

УДК 550.341

**ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ
ГЕЛЬМГОЛЬЦА С “ПОЧТИ АНАЛИТИЧЕСКИМ” ПРЕДОБУСЛОВЛИВАТЕЛЕМ
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ
В ЗАДАЧАХ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ**

Д. А. Неклюдов¹, И. Ю. Сильвестров², В. А. Чеверда³

Предложен подход к итерационному решению уравнения Гельмгольца в трехмерно-неоднородных средах для задач моделирования процессов распространения акустических волн, основанный на применении классического итерационного метода крыловского типа для несимметричных матриц с предобусловливателем. Отличительной чертой предлагаемого подхода является выбор предобусловливателя, в качестве которого мы используем решение трехмерного уравнения Гельмгольца с комплексным коэффициентом, зависящим от одной пространственной переменной (глубины). Одномерная скорость в предобусловливателе выбирается таким образом, чтобы наилучшим способом (в смысле наименьших квадратов) приблизить реальную трехмерно-неоднородную скоростную модель. Оператор Гельмгольца исходной задачи представляется как возмущение предобусловливателя. Как результат, умножение матрицы предобусловленной линейной системы на вектор может быть эффективно выполнено с помощью быстрых численных процедур, таких как двумерное быстрое преобразование Фурье и матричная прогонка. В предложенном подходе существует возможность не использовать конечно-разностные аппроксимации частных производных, что позволяет применять весьма редкую сетку при дискретизации задачи. Численные эксперименты показывают, что этот подход позволяет весьма эффективно рассчитывать волновые поля в частотной области в трехмерно-неоднородных средах с умеренными латеральными вариациями скорости.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, итерационные методы, предобусловливатели, сейсморазведка, акустические волны, задачи сейсморазведки.

1. Введение. Численное решение уравнения Гельмгольца в трехмерно-неоднородных средах является важной прикладной задачей. В практике сейсморазведки необходимость в этом возникает при уточнении скоростного строения геологического разреза с помощью ставшего исключительно популярным метода обращения полных волновых полей (англ. full-waveform inversion, FWI) [1–3]. Успешное решение такой специфической обратной задачи, как FWI, в трехмерном случае невозможно без эффективных численных методов расчета акустических волновых полей в частотной области, которые и описываются уравнением Гельмгольца.

Стандартный подход к решению уравнения Гельмгольца состоит в том, что вначале происходит дискретизация задачи путем конечно-разностной аппроксимации (КРА) частных производных, в результате чего возникает система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Далее необходимо решить полученную СЛАУ тем или иным методом.

Одна из особенностей расчета волновых полей в сейсмике состоит в том, что, как правило, необходимо моделировать распространение волн в неограниченном пространстве или полупространстве со свободной дневной поверхностью. Естественно, что на практике приходится искусственно ограничивать расчетную область путем задания специальных “неотражающих” граничных условий на ее краях. Это приводит к тому, что матрицы СЛАУ, аппроксимирующих дифференциальную задачу, оказываются несимметричными (неэрмитовыми). Еще одной особенностью является очень большая размерность задач, что сильно ограничивает эффективность прямых методов решения СЛАУ, так как требования к объему оперативной памяти и количеству вычислений для них растут как N^3 , где N — число неизвестных, которое, как

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: dmitn@mail.ru

² Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: silverilya@gmail.com

³ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; зав. отделом, e-mail: CheverdaVA@ipgg.sbras.ru

правило, достигает $\sim 10^8-10^{10}$. Даже при реализации на современных высокопроизводительных вычислительных системах, существующие на данный момент прямые методы пока еще слишком затратны как по времени, так и по вычислительным ресурсам. Несмотря на существенный прогресс, достигнутый в развитии прямых методов за последние годы [4–6, 8], указанная проблема еще весьма далека от разрешения. Отметим, что ситуация становится еще сложнее при переходе к более реалистичным математическим моделям, описывающим процесс распространения волн в среде, например для уравнений динамической теории упругости, особенно с введением анизотропии и поглощения.

Традиционной альтернативой прямым методам являются итерационные методы, отличающиеся значительно меньшими требованиями к объему оперативной памяти. Каждая итерация итерационного метода обычно состоит из нескольких операций умножения матрицы на вектор и нескольких вычислений скалярных произведений двух векторов. Итерационные методы линейной алгебры в настоящее время принято классифицировать следующим образом:

- 1) итерационные методы крыловского типа,
- 2) многосеточные методы (англ. multigrid, MG),
- 3) методы разбиения областей (англ. domain decomposition, DD).

Различным аспектам применения итерационных методов для уравнения Гельмгольца посвящено очень большое число публикаций как зарубежных, так и российских исследователей. Привести достаточно полный список работ здесь едва ли возможно. В настоящей статье мы рассматриваем задачу о моделировании акустических волновых полей в задачах сейсмологии, поэтому будем в основном ссылаться на публикации авторов, работающих именно в этом направлении. Отметим обзорную статью по методам крыловского типа [7], в которой компактно описывается специфика решения уравнения Гельмгольца в упомянутой области, а также приводится обширный обзор литературы по данному вопросу.

Наиболее широко используемыми итерационными методами являются итерационные методы крыловского типа. Хорошо известно, что сходимость крыловских методов зависит от строения спектра матрицы СЛАУ: быстрая сходимость достигается лишь в тех случаях, когда собственные значения матрицы компактно расположены (кластеризованы) на комплексной плоскости и удалены от нуля [9]. Чем меньше радиус окружности, включающей в себя все собственные значения, тем быстрее будет сходимость любого итерационного процесса. Присутствие собственных значений, близких к нулю, существенно снижает скорость сходимости.

К сожалению, спектральные свойства матриц, возникающих при аппроксимации уравнения Гельмгольца в задачах сейсмологии, исключительно неблагоприятны для любых итерационных методов, в том числе и методов крыловского типа (матрица является знаконеопределенной). Непосредственное их применение даже для простейших моделей требует неприемлемо большого числа итераций для достижения удовлетворительной точности результата. Первостепенной задачей является введение предобусловливателей — вспомогательных операторов, которые улучшают свойства матриц решаемых СЛАУ таким образом, чтобы ускорить сходимость итерационного процесса [10]. Предобусловливатель необходим для преобразования исходной системы с плохими спектральными свойствами к эквивалентной системе, у которой они будут благоприятны. Говоря простым языком, задача предобусловливателя заключается в том, чтобы сжать спектр исходной матрицы и отодвинуть его от нуля.

Поясним кратко суть операции предобусловливания. Пусть исходная СЛАУ записывается в виде $Au = f$, где A — некоторая квадратная матрица. Предположим, что спектральные свойства матрицы A не позволяют получить приемлемую скорость сходимости итерационных методов при решении заданной системы. Предобусловленной справа линейной системой с предобусловливателем M называется модифицированная система вида

$$AM^{-1}\tilde{u} = f, \quad u = M^{-1}\tilde{u}.$$

Возможно также предобусловливание слева или комбинация правого и левого предобусловливателей.

На каждом шаге итерационного процесса необходимо вычислять произведение матрицы предобусловленной системы на произвольный вектор. Как правило, это происходит в два этапа. Вначале решается вспомогательная система $Mu_0 = u_{\text{input}}$, где u_{input} — некоторый промежуточный вектор, полученный на предыдущей итерации. Далее вычисляется умножение исходной матрицы на полученный вектор: $u_{\text{output}} = Au_0$. Результат возвращается в итерационный процесс и, после выполнения необходимых манипуляций, предписываемых выбранным крыловским методом, происходит переход к следующей итерации.

Основные требования, предъявляемые к предобусловливателю, можно сформулировать так:

- 1) матрица M^{-1} должна быть по возможности близка к матрице A^{-1} ;
- 2) матрица M^{-1} должна вычисляться достаточно быстро, но при этом совершенно не обязательно точно.

Очевидно, что добиться удовлетворения обоих требований весьма непросто. Многолетний опыт использования итерационных методов в различных областях показывает, что выбор правильного предобусловливателя — ключевой момент при их практическом применении.

Применительно к задачам распространения гармонических волн в неограниченном пространстве в работах [11–14] предложен весьма перспективный предобусловливатель на основе комплексно-сдвинутого лапласиана (англ. complex shifted Laplacian). До последнего времени это был, насколько известно, единственный подход, показывающий удовлетворительные результаты на реалистичных, в том числе и весьма сложных моделях (под сложностью здесь мы понимаем сильную изменчивость и резкие перепады акустических скоростей, входящих в коэффициент уравнения Гельмгольца). Основная его идея заключается в следующем. Многосеточный метод (multigrid) показал свою высокую эффективность для широкого круга эллиптических задач, которые имеют только положительные собственные значения. Этот метод неплохо работает также и для уравнения Гельмгольца с комплексным коэффициентом [15], что эквивалентно введению затухания, но, к сожалению, не работает при решении уравнения Гельмгольца без затухания. Было предложено использовать решение уравнения Гельмгольца с затуханием как предобусловливатель для задачи без затухания. Иными словами, в качестве оператора M используется исходный оператор Гельмгольца, коэффициент которого имеет комплексный множитель $(1 + i\beta)$, где $0 \leq \beta \leq 1$. Обратный к нему строится на каждой итерации с помощью multigrid-метода, причем для этих целей совершенно не нужно вычислять M^{-1} точно, достаточно построить некоторую его аппроксимацию, совершив лишь несколько итераций multigrid, что может быть выполнено достаточно быстро. Численные эксперименты показали, что этот предобусловливатель позволяет обеспечить сходимость в большинстве ситуаций. Примеры его применения для расчета акустических полей в трехмерных задачах сейсморазведки приводятся в работах [16, 17]. Дальнейшее развитие метод получил в работе [18], в которой предложен многоуровневый shifted-Laplacian предобусловливатель.

Однако обсуждаемый метод оказывается все еще недостаточно эффективным при решении повседневных практических задач. Основная причина заключается в том, что изначально ставится цель построить “универсальный” метод, который был бы одинаково эффективен во всех ситуациях. На практике же основная изменчивость геологического разреза происходит с глубиной (т.е. в вертикальном направлении z), в то время как латеральная изменчивость, как правило, оказывается достаточно плавной. (Конечно, существуют районы с очень сложной геологией, с наличием высококонтрастных включений причудливой формы, таких как соляные тела.) Этот факт наводит на мысль отказаться от “универсальности” и попробовать добиться особенно высокой эффективности на “не очень сложных” моделях (которые, однако, составляют весьма значительную часть практических приложений), пожертвовав в какой-то мере универсальностью в сложных случаях. На этом предположении и строится предлагаемый нами подход.

Прежде чем перейти к его описанию, упомянем несколько относительно новых публикаций по данной тематике [19, 20]. В этих работах тоже используется shifted-Laplacian предобусловливатель. В [19] предложен подход, названный “sweeping preconditioner” и основанный на быстрой приближенной факторизации матрицы предобусловливателя, которая в силу знакоопределенности обладает необходимыми свойствами. В работе [20] (и достаточно многочисленных смежных публикациях авторов) multigrid-метод для приближенного вычисления M^{-1} применяется более изощренно, на двух уровнях предобусловливания, где происходит его комбинация с крыловским методом. Это заметно улучшает сходимость, но, естественно, приводит к повышению вычислительных затрат на каждую итерацию.

В работе [21] исходная задача для уравнения Гельмгольца сводится к интегральному уравнению Липпмана–Швингера. Далее производится его трансформация, удобная для численного решения. Однако несмотря на то что умножение матрицы на вектор вычисляется с помощью быстрого преобразования Фурье, эффективность предлагаемого подхода все еще весьма далека от желаемой в силу большого количества итераций, необходимых для достижения сходимости.

Еще раз подчеркнем основной недостаток известных подходов. Попытки разработать методы, которые обеспечивают быструю сходимость в самых сложных случаях, приводят к тому, что предложенные методы оказываются пока недостаточно эффективны для “не очень сложных” моделей.

Все упомянутые работы (кроме [21]) основаны на неприменении конечно-разностных аппроксимаций частных производных. Из теории конечно-разностных схем известно, что для достижения удовлетворительной точности необходимо использовать достаточно мелкий шаг при дискретизации задачи. Шаг определяется числом отсчетов на минимальную длину волны, распространяющуюся в расчетной области. Например, когда производные аппроксимируются со вторым порядком, шаг сетки должен выбираться так, чтобы обеспечить не менее 12 пространственных отсчетов на минимальную длину волны. Для того чтобы уменьшить количество узлов сетки (и тем самым снизить требование к затрачиваемой оператив-

ной памяти), как правило, стараются использовать схемы высокого порядка аппроксимации производных (в настоящее время на практике уже типичными стали схемы не ниже восьмого порядка). Однако необходимо учитывать компромисс: при увеличении порядка схемы можно использовать более крупный шаг по пространству, т.е. уменьшить число узлов сетки, но при этом существенно возрастает количество арифметических операций, затрачиваемых на каждую точку. Начиная с какого-то уровня (8–10 порядков аппроксимации), выигрыш, полученный уменьшением числа узлов, компенсируется возрастающими вычислительными затратами на каждую точку.

В настоящей статье мы ориентируемся на ситуацию, когда латеральные вариации акустических скоростей достаточно умеренны. В качестве предобусловливателя мы предлагаем использовать оператор Гельмгольца для вертикально-неоднородной среды (т.е. среды, изменчивость в которой зависит только от одной пространственной переменной — глубины) с комплексным коэффициентом. Одномерная скоростная модель в предобусловливателе выбирается таким образом, чтобы наилучшим образом приближать трехмерно неоднородную скоростную модель, соответствующую исходному уравнению. Оператор Гельмгольца исходной задачи представляется как возмущение оператора предобусловливателя. В результате, операция умножения матрицы на вектор для предобусловленной СЛАУ может быть эффективно вычислена при помощи двумерного быстрого преобразования Фурье (БПФ) по горизонтальным координатам x и y и последующим решением дискретизованного набора обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по третьей переменной z (глубине) методами матричной прогонки. Как показывают численные эксперименты, выбор подобного предобусловливателя позволяет очень эффективно рассчитывать волновые поля в средах с умеренными латеральными вариациями скорости.

В качестве альтернативы стандартному подходу к численному решению набора ОДУ по переменной z , который основывается на использовании конечно-разностных аппроксимаций производных, мы предлагаем подход, позволяющий избежать их применения [22]. Основное преимущество, которое мы ожидаем получить, — возможность выбирать как можно более редкую сетку в дискретизованной задаче. Предлагаемый нами подход позволяет использовать дискретизацию в соответствии с теоремой Котельникова (т.е. вплоть до 2.5 отсчета на минимальную длину волны). По горизонтальным переменным это достигается использованием псевдоспектрального подхода к вычислению производных, по вертикали — метода, описываемого в Приложении. При этом вычислительные затраты оказываются меньше, чем при использовании КРА соответствующего порядка.

Отметим, что ключевые особенности предложенного метода возможно обобщить на случай уравнений теории упругости [23].

2. Постановка задачи и введение предобусловливателя. Рассмотрим трехмерное уравнение Гельмгольца в неограниченном пространстве R^3 :

$$Lu \equiv \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} \right) u = f(x_s, y_s, z_s; \omega). \tag{1}$$

Здесь Δ обозначает оператор Лапласа $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, коэффициент $c(x, y, z)$ описывает некоторое распределение скоростей распространения акустических волн, а заданная в правой части функция f описывает действие источника.

Мы будем отыскивать решение, удовлетворяющее принципу предельного поглощения:

$$u(\mathbf{x}; \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\mathbf{x}; \omega + i\varepsilon), \quad u(\mathbf{x}; \omega + i\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

В работах [24, 25] было показано, что подобная постановка задачи гарантирует существование и единственность решения для широкого класса неограниченных областей.

Наряду с исходным оператором Гельмгольца L рассмотрим вспомогательный трехмерный оператор L_0 , коэффициент которого зависит от одной координаты z (глубины):

$$L_0 \equiv \Delta + (1 + i\beta) \frac{\omega^2}{c_0^2(z)}.$$

Здесь $0 \leq \beta \leq 1$, а функция $c_0(z)$ выбрана неким специальным образом. Введение комплексного параметра β гарантирует однозначную обратимость оператора L_0 . Кроме того, этот параметр играет важную роль в улучшении сходимости предобусловленной системы.

Оператор, обратный к L_0 , будет использоваться в качестве правого предобусловливателя для решения задачи (1) с помощью итерационного метода крыловского типа. Исходная задача теперь будет состоять в

решении видоизмененной системы

$$LL_0^{-1}\tilde{u} = f, \quad u = L_0^{-1}\tilde{u}. \quad (2)$$

Отметим, что использование предобусловливателя не изменяет решения исходной задачи [26].

Представим исходный оператор Гельмгольца L как возмущение оператора предобусловливателя L_0 :

$$L = L_0 - \delta L = \Delta + (1 + i\beta) \frac{\omega^2}{c_0^2(z)} - \left((1 + i\beta) \frac{\omega^2}{c_0^2(z)} - \frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} \right).$$

Подставляя это выражение в предобусловленную систему (2), получим окончательное выражение для системы, которая будет решаться итерационным методом крыловского типа:

$$(I - \delta LL_0^{-1})\tilde{u} = f, \quad u = L_0^{-1}\tilde{u}. \quad (3)$$

Здесь I обозначает единичный оператор. Несложно заметить, что выражение (3) является формальной записью интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Напомним, что постановка задачи и все выкладки до сих пор были сделаны для неограниченного пространства. Приведем теперь рассуждения, которые позволят нам перейти к рассмотрению задачи в ограниченной области. Из (3) следует, что если $\delta L = 0$, то система запишется как $\tilde{u} = f$; $u = L_0^{-1}\tilde{u}$, т.е. задача сводится к вычислению волнового поля в вертикально-неоднородной среде при заданной форме источника: $L_0 u = f$. Предположим, что расчетная область D , в которой определена истинная скорость распространения волн $c(x, y, z)$, погружена в неограниченное пространство, скорость в котором для всех точек (x, y, z) , не лежащих в D , задается выражением

$$c_{\text{ref}}(x, y, z) = c_0(z) \sqrt{\frac{1 - i\beta}{1 + \beta^2}}.$$

Здесь функция $c_0(z)$ совпадает с той, что используется в операторе предобусловливателя L_0 . Это условие обеспечивает равенство нулю возмущения δL вне области D . Таким образом, система (3) должна решаться только внутри области D (а именно в этом и заключается наша цель!), так как вне ее решение тривиально.

В наших рассуждениях неявно содержится условие, без правильного учета которого нельзя будет получить желаемый результат. Рассмотрим его подробнее.

На краях расчетной области D происходит резкий переход от истинной скорости $c(x, y, z)$ к комплексной скорости c_{ref} . Это может привести к возникновению нежелательных отражений при расчете волнового поля в D . Для того чтобы избежать этого, расчетная область должна быть несколько расширена за счет “переходных” слоев, основная функция которых заключается в обеспечении плавного перехода от истинной скорости на каждой из боковых поверхностей области D к фиктивной скорости c_{ref} . Пример построения таких слоев будет приведен далее при описании численных экспериментов. Здесь же отметим, что их толщина зависит от максимальной длины волны (λ_{max}) в расчетной области и не должна выбираться менее 1.5–2 λ_{max} .

Отметим, что все выводы остаются верными и для полупространства, ограниченного сверху свободной поверхностью.

Выбор скоростного закона в операторе предобусловливателя в виде функции, зависящей только от глубины, обусловлен двумя причинами:

1) как правило, реальная геологическая среда наиболее существенно изменяется именно в вертикальном направлении, т.е. L_0^{-1} в какой-то мере близок к L^{-1} ;

2) трехмерный оператор Гельмгольца для вертикально-неоднородной среды может быть обращен достаточно быстро с помощью очень эффективных с вычислительной точки зрения методов, таких как БПФ и метод матричной прогонки.

Обсудим теперь, как именно следует выбирать вертикально-неоднородную среду для предобусловливания исходной задачи. Как правило, в реальных приложениях скоростные модели всегда имеют весьма заметный 1D-тренд. В более сложных случаях можно применять следующий подход. Достаточно очевидно, что любой итерационный процесс применительно к системе (3) будет сходиться тем быстрее, чем меньше будет $\|\delta L\|_{L_2}$ (оператор становится ближе к единичному). Таким образом, наилучшим способом определения функции $c_0(z)$ представляется поиск такого 1D скоростного закона, который минимизирует $\|\delta L\|_{L_2}$ во всей целевой области D . Эта задача имеет аналитическое решение. На каждой глубине значение оптимальной 1D скоростной модели находится как среднее по каждой 2D плоскости, выбранной из 3D куба $c(x, y, z)$ при заданном z .

3. Алгоритм численного решения задачи. Как уже упоминалось выше, дискретизация уравнения Гельмгольца в задачах по моделированию распространения волн в неограниченном пространстве приводит к СЛАУ с несимметричными матрицами. К настоящему времени разработан широкий класс итерационных методов крыловского типа для решения таких задач [27]. Среди наиболее употребляемых можно упомянуть такие методы, как GMRES (Generalized Minimal RESidual), BiCGStab (BiConjugate Gradient Stabilized), CGS (Conjugate Gradient Squared) и др. Для решения задач очень большой размерности наиболее популярным оказывается метод BiCGStab. Такой выбор прежде всего объясняется весьма умеренными требованиями к объему оперативной памяти, что выгодно отличает его от такого мощного метода, как GMRES. Каждая итерация BiCGStab состоит из двух операций умножения матрицы решаемой СЛАУ на вектор. Для работы затрачивается оперативная память, необходимая для хранения всего 7 векторов.

В работе [28] предложен весьма эффективный итерационный крыловский метод — IDR(s) (англ. IDR, Induced Dimension Reduction). В ряде случаев он оказывается заметно быстрее, чем BiCGStab, правда при более высоких затратах оперативной памяти. В самой “экономичной” форме, IDR(1), он оказывается математически эквивалентен методу BiCGStab.

Подробное обсуждение самих крыловских методов выходит за рамки данной статьи, поэтому примем здесь за факт, что оптимальным выбором для трехмерных задач моделирования акустических полей будет BiCGStab или его “близкий родственник” — метод IDR(s).

Ключевым моментом в применении итерационных методов крыловского типа является эффективное вычисление произведения матрицы предобусловленной системы на вектор. В общем случае нет необходимости задавать матрицы в явном виде, достаточно определить правило, по которому вычисляется действие матрицы. Таким образом, выбрав тот или иной крыловский метод, для решения задачи необходимо обеспечить расчет выходного вектора, возвращаемого в итеративный “решатель”, по предоставленному “решателем” входному вектору. На рис. 1 приведена общая схема вычислительного процесса.

Опишем теперь, как происходит процедура вычисления действия матрицы на вектор в нашем случае.

Вместо того чтобы рассматривать уравнение (3) как интегральное уравнение, мы будем вычислять действия операторов L_0^{-1} и δL последовательно. Основные вычислительные ресурсы при этом будут затрачиваться на вычисление L_0^{-1} , так как действие δL сводится к покомпонентному умножению/вычитанию двух векторов.

Пусть на данном шаге крыловского метода необходимо вычислить результат действия системы (3) на некоторый вектор f_{input} : $u_{out} = (I - \delta L L_0^{-1}) f_{input}$. Это производится в два этапа.

1. Вычисление $u_{tmp} = L_0^{-1} f_{input}$. Необходимо решить вспомогательное 3D уравнение Гельмгольца с правой частью, задаваемой вектором f_{input} :

$$\Delta u_{tmp} + (1 + i\beta) \frac{\omega^2}{c_0^2(z)} u_{tmp} = f_{input}. \tag{4}$$

Здесь u_{tmp} — вспомогательный вектор, необходимый для хранения промежуточного результата. В зависимости от условий исходной задачи, уравнение (4) рассматривается или в бесконечном пространстве, или в полупространстве, ограниченном сверху свободной поверхностью. В дальнейшем мы предполагаем, что наша расчетная область D лежит в полосе $z \in [0, H]$ и выполняется условие $c_0(z) = c_- = \text{const}$ для $z > H$ и $c_0(z) = c_+ = \text{const}$ для $z < 0$. Благодаря комплексному коэффициенту задача имеет единственное решение, затухающее на бесконечности.

Применим к уравнению (4) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y . В результате получаем семейство обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для набора пространственных частот k_x, k_y :

$$\frac{d^2 U(z; k_x, k_y)}{dz^2} + \left((1 + i\beta) \frac{\omega^2}{c_0^2(z)} - k_x^2 - k_y^2 \right) U(z; k_x, k_y) = F_{input}(z; k_x, k_y), \tag{5}$$

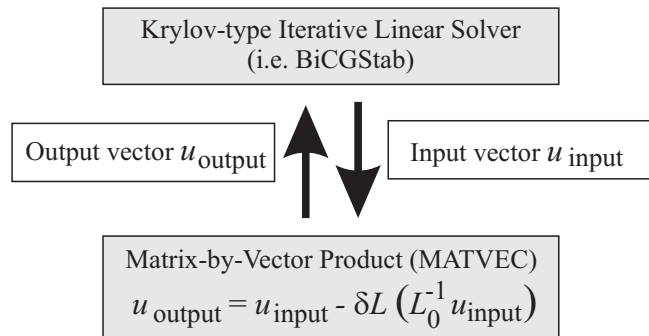


Рис. 1. Общая схема вычислений: реализация итерационного метода крыловского типа без явного задания матриц

где $U(z; k_x, k_y)$, $F_{\text{input}}(z, k_x, k_y)$ — результат двумерного преобразования Фурье по x, y от функций u_{tmp} и f_{input} . При $z = H$ ставится явное условие прохождения:

$$\frac{dU}{dz} - i \left\{ \sqrt{(1+i\beta) \frac{\omega^2}{c_-^2} - k_x^2 - k_y^2} \right\} U = 0, \quad z = H. \quad (6)$$

В зависимости от требований исходной задачи, при $z = 0$ можно поставить условие на свободной поверхности $U = 0$ или же аналогичное условие прохождения:

$$\frac{dU}{dz} + i \left\{ \sqrt{(1+i\beta) \frac{\omega^2}{c_+^2} - k_x^2 - k_y^2} \right\} U = 0, \quad z = 0. \quad (7)$$

Краевая задача (5)–(7) может решаться стандартным способом, т.е. с использованием конечно-разностных аппроксимаций производных. В зависимости от порядка КРА, задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с N -диагональной матрицей (для схемы второго порядка — трехдиагональной, для схемы четвертого порядка — пятидиагональной и т.д.), которая решается одним из вариантов метода прогонки [29]. Подчеркнем, что для каждой пары пространственных частот эта система решается независимо.

Кроме того, можно использовать альтернативный подход, который позволяет получить решение задачи (5)–(7) без конечно-разностных аппроксимаций производных. Как оказалось, предлагаемый нами подход обладает возможностью, весьма интересной применительно к задачам сейсморазведки: он позволяет получить наряду с полным акустическим волновым полем, которое состоит из сложного ансамбля отраженных (восходящих) и проходящих (нисходящих) волн, каждый из этих компонентов независимо без дополнительных вычислительных затрат. Подобный подход использовался, например, в [30, 31] для расчета функций Грина 1D уравнения Гельмгольца. Отличие от рассматриваемого нами случая заключается в том, что в упомянутых работах правая часть уравнения описывала точечный источник, здесь же необходимо получить решение для произвольной правой части. Детальное описание приведено в Приложении. После построения решений (5)–(7) для значимого набора пространственных частот, выполняется обратное преобразование Фурье и находится вектор u_{tmp} .

2. Вычисление $u_{\text{output}} = u_{\text{input}} - [\delta L] u_{\text{tmp}}$ (поточечное умножение/вычитание векторов). Вектор $[\delta L]$ — развернутое в одномерный массив возмущение $\delta L = \omega^2 \left(\frac{(1+i\beta)}{c_0^2(z)} - \frac{1}{c^2(x, y, z)} \right)$. Отметим, что массив $[\delta L]$ должен быть вычислен заранее, до запуска крыловского итерационного процесса; он не меняется в ходе итераций.

3.1. Оценка вычислительных затрат на операцию умножения матрицы предобусловленной системы (3) на произвольный вектор. Оценим теперь число операций с плавающей точкой, необходимых для вычисления действия предобусловленного оператора исходной задачи на вектор. Пусть N_x, N_y, N_z — число точек по x, y, z соответственно.

1. Двумерное быстрое преобразование Фурье (прямое и обратное) выполняется для каждого отсчета по глубине, поэтому требует $2N_x N_y N_z \log_2(N_x N_y)$ операций.

2. При использовании конечно-разностных аппроксимаций четвертого порядка для производных в (5)–(7) получается набор пятидиагональных матриц, решение которых методом пятиточечной прогонки для всех пар пространственных частот требует $(19N_z - 10)N_x N_y$ операций умножения (деления)/сложения (вычитания) [29].

3. Поэлементное умножение/вычитание векторов $[\delta L]$ и u_{tmp} требует $2N_x N_y N_z$ операций. Пусть заданы $n = N_x = N_y = N_z = 1000$ точек (т.е. полный размер СЛАУ составляет $10^9 \times 10^9$, что вполне типично для задач сейсморазведки). Тогда $\log_2 N_x N_y \sim 20$. Таким образом, общее число операций с плавающей точкой может быть приблизительно оценено как $O(n^3) \sim 60n^3$.

Напомним, что арифметические операции производятся с комплексными числами.

3.2. Некоторые замечания по ускорению вычисления умножения матрицы на вектор для предобусловленной системы (3). Прежде чем перейти к описанию численных экспериментов, мы хотели бы отметить некоторые свойства этой операции в нашем случае, которые могут существенно ускорить вычисления.

1. Самая затратная часть операции умножения матрицы на вектор $L_0^{-1} f_{\text{input}}$ распадается на серию совершенно независимых друг от друга вычислений. Первый шаг — это N_z вычисляемых независимо друг

от друга двумерных быстрых преобразований Фурье. Затем следует $N_x N_y$ независимо решаемых ОДУ (5)–(7). И наконец, N_z независимых быстрых обратных двумерных преобразований Фурье. Это свойство очень благоприятно при реализации алгоритма на современных многопроцессорных системах.

2. Поскольку коэффициент в ОДУ (5) имеет большую мнимую часть, решения быстро затухают для всех пространственных частот $k_x^2 + k_y^2 > \frac{\omega^2}{v_{0\min}^2}$. Оказывается, что нет необходимости решать задачи (5)–(7) для пар частот, лежащих вне круга $k_x^2 + k_y^2 \sim 2.5 \left(\frac{\omega^2}{v_{0\min}^2} \right)$ в силу того, что их решения практически неотличимы от нулевого. Этот факт позволяет существенно сократить количество решаемых ОДУ, что заметно повышает скорость вычисления $L_0^{-1} f_{\text{input}}$.

4. Верификация алгоритма. Программная реализация описанного алгоритма была выполнена на основе уже имеющихся математических пакетов, оптимизированных под использование на современных высокопроизводительных вычислительных системах. Итерационный “решатель” (BiCGStab) является частью свободной библиотеки итерационных методов PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>), быстрое преобразование Фурье и основные векторные операции выполнялись с помощью библиотеки Intel MKL.

Для того чтобы проверить работоспособность предложенного метода, нами была проведена серия численных экспериментов для простых скоростных моделей. Помимо проверки программной реализации алгоритма, мы задавались целью выяснить, какую максимальную дискретизацию можно использовать для получения решения с приемлемой точностью.

По построению предобусловленной системы (3) очевидно, что в случае строго вертикально-неоднородной модели среды (в том числе и однородной) при соответствующем выборе скорости в предобусловливателе $c_0(z) = c_{\text{actual}}(z)$ и комплексного параметра $\beta = 0$, возмущение δL оказывается равным нулю. Это приводит к тому, что решение будет строиться “почти аналитически” без итераций крыловского метода. Поскольку нам требуется протестировать работоспособность алгоритма в целом, для проведения верификации нами выбирались заведомо неоптимальные параметры в предобусловливателе. Отметим, что выбор неоптимальной 1D-скорости приводит только к увеличению числа итераций, но никак не влияет на полученный результат. Решения, полученные для различных $c_0(z)$, отличаются друг от друга на величину, сравнимую с машинной точностью вычислений.

Приведем пример расчета акустического волнового поля для частоты $\omega = 20\pi$ рад/с (временная частота $\nu = 10$ Гц) в трехмерной модели с постоянной скоростью, равной 1500 м/сек. Размер расчетной области составлял $N_x = 401$, $N_y = 401$, $N_z = 201$ точек при шагах дискретизации $h_x = h_y = 60$ м, $h_z = 30$ м. Точечный источник располагался в центре вычислительной области $x_s = y_s = 12000$ м, $z_s = 2400$ м.

Расчетная область была окружена переходными слоями (речь о которых шла выше) по 30 точек в каждом направлении, т.е. полный размер задачи составил $461 \times 461 \times 321$ точек.

Для решения ОДУ (5) в вертикальном направлении в данном примере была выбрана стандартная центральная конечно-разностная схема 6-го порядка.

Таким образом, в дискретизованной задаче имеем 2.5 отсчета на минимальную длину волны по латеральным координатам x, y (вдоль которых используется псевдоспектральный метод вычисления производных) и 5 отсчетов на λ_{\min} по глубине. При выборе 1D-скорости для предобусловливателя вместо постоянной скорости $c_0(z) = c_{\text{actual}} = 1500$ м/сек., совпадающей со скоростью в среде, нами был выбран линейный закон, при котором скорость линейно возрастает с глубиной от 1500 до 4500 м/сек. Параметром затухания в предобусловливателе был выбран $\beta = 0.5$. В качестве критерия остановки итераций BiCGStab мы использовали падение уровня невязки до 10^{-5} . Потребовалось 26 итераций, чтобы получить решение указанной точности.

Полученное решение (вещественная часть представлена на рис. 2) сравнивалось с аналитическим решением $\frac{1}{4\pi r} \exp(i \frac{\omega}{c} r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ошибка в решении не превышает 0.5–1%. Сравнение несколь-

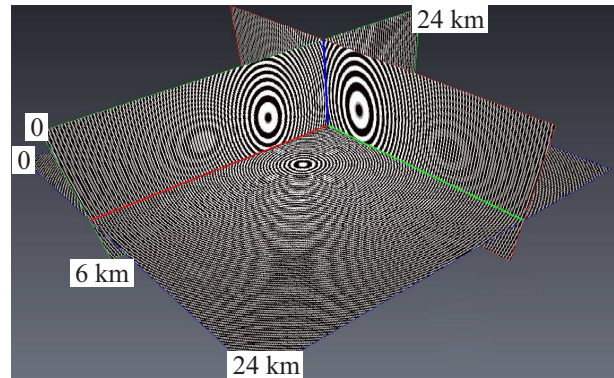


Рис. 2. Вещественная часть рассчитанного волнового поля в трехмерной однородной модели на частоте 10 Гц (амплитуды усилены)

ких одномерных сечений аналитического и полученного решений приведены на рис. 3 и 4. В большинстве точек они практически неразличимы.

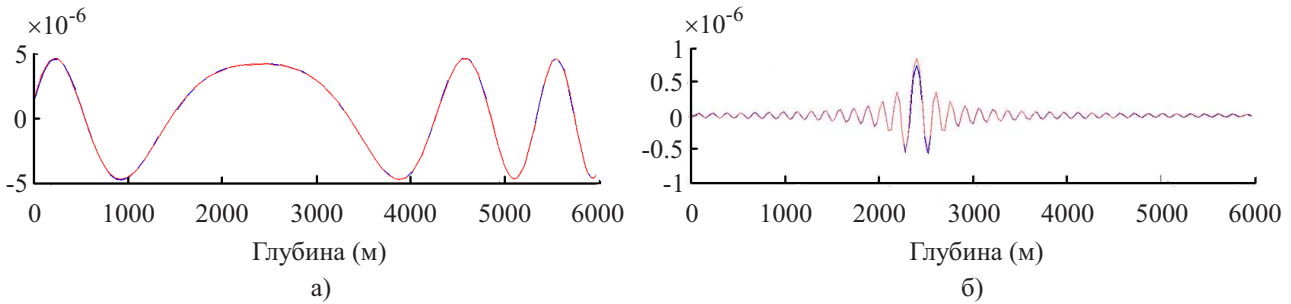


Рис. 3. Сравнение с аналитическим решением: одномерные сечения вдоль оси z . Аналитическое решение изображено красным (оба решения почти неотличимы): а) $x = y = 30$ м, б) $x = y = 12000$ м

5. Расчет акустического волнового поля в двумерной модели Gullfaks. Двумерная модель скоростей продольных сейсмических волн, приведенная на рис. 5, описывает строение месторождения Gullfaks, расположенного в Северном море у побережья Норвегии [33] (исходная модель выделена черным прямоугольником, см. описание ниже). В этой скоростной модели нами было рассчитано волновое поле для одного точечного источника, расположенного при $x_s = 2000$ м, $z_s = 5$ м.

Для наглядности ниже мы приводим “моментальные снимки” волнового поля, на которых отображается состояние волнового процесса в фиксированный момент времени. Для этого нам необходимо пересчитать волновое поле, полученное в частотной области при решении уравнения Гельмгольца на каждой частоте, во временную область, выполнив обратное преобразование Фурье. Анализируя поведение волнового поля на неоднородностях скоростного разреза и на границах расчетной области, с помощью моментальных изображений можно наглядно оценить достоверность полученных результатов. Кроме того, возможно убедиться в отсутствии различных искажений, вызванных особенностями численных процедур, например в отсутствии численной дисперсии при выборе достаточно большой пространственной дискретизации исходной задачи.

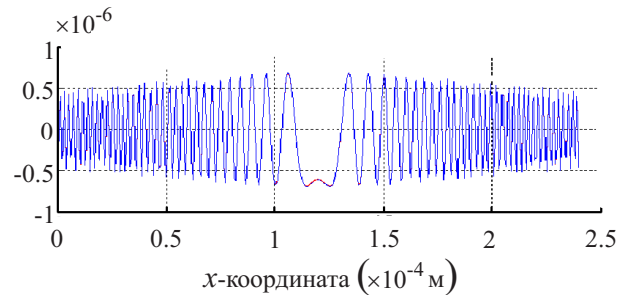


Рис. 4. Сравнение с аналитическим решением: одномерные сечения вдоль оси x . Аналитическое решение изображено красным (оба решения почти неотличимы): $y = 6000$, $z = 2000$

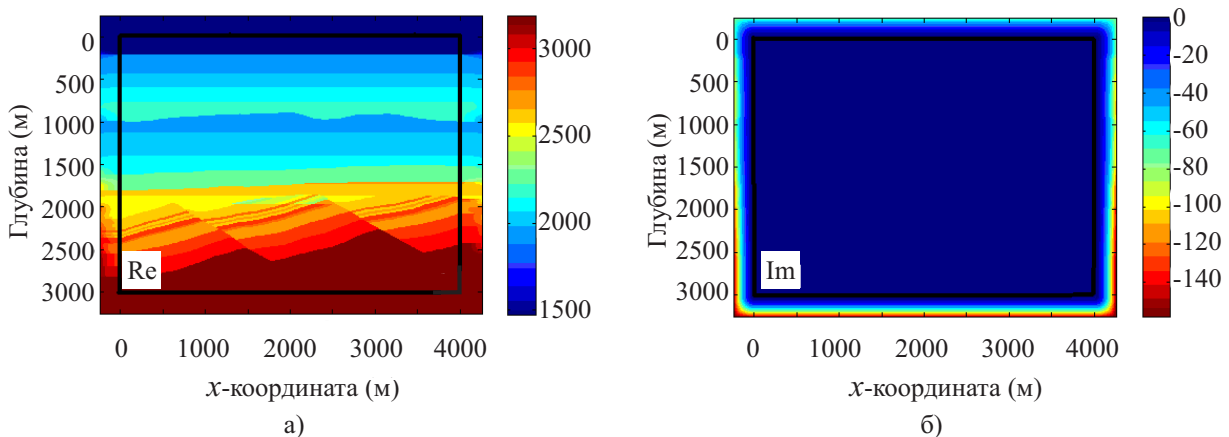


Рис. 5. Скоростная модель Gullfaks с введенными сглаженными переходными слоями: а) вещественная часть; б) мнимая часть. Исходная модель выделена прямоугольником

Вычисления проводились последовательно для 601-й частоты, равномерно расположенной в диапазоне 0.1–90 Гц. В качестве функции зондирующего сигнала использовался импульс Рикера с доминирующей частотой 50 Гц. Дискретизация модели была одинаковой для всех частот. Шаг по пространству

составлял $h_x = h_z = 5$ м. Таким образом, в данном случае мы имеем ~ 3.2 отсчета на минимальную длину волны. Отметим, что в стандартных методах, основанных на использовании конечно-разностных аппроксимаций производных, такая дискретизация модели гарантирует приемлемую точность решения (отсутствие численной дисперсии) только для схем высокого порядка (не ниже 8-го порядка).

В этом примере для решения систем (5)–(7) мы использовали подход без использования КРА, описанный в Приложении.

Значение параметра комплексного дамппинга β равнялось 0.25. Введение сглаженных переходных слоев подразумевает, что на границах области скорость становится комплексной, причем мнимая часть отлична от нуля только в переходных слоях. Скоростная модель с введенными переходными слоями показана на рис. 5. В данном примере ширина сглаженных переходных слоев была выбрана равной 50 точкам в каждом из направлений, т.е. полная дискретизованная модель имела размерность $N_x = 901, N_z = 701$ точек.

График зависимости числа итераций метода BiCGStab от частоты приведен на рис. 6. Итерационный процесс останавливался, как только невязка оказывалась меньше 10^{-5} . Практически неизбежным в подобного рода задачах оказывается рост числа итераций при повышении частоты (или, будет правильнее сказать, при увеличении числа длин волн, которые надо “уложить” в расчетную область заданного размера). Это связано с ухудшением спектральных свойств СЛАУ при росте волнового числа. В настоящее время, насколько нам известно, не существует предобусловливателя, который не имел бы подобных свойств. Число итераций можно существенно сократить путем введения дополнительных многоуровневых предобусловливателей, т.е. предобусловливать уже предобусловленную систему. При этом возникает необходимость искать приемлемый компромисс между количеством итераций и вычислительной стоимостью каждой итерации [18, 32].

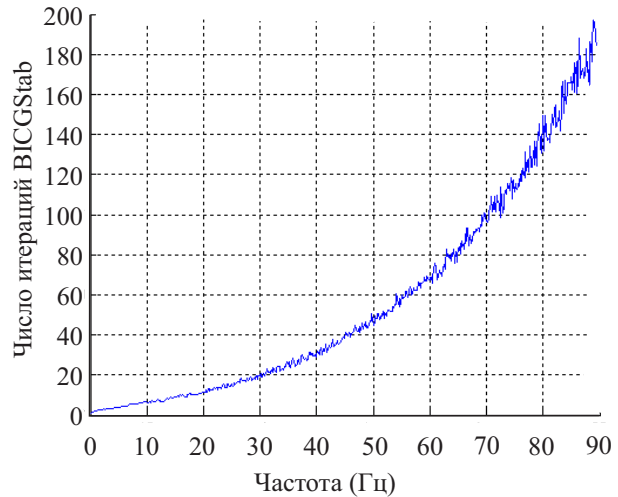


Рис. 6. График зависимости числа итераций метода BiCGStab от частоты для модели Gullfaks

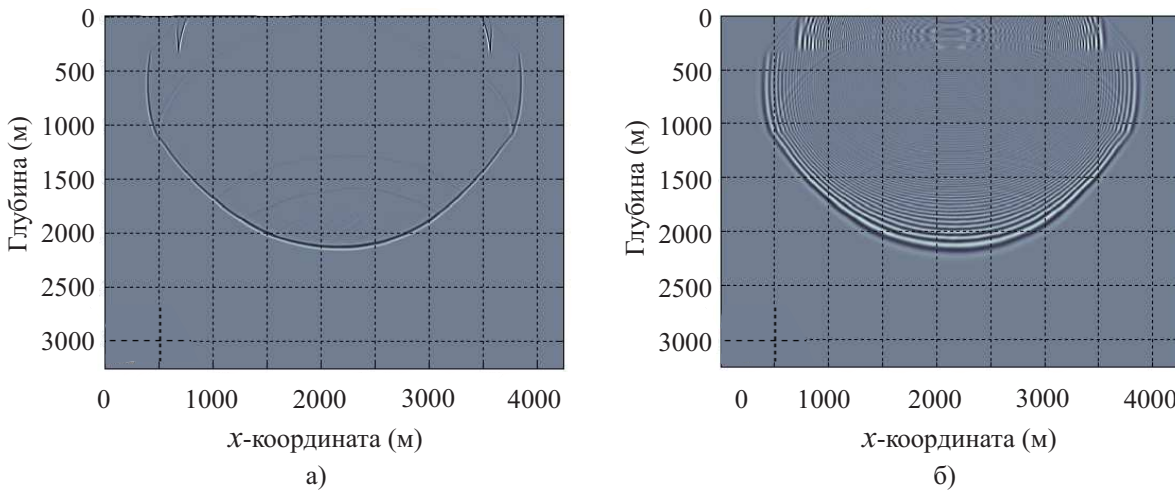


Рис. 7. Сравнение моментальных снимков волнового поля, рассчитанного итерационным методом в частотной области (а) и с использованием явной конечно-разностной схемы второго порядка во временной области (б); момент времени $t = 1$ сек. (амплитуды усилены): а) FDtime = 1, nu0 = 50; б) TDtime = 1, nu0 = 50

На рис. 7 приведено сравнение моментальных изображений волнового поля при $t = 1$ сек. На рис. 7а представлен результат, полученный предложенным итерационным методом (после выполнения обратного преобразования Фурье по времени). На рис. 7б — волновое поле, рассчитанное во временной области с помощью традиционного метода конечных разностей второго порядка. Видно, что волновой фронт во втором случае очень сильно искажается: вслед за прямой волной тянется “хвост” нефизичных вступлений,

реальная волна “распадается” на составляющие, каждая из которых распространяется со своей скоростью. Это и есть проявление эффекта численной дисперсии при недостаточно малом шаге дискретизации сетки. Так как в нашем случае КРА не используются, результат достаточно адекватен и при весьма грубой дискретизации задачи для выбранного диапазона частот.

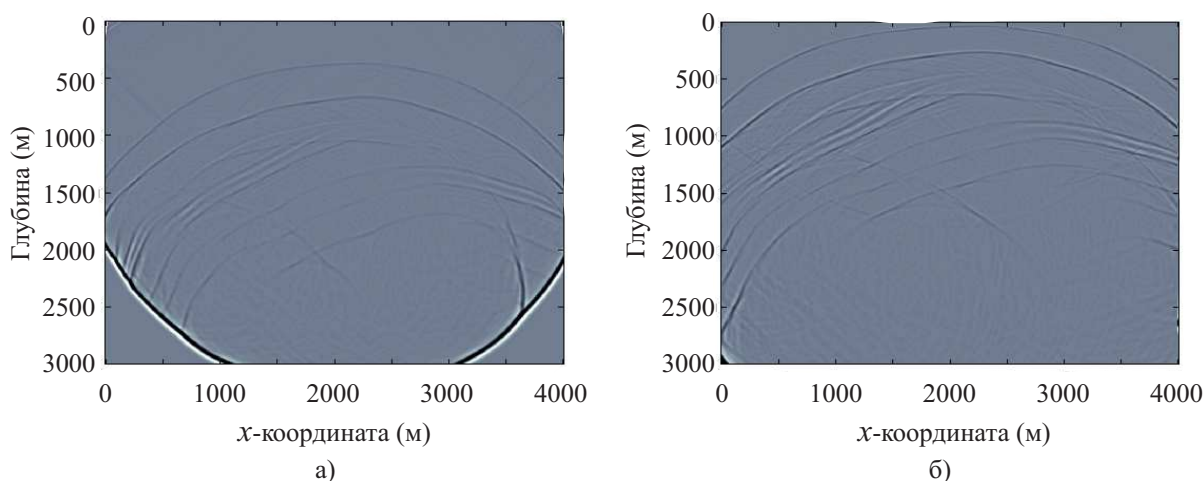


Рис. 8. Моментальные снимки волнового поля, рассчитанного итерационным методом в частотной области в моменты времени $t = 1.4$ сек. (а) и $t = 1.6$ сек. (б) (амплитуды усилены)

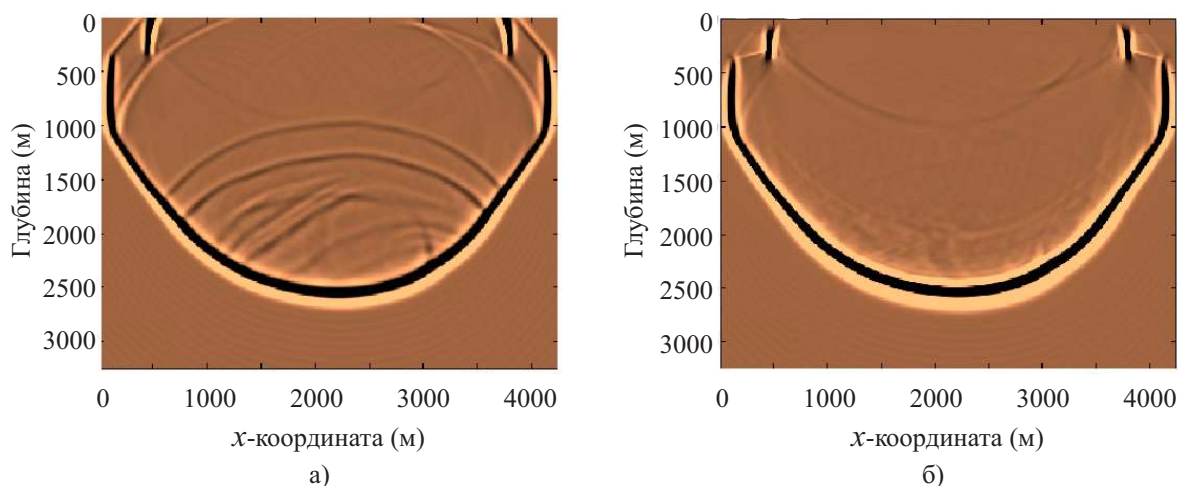


Рис. 9. Моментальные снимки полного волнового поля (а) и его выделенной нисходящей компоненты (б) в момент времени $t = 1.2$ (амплитуды усилены)

На рис. 8 представлены моментальные снимки для более поздних моментов времени: $t = 1.4$, $t = 1.6$ сек. Как и предсказывалось теоретически, при правильном введении переходных слоев на краях модели не возникает видимых артефактных отражений.

В заключение приведем пример разделения полного волнового поля на нисходящие/восходящие компоненты при решении уравнения Гельмгольца предложенным в данной работе методом. Такая возможность возникает при использовании “почти аналитического” подхода для решения краевых задач (5)–(7), который описан в Приложении. Разделение происходит автоматически и не требует дополнительных вычислительных затрат. На рис. 9а показан моментальный снимок полного волнового поля в 2D модели Gullfax для функции зондирующего сигнала с доминирующей частотой 25 Гц. На рис. 9б мы приводим для сравнения его выделенную нисходящую компоненту.

Подобное свойство может оказаться очень полезным при решении прямых и обратных задач сейсмологии.

6. Заключение. В настоящей статье предложен итерационный метод решения трехмерного уравнения Гельмгольца с “почти аналитическим” предобусловливателем. В качестве предобусловливателя предлагается использовать 3D оператор Гельмгольца для вертикально-неоднородной среды с затуханием. Оператор Гельмгольца исходной задачи представляется как возмущение оператора предобусловливателя. В

результате, операция умножения матрицы на вектор для предобусловленной СЛАУ может быть эффективно вычислена при помощи двухмерного быстрого преобразования Фурье по горизонтальным координатам x, y и последующим решением дискретизованного набора обыкновенных дифференциальных уравнений по третьей переменной z (глубине) методом матричной прогонки. Решение предобусловленной системы может производиться без использования конечно-разностных аппроксимаций, что позволяет дискретизовать исходную задачу с более крупным шагом сетки, чем в стандартных подходах. По результатам численных экспериментов показано, что предложенный предобусловливатель позволяет весьма эффективно рассчитывать волновые поля в частотной области в трехмерно-неоднородных средах с умеренными латеральными вариациями скорости.

Приложение. Решение краевых задач (5)–(7) без использования конечно-разностных аппроксимаций. Приведем здесь описание альтернативного подхода к решению краевой задачи (5)–(7), который позволяет решать ее без использования конечно-разностных аппроксимаций производных.

Предположим, что одномерная скорость $c_0(z)$, используемая в предобусловливателе, состоит из N_z^{Int} кусочно-постоянных интервалов. В самом общем случае будем считать, что N_z^{Int} совпадает с числом узлов сетки по направлению z , т.е. $N_z^{\text{Int}} = N_z$. После дискретизации задачи для каждой пары пространственных частот, коэффициент ОДУ (5) внутри каждого интервала $z \in [z_{j-1}, z_j]$ можно считать постоянным:

$$K_j^2 = (1 + i\beta) \frac{\omega^2}{c_{0j}^2} - k_x^2 - k_y^2 = \text{const}.$$

Здесь c_{0j} — значение скорости $c_0(z)$ в j -м интервале.

Рассмотрим на каждом интервале ОДУ второго порядка с постоянным коэффициентом:

$$\frac{d^2 U_j(z)}{dz^2} + K_j^2 U_j(z) = F_j(z), \tag{8}$$

где $F_j(z)$ — часть вектора правой части, попадающая в j -й интервал.

Общее решение уравнения (8) можно записать в явном виде как сумму фундаментального решения однородного ОДУ и произвольного частного решения неоднородного ОДУ:

$$U_j(z) = B_j \exp(-iK_j z) + C_j \exp(iK_j z) + Q_j(z). \tag{9}$$

Для того чтобы построить решение краевой задачи (5)–(7), необходимо определить все коэффициенты B_j и C_j . Для этого мы используем условия непрерывности искомой функции $U(z)$ и ее первой производной во всех внутренних точках $z \in (0, H)$:

$$U(z_j - 0) = U(z_j + 0); \quad \frac{dU(z_j - 0)}{dz} = \frac{dU(z_j + 0)}{dz}; \quad j = 1, \dots, N_z^{\text{Int}} - 2. \tag{10}$$

Слагаемые $Q_j(z)$ можно вычислить, например, через фундаментальное решение одномерного уравнения Гельмгольца [34]:

$$Q_j(z) = \frac{1}{2iK_j} \int_0^{h_j} F_j(\xi) \exp(iK_j |z - \xi|) d\xi,$$

где h_j — длина j -го интервала. Мы полагаем, что внутри каждого интервала $z \in [0, h_j]$. Когда внутри интервала оказывается всего один отсчет, $Q_j(z)$ (и первая производная $Q_j'(z)$) имеют аналитическое выражение.

Условия прохождения (6)–(7) будут выполнены, если $C_0 = 0, B_{N_z^{\text{Int}}-1} = 0$. Для определения остальных коэффициентов B_j, C_j из условий (10) требуется решить систему

$$\begin{aligned} \exp(iK_{j-1} h_{j-1}) C_{j-1} + \exp(-iK_{j-1} h_{j-1}) B_{j-1} - C_j - B_j &= Q_j(0) - Q_{j-1}(h_{j-1}), \\ iK_{j-1} \exp(iK_{j-1} h_{j-1}) C_{j-1} - iK_{j-1} \exp(-iK_{j-1} h_{j-1}) B_{j-1} - iK_j C_j + iK_j B_j &= Q_j'(0) - Q_{j-1}'(h_{j-1}). \end{aligned} \tag{11}$$

Эта система размерности $2N_z^{\text{Int}} - 4$ имеет пятидиагональный вид и может быть решена методом пятиточечной прогонки. Отметим, что путем элементарных преобразований она приводится к трехдиагональному виду.

После того как коэффициенты B_j, C_j будут найдены, искомое решение $U(z)$ восстанавливается по формуле (9) во всех узлах сетки $z_j, j = 0, \dots, N_z - 1$.

Как показывают численные эксперименты, самым дорогостоящим с вычислительной точки зрения этапом в описанном подходе является расчет коэффициентов и правых частей системы (11), а также восстановление решения. Само решение системы требует не более 10% затрачиваемого расчетного времени. Вычислительные затраты можно сократить, если хранить прогоночные коэффициенты для всех краевых задач (5)–(7) (число которых можно оценить как $N_x N_y$), так как от итерации к итерации меняются только правые части в (11).

Отметим интересную возможность, которую предоставляет этот подход. После того как найдены коэффициенты B_j , C_j , происходит восстановление решения в виде (9), т.е. в виде суммы восходящих и нисходящих волн. Можно собирать решение только из восходящих (зануляя C_j) или нисходящих (зануляя B_j) волн. Отметим, что, выполняя эту операцию при итерациях крыловского метода, можно получить решение, не имеющее особого физического смысла. Имеет смысл делать это на этапе “выхода” из предобуславливания, т.е. при вычислении решения исходной задачи $u = L_0^{-1}\tilde{u}$. Как результат, наряду с полным волновым полем можно построить его восходящую и нисходящую компоненты практически без дополнительных вычислительных затрат. Пример такого разделения (выделения только нисходящей волны) приведен на рис. 9.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-05-00947, 12-05-31008, 13-05-00076). Вычисления проводились на кластерах МВС-100К Московского межведомственного суперкомпьютерного центра РАН и СКИФ “Чебышев” (МГУ им. М. В. Ломоносова).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pratt R.G. Seismic waveform inversion in the frequency domain. Part 1: Theory and verification in a physical scale model // *Geophysics*. 1999. **64**, N 3. 888–901.
2. Mulder W.A., Plessix R.-E. Exploring some issues in acoustic full waveform inversion // *Geophysical Prospecting*. 2008. **56**, N 6. 827–841.
3. Virieux J., Operto S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics // *Geophysics*. 2009. **74**, N 6. WCC1–WCC26.
4. Schenk O., Gärtner K. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO // *Future Gen. Comput. Syst.* 2004. **20**, N 3. 475–487.
5. Operto S., Virieux J., Amestoy P., L'Excellent J.-Y., Giraud L., Ali H.B.H. 3D finite-difference frequency-domain modeling of visco-acoustic wave propagation using a massively parallel direct solver: A feasibility study // *Geophysics*. 2007. **72**, N 5. SM195–SM211.
6. Sourbier F., Operto S., Haidar A., Giraud L., Virieux J. Frequency-domain full-waveform modeling using a hybrid direct-iterative solver based on a parallel domain decomposition method: a tool for 3D full-waveform inversion? // *SEG Tech. Program Expanded Abstr.* 2008. **27**, N 1. 2147–2151.
7. Erlangga Y.A. Advances in iterative methods and preconditioners for the Helmholtz equation // *Arch. Comput. Methods Eng.* 2008. **15**, N 1. 37–66.
8. Wang S., de Hoop M.V., Xia J. On 3D modeling of seismic wave propagation via a structured parallel multifrontal direct Helmholtz solver // *Geophysical Prospecting*. 2011. **59**, N 5. 857–873.
9. Trefethen L., Bau D. Numerical linear algebra. Philadelphia: SIAM, 1997.
10. Bayliss A., Goldstein C.I., Turkel E. An iterative method for the Helmholtz equation // *Journal of Computational Physics*. 1983. **49**, N 3. 443–457.
11. Erlangga Y.A., Vuik C., Oosterlee C.W. On a class of preconditioners for solving the Helmholtz equation // *Applied Numerical Mathematics*. 2004. **50**, N 3–4. 409–425.
12. Erlangga Y.A., Oosterlee C.W., Vuik C. A novel multigrid based preconditioner for heterogeneous Helmholtz problems // *SIAM J. Sci. Comput.* 2006. **27**, N 4. 1471–1492.
13. Riyanti C.D., Erlangga Y.A., Plessix R.-E., Mulder W.A., Vuik C., Oosterlee C. A new iterative solver for the time-harmonic wave equation // *Geophysics*. 2006. **71**, N 5. E57–E63.
14. Duff I., Gratton S., Pinel X., Vasseur X. Multigrid based preconditioners for the numerical solution of two-dimensional heterogeneous problems in geophysics // *International Journal of Computer Mathematics*. 2007. **84**, N 8, 1167–1181.
15. Kim S., Kim S. Multigrid simulation for high-frequency solutions of the Helmholtz problem in heterogeneous media // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2002. **24**, N 2. 684–701.
16. Plessix R.-E. A Helmholtz iterative solver for 3D seismic-imaging problems // *Geophysics*. 2007. **72**, N 5. SM185–SM194.
17. Plessix R.-E. Three-dimensional frequency-domain full-waveform inversion with an iterative solver // *Geophysics*. 2009. **74**, N 6. WCC53–WCC61.
18. Erlangga Y.A., Herrmann F.J. An iterative multilevel method for computing wavefields in frequency-domain seismic inversion // *SEG Tech. Program Expanded Abstr.* 2008. **27**, N 1. 1956–1960.
19. Engquist B., Ying L. Sweeping preconditioner for the Helmholtz equation: moving perfectly matched layers // *Multiscale Model. Simul.* 2011. **9**, N 2. 686–710.

20. Calandra H., Gratton S., Pinel X., Vasseur X. An improved two-grid preconditioner for the solution of three-dimensional Helmholtz problems in heterogeneous media // Numerical Linear Algebra with Applications. 2013. **20**, N 4. 663–688.
21. Abubakar A., Habashy T.M. Three-dimensional visco-acoustic modeling using a renormalized integral equation iterative solver // Journal of Computational Physics. 2013. **249**. 1–12.
22. Neklyudov D.A., Tcheverda V.A. A Helmholtz iterative solver without of finite-difference approximations // Proc. 72nd EAGE Conference and Exhibition. Extended Abstracts. Barcelona: Barcelona International Convention Centre, 2010. G006.
23. Neklyudov D., Silvestrov I., Tcheverda V. Frequency domain iterative solver for elasticity with semi-analytical preconditioner // Proc. 81st SEG Annual Meeting, 2011, San-Antonio, USA. Expanded Abstracts. Vol. 30. Tulsa: Soc. Explor. Geophysicists, 2011. 2931–2935.
24. Эйдус Д.М. О принципе предельного поглощения // Математический сборник. 1962. **57**, № 1. 13–44.
25. Вайнберг Б.П. Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1966. **21**, № 3. 115–194.
26. Chen K. Matrix preconditioning techniques and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
27. Barrett R., Berry M.W., Chan T.F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., van der Vorst H. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods. Philadelphia: SIAM, 1993.
28. Sonneveld P., van Gijzen M.B. IDR(s): A family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric systems of linear equations // SIAM J. Sci. Comput. 2008. **31**, N 2. 1035–1062.
29. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1979.
30. Смагин С.И. Расчет функции Грина уравнения Гельмгольца с одномерным кусочно-постоянным волновым числом // Условно-корректные задачи математической физики в интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1978. 105–127.
31. Cheverda V.A., Clement F., Khaidukov V.G., Kostin V.I. Linearized inversion of data of multi-offset data for vertically-inhomogeneous background // Journal of Inverse and Ill-Posed problems. 1998. **6**, N 5. 453–484.
32. Neklyudov D., Dmitriev M., Belonosov M., Tcheverda V. Frequency-domain iterative solver for 3D acoustic wave equation with two-stage semi-analytical preconditioner // 76-th EAGE Conference and Exhibition, Amsterdam, The Netherlands, 2014. Extended Abstracts. Amsterdam, 2014. Tu G105 09.
33. Thompson M., Arntsen B., Amundsen L. Acquisition geometry versus 4C image quality: A study from Gullfaks South // 73rd SEG Annual International Meeting, 2003. Expanded Abstracts. Vol. 22. Tulsa: Soc. Explor. Geophysicists, 2003. 793–796.
34. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М: Наука, 1970.

Поступила в редакцию
24.07.2014

A 3D Helmholtz Iterative Solver with a Semi-Analytical Preconditioner for Acoustic Wavefield Modeling in Seismic Exploration Problems

D. A. Neklyudov¹, I. Yu. Silvestrov², and V. A. Tcheverda³

¹ Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; PH.D., Senior Scientist, e-mail: dmitn@mail.ru

² Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; PH.D., Senior Scientist, e-mail: silverilya@gmail.com

³ Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Koptyug prospekt 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Head of Division, e-mail: CheverdaVA@ipgg.sbras.ru

Received July 24, 2014

Abstract: An approach to the iterative solution of the 3D acoustic wave equation in a frequency domain is proposed, substantiated, and verified numerically. Our method is based on Krylov-type linear solvers, similarly to several other iterative solver approaches. The distinctive feature of our method is the use of a right preconditioner obtained as the solution of the complex dumped Helmholtz equation in a 1D medium, where velocities vary only with depth. The actual Helmholtz operator is represented as a perturbation of the preconditioner. As a result, a matrix-by-vector multiplication of the preconditioned system can be efficiently evaluated via 2D FFT

in x and y directions followed by the solution of a number of ordinary differential equations in z directions. While solving ODE's. it is possible to treat the 1D velocity function as a piecewise constant one and to search for the exact solution as a superposition of upgoing and downgoing waves. This approach allows one not to use explicit finite-difference approximations of derivatives at all. The method has excellent dispersion properties in both lateral and vertical directions.

Keywords: Helmholtz equation, iterative methods, preconditioners, acoustic waves, seismic exploration.

References

1. R. G. Pratt, "Seismic Waveform Inversion in the Frequency Domain. Part 1: Theory and Verification in a Physical Scale Model," *Geophys.* **64** (3), 888–901 (1999).
2. W. A. Mulder and R.-E. Plessix, "Exploring Some Issues in Acoustic Full Waveform Inversion," *Geophys. Prospect.* **56** (6), 827–841 (2008).
3. J. Virieux and S. Operto, "An Overview of Full-Waveform Inversion in Exploration Geophysics," *Geophys.* **74** (6), WCC1–WCC26 (2009).
4. O. Schenk and K. Gärtner, "Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO," *Future Gen. Comput. Syst.* **20** (3), 475–487 (2004).
5. S. Operto, J. Virieux, P. Amestoy, et al., "3D Finite-Difference Frequency-Domain Modeling of Visco-Acoustic Wave Propagation Using a Massively Parallel Direct Solver: A Feasibility Study," *Geophys.* **72** (5), SM195–SM211 (2007).
6. F. Sourbier, S. Operto, A. Haidar, et al., "Frequency-Domain Full-Waveform Modeling Using a Hybrid Direct-Iterative Solver Based on a Parallel Domain Decomposition Method: A Tool for 3D Full-Waveform Inversion?," *SEG Tech. Program Expanded Abstr.* **27** (1), 2147–2151 (2008).
7. Y. A. Erlangga, "Advances in Iterative Methods and Preconditioners for the Helmholtz Equation," *Arch. Comput. Methods Eng.* **15** (1), 37–66 (2008).
8. S. Wang, M. V. de Hoop, and J. Xia, "On 3D Modeling of Seismic Wave Propagation Via a Structured Parallel Multifrontal Direct Helmholtz Solver," *Geophys. Prospect.* **59** (5), 857–873 (2011).
9. L. Trefethen and D. Bau, *Numerical Linear Algebra* (SIAM, Philadelphia, 1997).
10. A. Bayliss, C. I. Goldstein, and E. Turkel, "An Iterative Method for the Helmholtz Equation," *J. Comput. Phys.* **49** (3), 443–457 (1983).
11. Y. A. Erlangga, C. Vuik, and C. W. Oosterlee, "On a Class of Preconditioners for Solving the Helmholtz Equation," *Appl. Numer. Math.* **50** (3–4), 409–425 (2004).
12. Y. A. Erlangga, C. W. Oosterlee, and C. Vuik, "A Novel Multigrid Based Preconditioner for Heterogeneous Helmholtz Problems," *SIAM J. Sci. Comput.* **27** (4), 1471–1492 (2006).
13. C. D. Riyanti, Y. A. Erlangga, R.-E. Plessix, et al., "A New Iterative Solver for the Time-Harmonic Wave Equation," *Geophys.* **71** (5), E57–E63 (2006).
14. I. Duff, S. Gratton, X. Pinel, and X. Vasseur, "Multigrid Based Preconditioners for the Numerical Solution of Two-Dimensional Heterogeneous Problems in Geophysics," *Int. J. Comput. Math.* **84** (8), 1167–1181 (2007).
15. S. Kim and S. Kim, "Multigrid Simulation for High-Frequency Solutions of the Helmholtz Problem in Heterogeneous Media," *SIAM J. Sci. Comput.* **24** (2), 684–701 (2002).
16. R.-E. Plessix, "A Helmholtz Iterative Solver for 3D Seismic-Imaging Problems," *Geophys.* **72** (5), SM185–SM194 (2007).
17. R.-E. Plessix, "Three-Dimensional Frequency-Domain Full-Waveform Inversion with an Iterative Solver," *Geophys.* **74** (6), WCC53–WCC61 (2009).
18. Y. A. Erlangga and F. J. Herrmann, "An Iterative Multilevel Method for Computing Wavefields in Frequency-Domain Seismic Inversion," *SEG Tech. Program Expanded Abstr.* **27** (1), 1956–1960 (2008).
19. B. Engquist and L. Ying, "Sweeping Preconditioner for the Helmholtz Equation: Moving Perfectly Matched Layers," *Multiscale Model. Simul.* **9** (2), 686–710 (2011).
20. H. Calandra, S. Gratton, X. Pinel, and X. Vasseur, "An Improved Two-Grid Preconditioner for the Solution of Three-Dimensional Helmholtz Problems in Heterogeneous Media," *Numer. Linear Algebra Appl.* **20** (4), 663–688 (2013).
21. A. Abubakar and T. M. Habashy, "Three-Dimensional Visco-Acoustic Modeling Using a Renormalized Integral Equation Iterative Solver," *J. Comput. Phys.* **249**, 1–12 (2013).
22. D. A. Neklyudov and V. A. Tcheverda, "A Helmholtz Iterative Solver without of Finite-Difference Approximations," in *Proc. 72nd EAGE Conference and Exhibition. Extended Abstracts* (Barcelona Int. Convention Centre, Barcelona, 2010), p. G006.

23. D. Neklyudov, I. Silvestrov, V. Tcheverda, "Frequency Domain Iterative Solver for Elasticity with Semi-Analytical Preconditioner," in *Proc. 81st SEG Annual Meeting. Expanded Abstracts* (Soc. Explor. Geophysicists, Tulsa, 2011), Vol. 30, pp. 2931–2935.
24. D. M. Eidus, "The Principle of Limit Absorption," *Mat. Sb.* **57** (1), 13–44 (1962) [Amer. Math. Soc. Trans. Ser 2. **47**, 157–191 (1965)].
25. B. R. Vainberg, "Principles of Radiation, Limit Absorption and Limit Amplitude in the General Theory of Partial Differential Equations," *Usp. Mat. Nauk* **21** (3), 115–194 (1966) [Russ. Math. Surv. **21** (3), 115–193 (1966)].
26. K. Chen, *Matrix Preconditioning Techniques and Applications* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005).
27. R. Barrett, M. W. Berry, T. F. Chan, et al., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods* (SIAM, Philadelphia, 1993).
28. P. Sonneveld and M. B. van Gijzen, "IDR(s): A Family of Simple and Fast Algorithms for Solving Large Nonsymmetric Systems of Linear Equations," *SIAM J. Sci. Comput.* **31** (2), 1035–1062 (2008).
29. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Numerical Methods for Grid Equations* (Nauka, Moscow, 1979; Birkhäuser, Basel, 1989).
30. S. I. Smagin, "Calculation of Green's Function for Helmholtz's Equation with One-Dimensional Piecewise Constant Wave Number," in *Conditionally Well-Posed Problems of Mathematical Physics in the Interpretation of Geophysical Observations* (Comput. Center Russ. Acad. Sci., Novosibirsk, 1978), pp. 105–127.
31. V. A. Cheverda, F. Clement, V. G. Khaidukov, and V. I. Kostin, "Linearized Inversion of Data of Multi-Offset Data for Vertically-Inhomogeneous Background," *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **6** (5), 453–484 (1998).
32. D. Neklyudov, M. Dmitriev, M. Belonosov, and V. Tcheverda, "Frequency-Domain Iterative Solver for 3D Acoustic Wave Equation with Two-Stage Semi-Analytical Preconditioner," in *Proc. 76th EAGE Conference and Exhibition. Extended Abstracts* (European Association of Geoscientists and Engineers, Amsterdam, 2014), p. Tu G105 09.
33. M. Thompson, B. Arntsen, and L. Amundsen, "Acquisition Geometry Versus 4C Image Quality: A Study from Gullfaks South," in *Proc. 73rd SEG Annual Meeting. Expanded Abstracts* (Soc. Explor. Geophysicists, Tulsa, 2003), Vol. 22, pp. 793–796.
34. V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1970; Marcel Dekker, New York, 1971).