации целевого функционала, задающего среднее квадратичное отклонение зарегистрированных данных от рассчитанных для текущего значения параметров, в области временных частот, причем не для всего частотного диапазона одновременно, а последовательно, начиная с самой низкой частоты и постепенно продвигаясь ко все более и более высоким. В настоящее время именно такая стратегия является общепринятой при применении метода обращения полных волновых полей для реконструкции макроскоростной составляющей.

Однако, обеспечив возможность привлечения несколько более высоких временных частот, предложенная в [14] стратегия накладывает все еще довольно обременительные ограничения на частотный состав регистрируемых данных. В связи с этим в настоящей работе мы возвращаемся к анализу введенной в середине 90-х годов прошлого века модификации целевой функции, известной как формулировка *МВТТ* (*Migration Based Travel Time*). Ее привлекательной чертой нам представляется изначальное расщепление пространства скоростных моделей на два подпространства — глобальных пропегаторов (плавно меняющаяся скоростная модель, или макроскоростная составляющая) и локальных рефлекторов (резко меняющееся локализованное в пространстве возмущение). Заметим, что в работе [16] были получены весьма обнадеживающие результаты по применению указанного подхода к реконструкции макроскоростной модели, но, к сожалению, по ряду причин эти исследования были остановлены.

Основным инструментом исследования информативности и разрешающей способности в настоящей работе является анализ усеченного сингулярного разложения (далее *SVD*) линейаризованного оператора обратной задачи, детально изученного в работах [1, 15].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся классическая формулировка метода обращения полных волновых полей и формулировка *МВТТ*. Затем, в разделе 3 приводится линейаризованная постановка обратной задачи и излагаются принципы изучения структуры устойчивых подпространств на основе анализа сингулярного разложения соответствующих операторов. Наконец, серия численных экспериментов, подтверждающая преимущество метода *МВТТ* в задаче определения макроскоростного строения среды, описана в разделе 4.

2. Обратная задача и *МВТТ*.

2.1. Стандартная постановка задачи обращения полного волнового поля. Все рассуждения в данной работе проводятся в области временных частот, поэтому волновое поле $U(P; \omega)$ есть комплекснозначная функция положения точки P и частоты ω (см. Приложение). Обратная задача состоит в определении скоростной модели среды по волновому полю, зарегистрированному в конечном наборе точек в \mathbb{R}^2 , которым в реальной жизни соответствуют координаты сейсмоприемников.

Введем в рассмотрение линейный оператор взятия следа полного волнового поля от одного из источников на фиксированной временной частоте в точках, соответствующих расположению приемников:

$$P : U \rightarrow \mathbb{C}^{NR},$$

где NR — количество приемников. Здесь и далее \mathbb{C}^N — пространство комплекснозначных векторов размерности N . Если используется всего NS источников с координатами x_i , то пространство данных для каждого из них на фиксированной частоте ω_j определяется действием следующего оператора, переводящего элемент m из пространства моделей в вектор из пространства $\mathbb{C}^{NR \times NS}$:

$$F_i^j(m) = P \circ \mathcal{F}_{x_i}(m; \omega_j), \quad (1)$$

где $\mathcal{F}_{x_i}(m; \omega_j)$ — оператор прямой задачи, подробно описанный в приложении.

Далее будем пользоваться компактной записью

$$F(m) = \begin{pmatrix} F^1(m) \\ \vdots \\ F^{Nf}(m) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $F^j : M \rightarrow \mathbb{C}^{NS \times NR}$, такой, что:

$$F^j(m) = \begin{pmatrix} F_1^j(m) \\ \vdots \\ F_{NS}^j(m) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Окончательно получаем следующий оператор прямого моделирования: $F : M \rightarrow D$, где пространство данных $D = \mathbb{C}^{Nf \times NS \times NR}$.

Введем теперь функционал невязки

$$E(m) = \frac{1}{2} \|d^{\text{obs}} - F(m)\|_D^2 \tag{4}$$

и сформулируем *стандартную постановку* задачи обращения полного волнового поля — найти модель $m_* \in M$, минимизирующую функционал невязки $m_* = \underset{m}{\operatorname{argmin}} E(m)$.

подавляющее большинство существующих в настоящее время подходов к решению этой задачи основаны на применении методов отыскания точки минимума с использованием локальной минимизации целевого функционала путем вычисления его градиента и/или гессиана [24].

Так как поиск идет локально, велика вероятность остановки процесса в локальном минимуме, весьма далеко расположенном от глобального, соответствующего точному решению обратной задачи. Наиболее ярко наличие локальных минимумов проявляется при неизвестной макроскоростной составляющей, описывающей времена пробега между достаточно удаленными друг от друга точками среды (несколько доминирующих длин волн). Этот эффект известен начиная с середины 80-х годов прошлого века [18] как проблема определения трендовой составляющей. Подчеркнем, что эта проблема не связана с конкретным выбором метода минимизации градиентного/квазиньютонова типа, а именно, используется ли градиент, гессиан или их модификации. Как показывает анализ сингулярного разложения производной оператора прямой задачи [1, 22], проблема связана со структурой целевого функционала (4) и не может быть преодолена без привлечения низких временных частот или/и использованием значительных удалений источника от системы наблюдений.

В то же время, если макроскоростная составляющая известна, то, вообще говоря, обращение полного волнового поля и не требуется, так как миграционные преобразования в истинных амплитудах [9, 13, 21] дают практически полную информацию о строении быстро меняющейся составляющей скоростного строения среды. Заметим, что мы ведем речь о модельной задаче — реконструкции скоростного строения акустической среды с постоянной плотностью.

2.2. Формулировка МВТТ. Определение макроскоростного строения является ключевым элементом метода обращения полного волнового поля. Для успешного решения этой задачи необходима модификация целевого функционала (4), существенно повышающая его чувствительность именно к макроскоростной составляющей. Одна из таких модификаций и рассматривается в настоящей статье. Впервые она была предложена в работе [16]. В ее основе лежит декомпозиция пространства моделей на два подпространства — гладких, плавно изменяющихся *пропагаторов*, обозначаемых далее через p , и резких, быстро изменяющихся *рефлекторов*, обозначаемых через r : $m = p + r$. Напомним, что градиент целевого функционала $E(m)$ в стандартной формулировке представляется следующим образом:

$$\nabla E(m) = -\Re \left(\left(\frac{\delta F}{\delta m} (m) \right)^* \langle d^{\text{obs}} - F(m) \rangle \right). \tag{5}$$

Как показано в работе [19], применение сопряженного оператора эквивалентно выполнению так называемой *глубинной миграции до суммирования*, которая фокусирует отраженные волны, переводя их из временного масштаба в глубинный с использованием текущей скоростной модели m . Накопленный опыт при реализации этой процедуры на практике наглядно показывает, что такая скоростная модель должна

быть гладкой и не порождать отраженных волн. Ее предназначение — “посадить” на место регистрируемые отражения (см., например, [25]). Поэтому представляется естественной следующая модификация градиента (5), для вычисления которого используется уже не полная скоростная модель, а ее гладкая составляющая — пропагатор p :

$$\nabla E(p) = -\Re \left(\left(\frac{\delta F}{\delta m}(p) \right)^* \langle d^{\text{obs}} - F(m) \rangle \right).$$

Такой градиент обеспечит фокусировку отраженных волн с использованием пропагатора и не приведет к возникновению артефактов, связанных с наличием резких границ в скоростной модели, для которой выполняется процедура миграции до суммирования. Однако приведенный градиент не обеспечивает построение корректного *рефлектора* даже для истинного пропагатора, так как не учитывает ряд факторов, влияющих на амплитуду отраженных волн, таких, например, как геометрическое расхождение. В дальнейшем будем считать, что после действия сопряженного оператора дополнительно применяется линейный оператор WM , обеспечивающий компенсацию динамических искажений получаемого рефлектора (см., например, [9, 13, 21]), и в истинных амплитудах рефлектор представляется как действие миграционного преобразования \mathcal{M} , вычисленного в точке p (пропагатор):

$$r = \mathcal{M}(p) \langle d^{\text{obs}} - F(m) \rangle = WM \circ \Re \left(\left(\frac{\delta F}{\delta m}(p) \right)^* \langle d^{\text{obs}} - F(m) \rangle \right). \quad (6)$$

Далее, введем наряду с пространственным рефлектором r временной рефлектор s , полностью им определяемый, а именно, такой, что применение миграционного преобразования к s дает в точности r :

$$r = \mathcal{M}(p) \langle s \rangle = WM \circ \Re \left(\left(\frac{\delta F}{\delta m}(p) \right)^* \langle s \rangle \right). \quad (7)$$

Получаем, что полная скоростная модель представляется в виде $m = p + \mathcal{M}(p) \langle s \rangle$, а соответствующий ей оператор прямой задачи имеет форму $F(p + \mathcal{M}(p) \langle s \rangle)$. Тем самым вводится в рассмотрение следующий модифицированный целевой функционал, который далее будем называть целевым функционалом в формулировке МВТТ:

$$\tilde{E}(p; s) = E(p + \mathcal{M}(p) \langle s \rangle) \equiv \left\| d^{\text{obs}} - F(p + \mathcal{M}(p) \langle s \rangle) \right\|.$$

Напомним, что оператор $\mathcal{M}(p)$ называется оператором миграции, что и дает название “формулировка МВТТ (Migration Based Travel Times)”. *Обращение полного волнового поля в формулировке МВТТ* состоит в построении пропагатора $p^* \in M$ и временного рефлектора $s^* \in D$, минимизирующих функционал невязки МВТТ:

$$(p^*, s^*) = \underset{p, s}{\operatorname{argmin}} \tilde{E}(p; s).$$

Заметим, что когда пропагатор и временной рефлектор найдены, пространственный рефлектор находится путем применения миграционного преобразования (7).

3. Линеаризованная постановка и сингулярное разложение.

3.1. Линеаризация оператора прямой задачи. Обратная динамическая задача с использованием введенного в разделе 2 оператора прямой задачи сводится к нелинейному операторному уравнению: $d^{\text{obs}} = F(m_{\text{true}})$. Для отыскания его решения можно, в частности, использовать метод Ньютона и его различные модификации. При этом искомая модель m_{true} строится как предел последовательности решений следующих линейных операторных уравнений (см., например, [6]):

$$\frac{\delta F}{\delta m}(m_k) \langle m_{k+1} - m_k \rangle = d^{\text{obs}} - F(m_k). \quad (8)$$

Как показано в работе [1], итерационный процесс (8) дает и точку минимума целевого функционала в стандартной постановке (4). Таким образом, при достаточно хорошем априорном приближении m_0 к точной модели m_{true} исходная нелинейная задача сводится к последовательности обращений линейного оператора $L_{\text{cls}} \equiv \frac{\delta F}{\delta m}(m_k)$. Следовательно, основные особенности получаемого решения определяются

свойствами формальной производной оператора прямой задачи, т.е. линеаризованным оператором прямой задачи.

Рассмотрим теперь линеаризованную постановку в формулировке МВТТ в предположении, что имеющееся начальное приближение m_0 уже достаточно близко к точному решению, т.е. $m_k = m_0 + \delta m$, где $\|\delta m\|_M \ll \|m_0\|_M$. Тогда

$$\begin{aligned} d^{\text{obs}} &= F(p_{\text{true}} + \mathcal{M}(p_{\text{true}}) \langle s_{\text{true}} \rangle) = F(m_0 + \delta p + \mathcal{M}(m_0 + \delta p) \langle s_{\text{true}} \rangle) = \\ &= F\left(m_0 + \mathcal{M}(m_0) \langle s_{\text{true}} \rangle + \left(\delta p + \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta p}(m_0) \langle s_{\text{true}} \rangle \langle \delta p \rangle\right) + \dots\right) = \\ &= F(m_0 + \mathcal{M}(m_0) \langle s_{\text{true}} \rangle) + \frac{\delta F}{\delta m}(m_0 + \mathcal{M}(m_0) \langle s_{\text{true}} \rangle) \langle \delta p + \frac{\partial \mathcal{M}(m_0)}{\partial p} \langle s_{\text{true}} \rangle \langle \delta p \rangle \rangle + \dots \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta m}(m_0 + \mathcal{M}(m_0) \langle s_{\text{true}} \rangle) \left[\delta p + W \circ \left(\frac{\delta^2 F}{\delta m^2}(m_0) \langle \cdot, \delta p \rangle \right)^* \langle s_{\text{true}} \rangle \right] = \\ = d^{\text{obs}} - F(m_0 + \mathcal{M}(m_0) \langle s_{\text{true}} \rangle) \equiv \delta d, \end{aligned} \tag{9}$$

или в компактной записи:

$$L_{\text{mbtt}} \langle \delta p \rangle = \delta d. \tag{10}$$

Таким образом, в предположении, что нам известно s_{true} , мы получили линейную задачу на нахождение возмущения пропагатора δp .

3.2. Регуляризация линейного обращения полных волновых полей путем усечения сингулярного разложения. Для нахождения численного решения полученных в предыдущем разделе линейных операторных уравнений первого рода (8) и (9) необходимо свести их к системам линейных алгебраических уравнений. Как показано в публикации [12], формальная производная оператора прямой задачи для гладких входных импульсов является компактным оператором и, следовательно, имеет матричное представление. К сожалению, в настоящее время нет результатов о компактности второй производной, поэтому ее компактность мы примем в качестве рабочей гипотезы. Таким образом, оба полученных в предыдущем разделе уравнения суть линейные операторные уравнения первого рода с компактным оператором. Компактный оператор не имеет ограниченного обратного, поэтому получаемая при его конечномерной аппроксимации матрица неизбежно должна быть плохо обусловленной, причем число обусловленности тем больше, чем точнее аппроксимируется оператор. Поэтому построение численного решения полученных уравнений невозможно без применения регуляризирующей процедуры, в качестве которой нами было выбрано усечение сингулярного разложения [7, 8, 15].

Опишем кратко эту процедуру. Пусть после выполнения конечно-разностной аппроксимации интегрального уравнения первого рода получена система линейных алгебраических уравнений

$$L \langle \delta m \rangle = \delta d, \tag{11}$$

где $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\delta m \in \mathbb{R}^n$ и $\delta d \in \mathbb{R}^m$. Как правило, в обратной динамической задаче сейсмологии число уравнений существенно превышает число неизвестных, т.е. рассматриваемые системы линейных алгебраических уравнений переопределены. Построим сингулярное разложение матрицы L : $L = U \Sigma V^*$, где U — ортогональная матрица порядка m , Σ — диагональная $m \times n$ -матрица с неотрицательными вещественными числами на диагонали, расположенными в невозрастающем порядке, V — ортогональная матрица порядка n , а V^* — матрица, транспонированная к V . Под диагональной прямоугольной матрицей здесь по-

нимается матрица, такая, что все ее элементы вне главной диагонали равны нулю: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$,

причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$. Столбцы матриц U и V образуют соответственно левые и правые сингулярные векторы. Правые сингулярные векторы $\{v_i\}_{i=1}^n$ формируют базис пространства моделей, тогда как левые сингулярные векторы $\{u_i\}_{i=1}^m$ — базис пространства данных, причем $L < v_i > = \sigma_i u_i$, $L^* < u_i > = \sigma_i v_i$.

Регуляризованный обратный оператор (r -обратный), строится в виде $L_r^{-1} = V \Sigma_r^{-1} U^*$, где Σ_r^{-1} — матрица размеров $n \times m$, у которой ненулевые только первые r диагональных элементов, такие, что $(\Sigma_r^{-1})_{ii} = \frac{1}{\sigma_i}$. Другими словами, такая регуляризация заключается в решении линейной задачи (11) не во всем пространстве моделей, а лишь в его подпространстве $V_r = \text{span}(v_1, \dots, v_r)$, натянутом на r старших правых сингулярных векторов. В роли регуляризирующего параметра r выступает размерность пространства V_r . Верна также оценка из линейной алгебры, связывающая ошибку в решении усеченной системы δm_r^{err} , ее число обусловленности $\mu(L_r) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$ и ошибку в данных δd_r^{err} :

$$L_r < \delta m_r > = \delta d_r, \quad \frac{\|\delta m_r^{\text{err}}\|_{V_r}}{\|\delta m_r\|_{V_r}} \leq \mu(L_r) \frac{\|\delta d_r^{\text{err}}\|_{U_r}}{\|\delta d_r\|_{U_r}}.$$

Таким образом, исходя из заданного уровня погрешности, можно не только оценить размерность r устойчивого подпространства моделей, но и получить его полное описание, используя для этого правые сингулярные векторы v_1, \dots, v_r . Сравнивая линейные оболочки таких сингулярных векторов для разных операторов, можно достоверно судить о структуре их устойчивых подпространств. В частности, проектируя конкретную скоростную модель на соответствующую линейную оболочку правых сингулярных векторов, можно заранее сказать, какая ее составляющая будет восстанавливаться устойчиво.

Такой сравнительный анализ для различных целевых функционалов и дает требуемую информацию о разрешающей способности и информативности метода обращения полных волновых полей применительно к различным системам наблюдения и различным целевым функционалам.

В последующем по изложенной схеме сравниваются две формулировки обращения полных волновых полей — классическая и МВТГ.

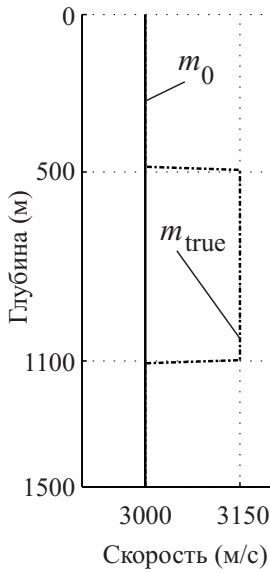


Рис. 1. Вертикальный профиль m_{true} и начальное приближение m_0

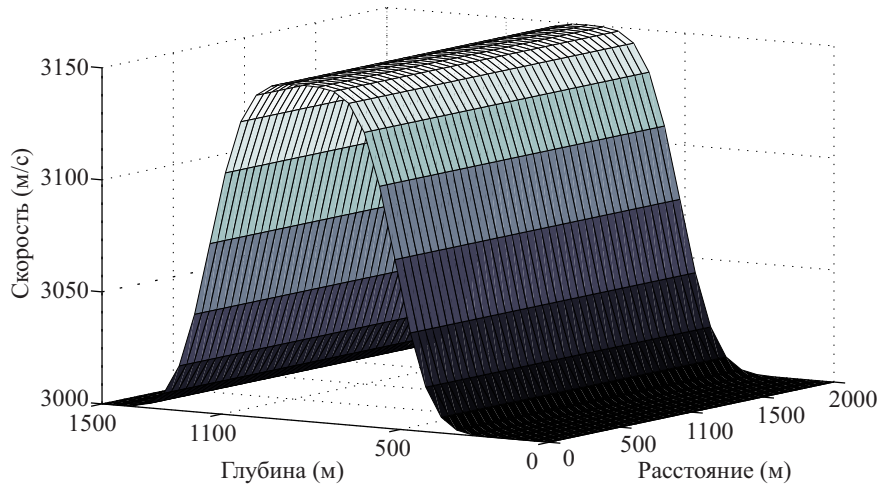


Рис. 2. Истинный пропагатор p_{true} , полученный в результате гауссова сглаживания истинного распределения скорости

4. Численные эксперименты.

4.1. Пример разложения модели на пропагатор и рефлектор. В целях снижения требуемых вычислительных ресурсов на данном этапе все рассмотрения проводятся в двумерном пространстве. Для вычислений использовалась равномерная сетка из 200×150 точек с шагом $h_x = h_z = 10$ м. Данные были рассчитаны для $Nf = 220$ частот, расположенных равномерно в диапазоне от 5 до 40 Гц. Число источников $NS = 25$, приемников $NR = 99$. И приемники, и источники располагаются равномерно на поверхности расчетной области. Форма импульса в источнике задавалась в виде импульса Рикера с доминирующей частотой 15 Гц. Отметим, что в качестве пространства искомым решений использовалась

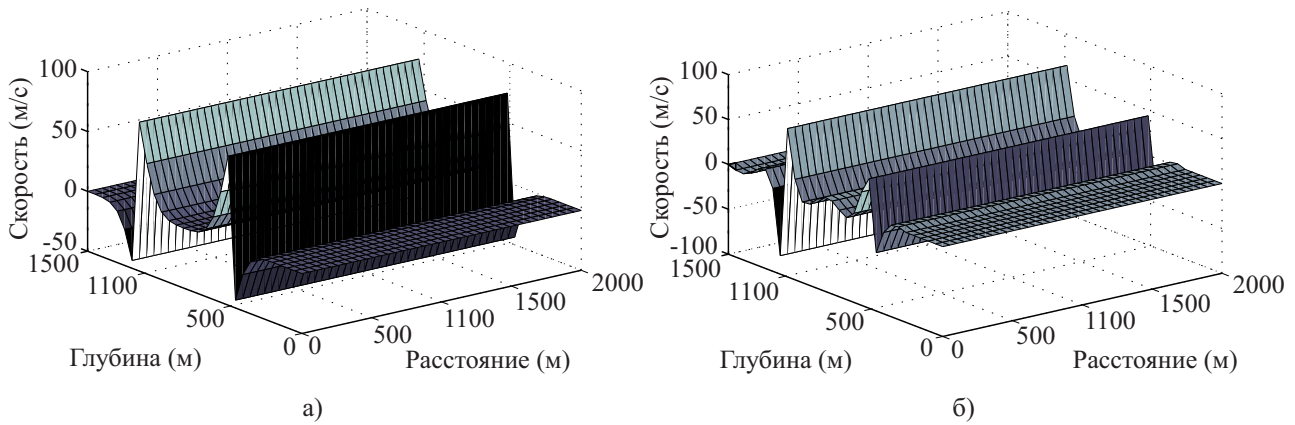


Рис. 3. Истинный пространственный рефлектор r_{true} (а); пространственный рефлектор, полученный в результате действия оператора $M(p_{true})$ на найденный временной рефлектор s_{true} (б)

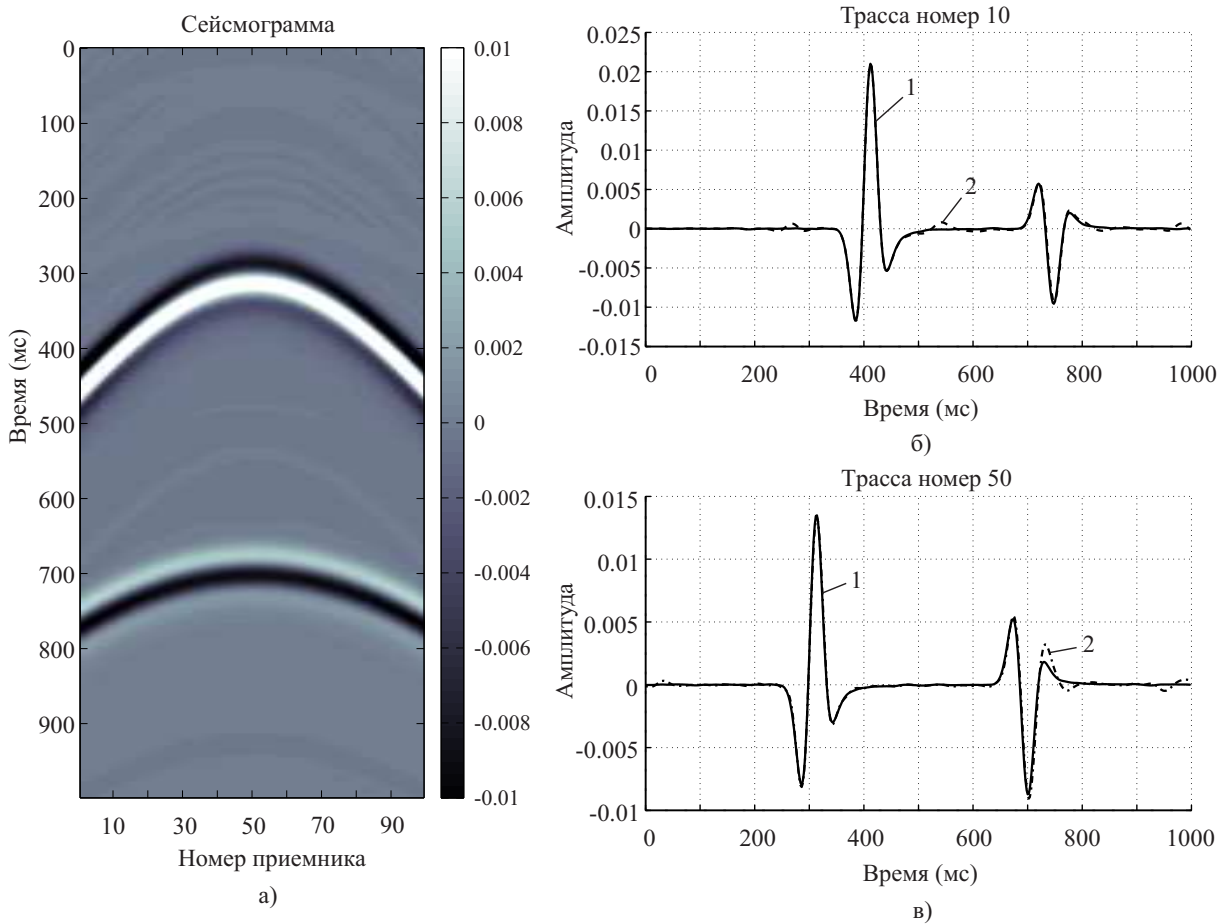


Рис. 4. Полная сейсмограмма, содержащая отраженную волну (а); сейсмические трассы для приемников с номерами 10 (б) и 50 (в). Сплошная линия 1 соответствует трассе в истинной модели m_{true} , пунктирная 2 — в модели, полученной путем суперпозиции $p_{true} + M(p_{true}) < s_{true} >$

“медленность” (от общепринятого “slowness” в англоязычной литературе), т.е. величина, обратная к скорости распространения волн, но на рисунках для облегчения восприятия приводится уже ее пересчет в скорость.

Нами была взята простейшая модель — однородный слой в однородном полупространстве, распределение скорости в которой представлено на рис. 1 пунктирной линией. Сплошной линией обозначена модель, выбранная в качестве начального приближения, — полупространство без слоя. Отметим, что, несмотря на свою простоту, данная модель уже содержит оба основных компонента — и плавный про-

пагатор, и резко изменяющийся в пространстве рефлектор. Действительно, размер неоднородности составляет три доминирующих длины волны, что уже вполне достаточно для возникновения проблем с реконструкцией скоростного строения среды в стандартной постановке метода обращения полного волнового поля [1, 17]. В то же время, на такой наглядной модели будет отчетливо видно, насколько устойчиво определяются рефлекторы и пропагатор в каждой из рассматриваемых постановок.

Чтобы иметь эталон для сравнения, сначала построим точный пропагатор и пространственный рефлектор для изучаемой модели. Для этого используется гауссово сглаживание модели, не приводящее к образованию сколько-нибудь значимых отражений, но и не меняющее времена распространения волн. Его результат представлен на рис. 2. Теперь, когда есть точный пропагатор p и полная модель m , мы можем построить точный пространственный рефлектор r_{true} на основе представления $m = p + r$. Напомним, что эти разложения строятся для медленностей и исключительно для наглядности переводятся в скорости. Этот рефлектор представлен на рис. 3а. Следующий шаг — построение временного рефлектора s_{true} на основе соотношения (7). Фактически для этого нужно решить интегральное уравнение первого рода с гладким ядром. Так как здесь нам это решение нужно только для тестирования, оно было получено с использованием метода LSQR [20], количество итераций в котором подбиралось методом проб и ошибок. Как показано в книге [4], число итераций методов градиентного типа является регуляризующим параметром, зависящим от уровня помех в данных. Нами этот параметр выбирался таким, чтобы получить приемлемое совпадение синтетических сейсмограмм для точной модели m (рис. 1) и для модели, задаваемой в виде суперпозиции пропагатора и пространственного рефлектора, построенного по соотношению (7). Этот рефлектор приведен на рис. 3б. Как видно из рисунка, он действительно корректно описывает резкую изменчивость скоростного строения. Синтетические сейсмограммы, соответствующие этим двум моделям, изображены на рис. 4 и практически полностью совпадают. Таким образом, построенное разложение $m_{\text{true}} \approx p_{\text{true}} + \mathcal{M}(p_{\text{true}}) < s_{\text{true}} >$ действительно является разложением на “пропагатор” и “рефлектор”.

4.2. Анализ информативности и разрешающей способности реконструкции пропагатора. Рассмотрим теперь строение устойчивых подпространств операторов L_{cls} и L_{mbtt} . При этом будем считать, что временной рефлектор s_{true} известен, а уклонение истинного пропагатора от начального приближения невелико, так что для нахождения δp можно ограничиться решением линейной задачи (10). Ограничим пространство допустимых скоростных моделей M вертикально-неоднородными средами, а в качестве начального приближения m_0 выберем однородную модель, в которой скорость распространения сейсмической волны равна 3000 м/с, а возмущение скорости составляет 150 м/с относительно начального приближения, т.е. 5%. Итак, требуется восстановить однородное включение в виде ступеньки мощностью в 600 м (три доминирующих длины волны), верхняя граница которой находится на глубине 500 метров.

Следуя разделу 3.2, для сравнительного анализа разрешающей способности и информативности метода обращения полных волновых полей в стандартной формулировке и в формулировке МВТТ построим сингулярное разложение соответствующих линеаризованных операторов L_{cls} и L_{mbtt} в окрестности начального приближения m_0 . Их сингулярные спектры представлены на рис. 5, из которого следует, что начиная с числа обусловленности $\sigma_1/\sigma_n \approx 100$ имеется разбегание этих спектров.

Чтобы понять, как устроено устойчивое подпространство оператора L_{mbtt} , спроецируем на линейную оболочку из его N_{mbtt} старших правых сингулярных векторов ($\sigma_1/\sigma_{N_{\text{mbtt}}} \leq 100$) разность $\delta p = p_{\text{true}} - m_0$. Аналогичную проекцию можно вычислить и для для классической постановки, проектируя δp на N_{cls} старших правых сингулярных векторов оператора L_{cls} ($\sigma_1/\sigma_{N_{\text{cls}}} \leq 100$). Эти проекции представлены на рис. 6. Из сравнения этих двух рисунков видно, что в стандартной постановке (левый рисунок) данная проекция уверенно идентифицирует только верхнюю и нижнюю границу слоя, в то время как его внутреннему содержанию соответствуют практически нулевые значения. Тем самым, находясь в линейной оболочке из правых сингулярных векторов для стандартной постановки, соответствующих числу обусловленности менее 100, нет никаких шансов восстановить про-

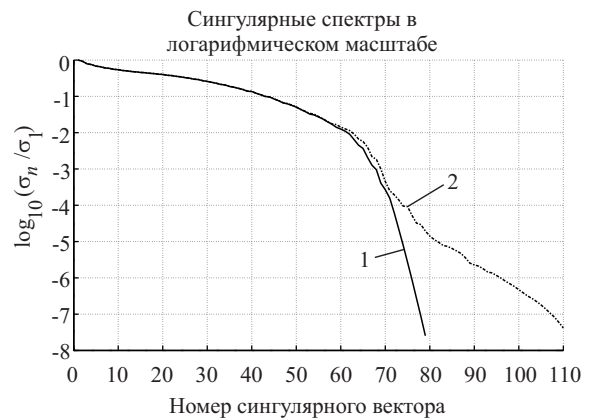


Рис. 5. Поведения сингулярных спектров операторов L_{cls} (сплошная линия 1) и L_{mbtt} (пунктирная линия 2), изображенные в логарифмическом масштабе

пагатор. В то же время, приведенная на правом рисунке проекция пропагатора на такую же линейную оболочку, но из правых сингулярных векторов для формулировки МВТГ, довольно уверенно повторяет его форму в границах целевого слоя. Таким образом, эта линейная оболочка образует устойчивое подпространство, позволяющее восстановить строение пропагатора.

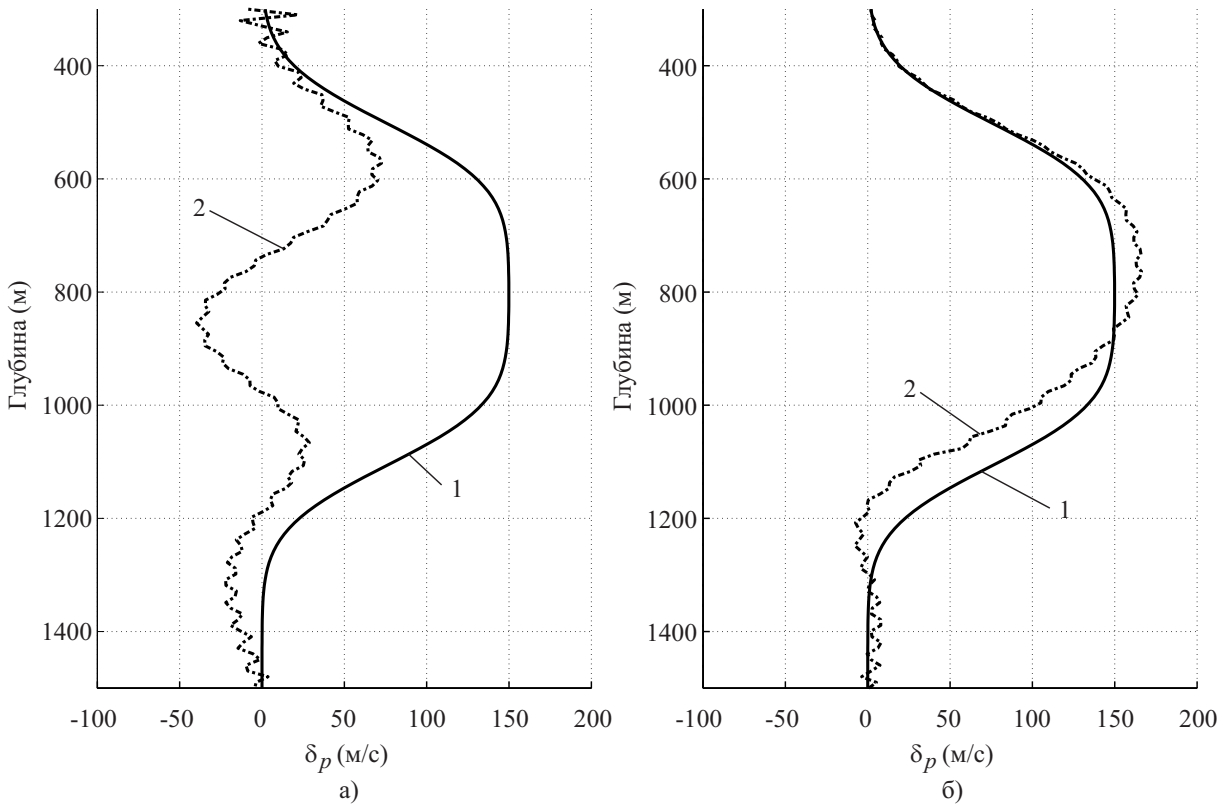


Рис. 6. Искомое возмущение пропагатора δp (сплошная линия 1) и его проекция (кривая 2) на старшие сингулярные векторы оператора L_{cls} (а). Искомое возмущение пропагатора δp (сплошная линия 1) и его проекция (кривая 2) на старшие сингулярные векторы оператора (б)

Замечание. Напомним, что отыскание решения в подпространстве правых сингулярных векторов, соответствующих числу обусловленности $\text{cond} = 100$, означает, что относительная погрешность решения получается умножением погрешности правой части на 100. Другими словами, ошибка в 1% в правой части (в данных) может привести к ошибке 100% в решении, т.е. к абсолютной потере точности и, следовательно, информативности решения.

Проанализируем теперь взаимное расположение подпространств X_{cls}^r и X_{mbtt}^r , образованных из r правых сингулярных векторов операторов L_{cls} и L_{mbtt} соответственно. Мерой совпадения/несовпадения двух евклидовых подпространств является их раствор, определяемый как норма разности соответствующих ортогональных проекторов (см. гл. 3 книги [2]). Как показано в гл. 3 книги [3], для отыскания раствора нужно построить матрицу попарных скалярных произведений базисных векторов из этих подпространств (в нашем случае это как раз правые сингулярные векторы операторов L_{cls} и L_{mbtt}) и найти ее сингулярное разложение. Полученные сингулярные числа будут задавать косинусы серии углов. Минимальный косинус соответствует максимальному углу, который и называется углом раствора подпространств.

На рис. 7 приведены значения угла раствора между подпространствами X_{cls}^r и X_{mbtt}^r для растущего целочисленного параметра r . Как видно, для небольших значений r ($r \leq 50$) угол раствора не превосходит 10° , что говорит о близости этих подпространств. Однако дальнейший рост размерности r , начиная

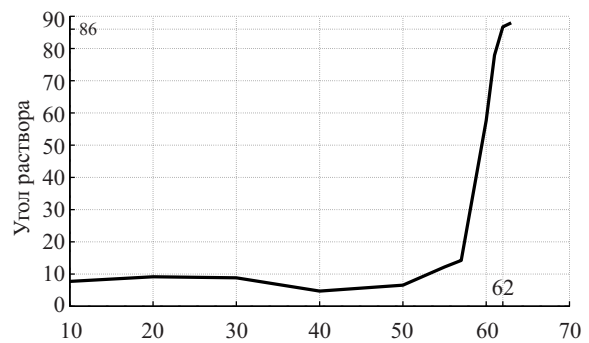


Рис. 7. Углы раствора между подпространствами X_r^1 и X_r^2 в зависимости от параметра r

примерно с $r = 50$, приводит к стремительному увеличению угла раствора. При $r = 62$, что соответствует числу обусловленности усеченной системы, равному 100, подпространства X_{cls}^r и X_{mbtt}^r становятся практически ортогональными с углом раствора 86° . Следовательно, подпространства X_{cls}^r и X_{mbtt}^r действительно существенно разные и содержат разные компоненты решения.

5. Заключение. Основное отличие предложенной модификации целевого функционала для обращения полного волнового поля заключается в декомпозиции пространства моделей на два подпространства — плавно меняющихся пропагаторов и резко изменчивых рефлекторов. Эти компоненты отвечают за различные составляющие волнового процесса:

- пропагатор определяет его кинематику, предписывая времена распространения волн внутри среды, но практически не вызывает изменение их направления;

- рефлектор, напротив, не меняя времена распространения, обуславливает возвращение сейсмической энергии назад к системе наблюдения за счет образования отраженных волн.

Таким образом, оба этих компонента чрезвычайно важны для описания волнового поля, но представлены в нем совершенно по-разному. Следовательно, и процесс обращения для каждого из них должен быть устроен специальным образом. Именно на это и ориентирована модификация целевого функционала, представленная в настоящей статье. Один из основных принципов, положенных в ее основу, — взаимосогласованное изменение пропагатора и рефлектора. Первый входит в миграционный оператор \mathcal{M} и, следовательно, контролирует пространственное положение рефлекторов. В то же время, когда пропагатор фиксирован, построение рефлекторов сводится к решению задачи квадратичной минимизации в силу линейности действия оператора \mathcal{M} на временной рефлектор s . После построения этого рефлектора окончательное распределение скорости в пространстве находится путем суперпозиции пропагатора и пространственного рефлектора r , который строится применением миграционного преобразования с корректировкой амплитуд (см. соотношение (6)).

Представленные в данной работе рассуждения показывают, что модифицированная постановка метода обращения полных волновых полей обладает устойчивым подпространством, позволяющим восстанавливать в линейном приближении макроскоростную составляющую при разумных требованиях на доминирующую частоту зондирующего сигнала (15 Гц), точность измерений (\approx первые проценты) и использование выносов источник–приемник порядка глубины целевых объектов.

Следующим нашим шагом в развитии этого направления будет реализация нелинейного обращения полных волновых полей. В настоящее время здесь нам видится наиболее оптимальной стратегия поочередного отыскания пропагатора и рефлектора. При этом на самом первом шаге в качестве временного рефлектора следует, видимо, брать зарегистрированные данные и строить первое приближение пропагатора, который затем следует использовать для уточнения временного рефлектора, и т.д. — уточнение пропагатора сопровождается уточнением временного рефлектора, и так до тех пор, пока процесс не будет остановлен.

Приложение. Оператор прямой задачи и его формальные производные. Сопряженные операторы.

1. Оператор прямой задачи. Пусть $c(x)$ — скорость распространения волн в двумерной среде. В дальнейшем нам будет удобно использовать не скорость, а величину $m = c^{-2}(x)$, которую и будем называть моделью и писать $m \in M$, подразумевая под M некоторое пространство моделей. Пусть функция $u(x; \omega)$ (волновое поле) удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + \omega^2 m)u = -f$ с правой частью $f(x)$ и угловой частотой ω . Поведение на бесконечности этого решения определяется принципом предельного поглощения [5, 10]:

$$u = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon, \quad (\Delta + (\omega + i\varepsilon)^2 m)u_\varepsilon = -g, \quad u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

Под оператором прямой задачи $\mathcal{F}_f(m; \omega)$ будем понимать отображение, ставящее в соответствие функции m решение уравнения Гельмгольца. Если правая часть этого уравнения имеет вид $g(x; \omega) = f(\omega)\delta(x - x_s)$, то соответствующий оператор будем обозначать через $\mathcal{F}_{x_s}(m; \omega)$ (см. формулу (1)). Заметим, что фактически результат действия этого оператора совпадает с произведением формы импульса $f(\omega)$ и функции Грина $G(x, x_s; \omega; m)$.

2. Первая формальная производная. Пусть $h_m \in M$ малое возмущение модели m (мы не уточняем, в каком смысле понимается малость, так как будет рассматриваться формальная производная). Пусть u и $u + \delta u$ — решения уравнения Гельмгольца для коэффициентов m и $m + h$ на частоте ω :

$$(\Delta + \omega^2 m)u = f(\omega)\delta(x - x_s); \quad (\Delta + \omega^2(m + h))(u + \delta u) = f(\omega)\delta(x - x_s). \quad (12)$$

С использованием функции Грина получим интегральное уравнение для определения δu :

$$\delta u(x) = \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) h(y) (u(y) + \delta u(y)) dy,$$

которое может быть переписано в виде стандартного уравнения Фредгольма второго рода

$$\delta u(x) - \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) h_m(y) \delta u(y) dy = \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) h(y) u(y) dy.$$

При выполнении ряда ограничений его решение представляется в виде ряда Неймана. Ограничиваясь первым членом этого ряда, получим $\delta u(x) = \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) h_m(y) u(y) dy + o(\|h_m\|_M)$.

Это соотношение дает линейный оператор, связывающий малое приращение искомого параметра m с изменчивостью решения уравнения, и, следовательно, является первой производной (формальной) нелинейного оператора прямой задачи:

$$\delta u = \frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m; \omega) \langle h \rangle + o(\|h\|_M) = \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) h(y) u(y) dy + o(\|h\|_M).$$

Если правая часть уравнения Гельмгольца равна $f(\omega)\delta(x-x_s)$, то формальная производная оператора прямой задачи представляется следующим образом:

$$\frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m; \omega) \langle h \rangle = \omega^2 f(\omega) \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) G(y, x_s; \omega; m) h(y) dy. \tag{13}$$

В дальнейшем будем использовать представление производной в виде (13).

3. Вторая формальная производная. Построим теперь вторую формальную производную оператора прямой задачи \mathcal{F}_{x_s} по модели m . Пусть $h_2 \in M$ — малое возмущение модели. Следуя определению, вторая производная задается линейной по h_2 составляющей разности

$$\frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m + h_2; \omega) \langle h_1 \rangle - \frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m; \omega) \langle h_1 \rangle = \frac{\delta^2 \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m^2}(m; \omega)[h_1, h_2] + o(\|h_2\|_M). \tag{14}$$

Принимая во внимание, что

$$f(\omega)G(x, y; \omega; m + h_2) = (\mathcal{F}_y(m + h_2; \omega))(x), \quad f(\omega)G(y, x_s; \omega; m + h_2) = (\mathcal{F}_{x_s}(m + h_2; \omega))(y),$$

после очевидных упрощений получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m + h_2; \omega) \langle h_1 \rangle = & \left(\omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) \left(\frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m; \omega) \langle h_2 \rangle \right) (y) h_1(y) dy \right) + \\ & + \left(\omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} G(y, x_s; \omega; m) \left(\frac{\delta \mathcal{F}_y}{\delta m}(m; \omega) \langle h_2 \rangle \right) (x) h_1(y) dy \right) + \\ & + \frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m; \omega) \langle h_1 \rangle + o(\|h_2\|_M). \end{aligned} \tag{15}$$

Окончательно, следуя (14) и подставляя (13) в (15), приходим к следующему выражению для второй формальной производной Фреше оператора прямой задачи \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m^2}(m; \omega)[h_1, h_2] = & \omega^4 amp(\omega) \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) h_1(y) dy \left(\int_{\mathbb{R}^2} G(y, z; \omega; m) G(z, x_s; \omega; m) h_2(z) dz \right) + \\ & + \omega^4 amp(\omega) \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y; \omega; m) h_2(y) dy \left(\int_{\mathbb{R}^2} G(y, z; \omega; m) G(z, x_s; \omega; m) h_1(z) dz \right). \end{aligned}$$

Как легко видеть, вторая формальная производная Фреше оператора прямой задачи \mathcal{F} есть симметричная билинейная форма: $\frac{\delta^2 \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m^2}(m; \omega)[h_1, h_2] = \frac{\delta^2 \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m^2}(m; \omega)[h_2, h_1]$.

4. Сопряженные операторы к формальным производным Фреше оператора прямой задачи \mathcal{F} . При организации итерационного процесса поиска точки минимума целевого функционала необходимо знание сопряженных операторов к формальным производным оператора прямой задачи.

Напомним определение сопряженного оператора (см. книгу [6], гл. V). Пусть линейный оператор L действует из гильбертова пространства M в гильбертово пространство U . Тогда сопряженный оператор L^* действует из U в M по правилу

$$L^* : U \rightarrow M \quad \forall m \in M, \quad \forall u \in U, \quad (L < m >, u)_U = (m, L^* < u >)_M,$$

где $(\cdot, \cdot)_M$ и $(\cdot, \cdot)_U$ — скалярные произведения в M и U соответственно. Далее будем полагать, что пространства моделей M и данных U являются гильбертовыми и, следовательно, обладают скалярными произведениями.

Следуя определению, получим выражение для сопряженного оператора к формальной производной оператора прямой задачи \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \left(h_m, \left(\frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m; \omega) \right)^* < u > \right)_M &= \left(\frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m; \omega) < h_m >, u \right)_U = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 f(\omega) G(y, x; \omega; m) G(x, x_s; \omega; m) h_m(x) dx \right) \bar{u}(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h_m(x) dx \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 f(\omega) G(y, x; \omega; m) G(x, x_s; \omega; m) \bar{u}(y) dy. \end{aligned}$$

Теперь, привлекая принцип взаимности $G(x, y; \omega; m) = G(y, x; \omega; m)$, получим

$$\left(\frac{\delta \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m}(m; \omega) \right)^* < u > = \omega^2 \bar{G}(x, x_s; \omega; m) \int_{\mathbb{R}^2} \bar{G}(x, y; \omega; m) u(y) dy.$$

Аналогично строится и сопряженный оператор ко второй формальной производной оператора прямой задачи \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta^2 \mathcal{F}_{x_s}}{\delta m^2}(m; \omega)[\cdot, h_2] \right)^* < u > &= \omega^4 f(\omega) \int_{\mathbb{R}^2} \bar{G}(x, y; \omega; m) u(y) dy \int_{\mathbb{R}^2} \bar{G}(x, z; \omega; m) \bar{G}(z, x_s; \omega; m) h_2(z) dz + \\ &+ \omega^4 f(\omega) \bar{G}(x, x_s; \omega; m) \int_{\mathbb{R}^2} \bar{G}(x, y; \omega; m) h_2(y) dy \int_{\mathbb{R}^2} \bar{G}(y, z; \omega; m) u(z) dz. \end{aligned}$$

Полученные сопряженные операторы к формальным производным оператора прямой задачи $\mathcal{F}_{x_s}(m; \omega)$ очевидным образом обобщаются на случай оператора $F(m)$ (см. соотношения (1)–(3)).

Работа выполнена при поддержке Московского научного центра фирмы Schlumberger, а также проектов РФФИ (коды 12–05–31008, 13–05–00076, 13–05–12051, 14–05–93090). Вычисления проводились на кластерах НКС-30Т Сибирского суперкомпьютерного центра, МВС-100К Московского межведомственного суперкомпьютерного центра РАН, СКИФ “Чебышев” и СКИФ “Ломоносов” МГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев А.С., Костин В.И., Хайдуков В.Г., Чеверда В.А. Восстановление двумерных возмущений скорости вертикально-неоднородной акустической среды по данным многократного перекрытия (линеаризованная постановка) // Геология и геофизика. 1997. **38**, № 12. 1980–1992.
2. Ахизер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
3. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилук О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992.
4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.

5. *Вайнберг Б.Р.* Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными // *Успехи математических наук.* 1966. **21**, № 3. 115–194.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука. 1977.
7. *Костин В.И., Хайдуков В.Г., Чеверда В.А.* r -решения уравнений первого рода с компактным оператором в гильбертовых пространствах: существование и устойчивость // *Доклады АН.* 1997. **335**, № 3. 308–312.
8. *Чеверда В.А., Костин В.И.* r -псевдообратный для компактного оператора // *Сибирские электронные математические известия.* 2010. **7**. 258–282.
9. *Протасов М.И., Чеверда В.А.* Построение сейсмических изображений в истинных амплитудах // *Доклады АН.* 2006. **407**, № 4. 528–532.
10. *Эйдус Д.М.* О принципе предельного поглощения // *Математический сборник.* 1962. **57**, № 1. 13–44.
11. *Bamberger A., Chavent G., Hemon Ch., Lailly P.* Inversion of normal incidence seismograms // *Geophysics.* 1982. **47**, N 5. 757–770.
12. *Bao G., Symes W.W.* Regularity of an inverse problem in wave propagation // *Lecture Notes in Physics.* Vol. 486. Heidelberg: Springer, 1997. 226–235.
13. *Beylkin G.* Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of causal generalized Radon transform // *J. Math. Phys.* 1985. **26**, N 1. 99–108.
14. *Brenders A.J., Pratt R.G.* Full waveform tomography for lithospheric imaging: results from a blind test in a realistic crustal model // *Geophys. J. Int.* 2007. **168**, N 1. 133–151.
15. *Cheverda V.A., Kostin V.I.* R-pseudoinverses for compact operators in Hilbert spaces: existence and stability // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems.* 1995. **3**, N 2. 131–148.
16. *Clément F., Chavent G., Gómez S.* Migration-based travelttime waveform inversion of 2-D simple structures: A synthetic example // *Geophysics.* 2001. **66**, N 3. 845–860.
17. *Jannane M., Beydoun W., Crase E., et al.* Wavelengths of earth structures that can be resolved from seismic reflection data // *Geophysics.* 1989. **54**, N 7. 906–910.
18. *Gauthier O., Virieux J., Tarantola A.* Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: Numerical results // *Geophysics.* 1986. **51**, N 7. 1387–1403.
19. *Lailly P.* The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations // *Proc. of the Conference on Inverse Scattering: Theory and Applications.* Philadelphia: SIAM, 1983. 206–220.
20. *Paige C.C., Saunders M.A.* LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // *Transactions on Mathematical Software.* 1982. **8**, N 1. 43–71.
21. *Protasov M.I., Tcheverda V.A.* True amplitude imaging by inverse generalized Radon transform based on Gaussian beam decomposition of the acoustic Green's function // *Geophysical Prospecting.* 2011. **59**, N 2. 197–209.
22. *Silvestrov I., Neklyudov D., Kostov C., Tcheverda V.* Full-waveform inversion for macro-velocity model reconstruction in look-ahead offset vertical seismic profile: numerical singular value decomposition-based analysis // *Geophysical Prospecting.* 2013. **61**, N 6. 1099–1113.
23. *Tarantola A.* Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation // *Geophysics.* 1984. **49**, N 8. 1259–1266.
24. *Virieux J., Operto S.* An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics // *Geophysics.* 2009. **74**, N 6. WCC1–WCC26.
25. *Yilmaz Ö.* Seismic data analysis. Processing, inversion and interpretation of seismic data. Vol. 2. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 2001.

Поступила в редакцию
17.07.2014

Nonlinear Least-Squares Full Waveform Inversion: SVD Analysis

K. G. Gadylshin¹ and V. A. Tcheverda²

¹ *National Research Novosibirsk State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; ulitsa Pirogova 2, Novosibirsk, 630090, Russia; Graduate Student, e-mail: Gadulshinkg@ipgg.sbras.ru*

² *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Head of Division, e-mail: CheverdaVA@ipgg.sbras.ru*

Received July 17, 2014

Abstract: Nonlinear least-squares formulation for the inverse problem of seismic wave propagation is in the focus of computational geophysics community since 80th of the last century. Around the same time, the

problem of trend component recovery becomes known. It is connected in the necessity to possess unrealistic low frequencies or extremely large source-receiver offsets in the data acquired to provide a reliable reconstruction of macrovelocity. At the same time, this component of the model determines the correct position of seismic images in space. Recently, thanks to the progress in the geophysical instrument industry, the substantive information becomes available for as low time frequencies as 5 Hz; as a rule, however, this is not sufficient for the proper reconstruction of macrovelocity. This paper deals with the numerical singular value decomposition of the linearized forward map to bring to the light the mathematical roots of the troubles. On this basis, a modification of the cost function is proposed, discussed and compared with the standard least-square approach. The high reliability of this modification in macrovelocity determination is confirmed numerically.

Keywords: Helmholtz equation, macrovelocity component, forward map, full waveform inversion, singular value decomposition, resolution analysis.

References

1. A. S. Alekseev, V. I. Kostin, V. G. Khaidukov, and V. A. Cheverda, "Recovery of Two-Dimensional Perturbations of the Velocity of a Vertically Inhomogeneous Medium from Multicoverage Data (Linearized Formulation)," *Geolog. Geofiz.* **38** (12), 1980–1992 (1997) [Russ. Geol. Geophys. **38** (12), 2012–2025 (1997)].
2. N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space* (Nauka, Moscow, 1966; Dover, New York, 1993).
3. S. K. Godunov, A. G. Antonov, O. P. Kiriljuk, and V. I. Kostin, *Guaranteed Accuracy in Numerical Linear Algebra* (Nauka, Novosibirsk, 1992; Kluwer, Dordrecht, 1993).
4. A. B. Bakushinskii and A. V. Goncharskii, *Iterative Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
5. B. R. Vainberg, "Principles of Radiation, Limit Absorption and Limit Amplitude in the General Theory of Partial Differential Equations," *Usp. Mat. Nauk* **21** (3), 115–194 (1966) [Russ. Math. Surv. **21** (3), 115–193 (1966)].
6. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional analysis* (Nauka, Moscow, 1977; Pergamon, Oxford, 1982).
7. V. I. Kostin, V. G. Khaidukov, and V. A. Cheverda, " r -Solutions to Equations of the First Kind with a Completely Continuous Operator in Hilbert Spaces: Existence and Stability," *Dokl. Akad. Nauk* **335** (3), 308–312 (1997) [*Dokl. Math.* **56** (1), 531–535 (1997)].
8. V. A. Tcheverda and V. I. Kostin, " r -Pseudoinverse for a Compact Operator," *Sib. Èlektron. Mat. Izv.* **7**, 258–282 (2010).
9. M. I. Protasov and V. A. Cheverda, "True-Amplitude Seismic Imaging," *Dokl. Akad. Nauk* **407** (4), 528–532 (2006) [*Dokl. Earth Sci.* **407** (2), 441–445 (2006)].
10. D. M. Eidus, "The Principle of Limit Absorption," *Mat. Sb.* **57** (1), 13–44 (1962) [*Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2.* **47**, 157–191 (1965)].
11. A. Bamberger, G. Chavent, Ch. Hemon, and P. Lailly, "Inversion of Normal Incidence Seismograms," *Geophys.* **47** (5), 757–770 (1982).
12. G. Bao and W. W. Symes, "Regularity of an Inverse Problem in Wave Propagation," in *Lecture Notes in Physics* (Springer, Heidelberg, 1997), Vol. 486, pp. 226–235.
13. G. Beylkin, "Imaging of Discontinuities in the Inverse Scattering Problem by Inversion of Causal Generalized Radon Transform," *J. Math. Phys.* **26** (1), 99–108 (1985).
14. A. J. Brenders and R. G. Pratt, "Full Waveform Tomography for Lithospheric Imaging: Results from a Blind Test in a Realistic Crustal Model," *Geophys. J. Int.* **168** (1), 133–151 (2007).
15. V. A. Cheverda and V. I. Kostin, "R-Pseudoinverses for Compact Operators in Hilbert Spaces: Existence and Stability," *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **3** (2), 131–148 (1995).
16. F. Clément, G. Chavent, and S. Gómez, "Migration-Based Traveltime Waveform Inversion of 2-D Simple Structures: A synthetic Example," *Geophys.* **66** (3), 845–860 (2001).
17. M. Jannane, W. Beydoun, E. Crase, et al., "Wavelengths of Earth Structures that can be Resolved from Seismic Reflection Data," *Geophys.* **54** (7), 906–910 (1989).
18. O. Gauthier, J. Virieux, and A. Tarantola, "Two-Dimensional Nonlinear Inversion of Seismic Waveforms: Numerical Results," *Geophys.* **51** (7), 1387–1403 (1986).
19. P. Lailly, "The Seismic Inverse Problem as a Sequence of Before Stack Migrations," in *Proc. of the Conference on Inverse Scattering: Theory and Applications* (SIAM, Philadelphia, 1983), pp. 206–220.
20. C. C. Paige and M. A. Saunders, "LSQR: An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares," *Trans. Math. Soft.* **8** (1), 43–71 (1982).

21. M. I. Protasov and V. A. Tcheverda, “True Amplitude Imaging by Inverse Generalized Radon Transform Based on Gaussian Beam Decomposition of the Acoustic Green’s Function,” *Geophys. Prospect.* **59** (2), 197–209 (2011).

22. I. Silvestrov, D. Neklyudov, C. Kostov, and V. Tcheverda, “Full-Waveform Inversion for Macro Velocity Model Reconstruction in Look-Ahead Offset Vertical Seismic Profile: Numerical Singular Value Decomposition-Based Analysis,” *Geophys. Prospect.* **61** (6), 1099–1113 (2013).

23. A. Tarantola, “Inversion of Seismic Reflection Data in the Acoustic Approximation,” *Geophys.* **49** (8), 1259–1266 (1984).

24. J. Virieux and S. Operto, “An Overview of Full-Waveform Inversion in Exploration Geophysics,” *Geophys.* **74** (6), WCC1–WCC26 (2009).

25. Ö. Yilmaz, *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion and Interpretation of Seismic Data* (Soc. Explor. Geophysicists, Tulsa, 2001), Vol. 2.