

УДК 519.633.6

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ОПРОКИДЫВАНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ

А. А. Фролов¹, Е. В. Чижонков²

Методами численного моделирования изучен релятивистский эффект опрокидывания плоских одномерных электронных плазменных колебаний. Для моделирования построены два различных вычислительных алгоритма (на основе лагранжевых и эйлеровых переменных) и проведено предварительное аналитическое исследование. Представлено описание динамики развития–завершения плоских релятивистских колебаний, кульминацией которой является сингулярность функции электронной плотности, располагающаяся вне оси симметрии задачи. Часть расчетов была проведена на суперкомпьютере “Чебышев” (МГУ им. М. В. Ломоносова).

Ключевые слова: численное моделирование, плазменные колебания, эффект опрокидывания, методы на основе лагранжевых и эйлеровых переменных.

Введение. Под опрокидыванием плазменных колебаний, как правило, понимают одно из нарушений применимости гидродинамической модели для описания бесстолкновительной холодной плазмы. Более конкретно, лагранжево описание среды теряет смысл, когда происходит пересечение электронных траекторий, а эйлерово описание — при обращении в бесконечность функции, описывающей плотность электронов. Появление сингулярности плотности математически эквивалентно пересечению траекторий, чему имеется корректное обоснование в монографии [1] (см. также приложение в [2]).

Пересечение траекторий является формальным следствием разности частот, с которыми колеблются соседние частицы. Однако причины сдвига частот могут быть самыми различными. Например, в одной из наиболее известных работ, посвященных плазменным колебаниям [3], в качестве таких причин указаны цилиндрическая или сферическая симметрия задачи, пространственная неоднородность начальной концентрации электронов и др. Часто в одной задаче таких причин бывает несколько, и трудно проследить отдельное влияние каждой из них (см., например, [4–6]).

Настоящая статья посвящена изучению “рафинированного” опрокидывания плоских, пространственно одномерных колебаний в зависимости только от релятивистского эффекта, т.е. эффекта больших скоростей. Хорошо известно (см. [3, 7]), что уравнения, описывающие одномерные плоские электронные колебания без учета релятивизма, не порождают сдвига частоты колебаний отдельных частиц. Поэтому, в зависимости от величины градиента начальной функции, нерелятивистские колебания либо опрокидываются в течение первого периода (эффект типа “blow-up” [8]), либо продолжают неограниченно долго. Ниже рассматривается чуть усложненная постановка: простейшая модель электронных колебаний дополнена только учетом движения частиц с достаточно большими скоростями и сделана попытка качественного описания динамики частиц в зависимости от скорости колебаний.

Статья имеет следующую структуру. Сначала приведены постановка задачи и теоретические предпосылки для анализа эффекта опрокидывания колебаний. Далее с использованием лагранжевых и эйлеровых переменных построены два независимых алгоритма и на их основе численно исследован сценарий развития–завершения плоских одномерных релятивистских колебаний вплоть до опрокидывания. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

1. Постановка задачи. Будем считать плазму холодной, идеальной, релятивистской электронной жидкостью, пренебрегая столкновительными и рекомбинационными эффектами, а также движением ионов. Тогда систему уравнений гидродинамики совместно с уравнениями Максвелла (см., например, [9]) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \mathbf{v}) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} &= e \mathbf{E} - m c^2 \nabla \gamma, & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}}, & \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}}{m \gamma}, & \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -4 \pi e n \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathbf{B}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

¹ Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13, стр. 2, 125412, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: frolov@ihed.gas.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

где e , m — заряд и масса электрона; c — скорость света; n , \mathbf{p} , \mathbf{v} — концентрация (плотность), удельный импульс и скорость электронов; γ — лоренцевский фактор; \mathbf{E} , \mathbf{B} — векторы электрического и магнитного полей.

С целью проведения качественного анализа плоских одномерных релятивистских плазменных колебаний систему (1.1) можно существенно упростить. Примем допущения, что

- решение определяется только x -компонентами вектор-функций \mathbf{p} , \mathbf{v} и \mathbf{E} ;
- зависимость в этих функциях от переменных y и z отсутствует, т.е. $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$.

Тогда из системы (1.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n v_x) &= 0, & \frac{\partial p_x}{\partial t} &= e E_x - m c^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{m^2 c^2}}, & v_x &= \frac{p_x}{m \gamma}, & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -4 \pi e n v_x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Введем безразмерные величины

$$\rho = k_p x, \quad \theta = \omega_p t, \quad V = \frac{v_x}{c}, \quad P = \frac{p_x}{m c}, \quad E = -\frac{e E_x}{m c \omega_p}, \quad N = \frac{n}{n_0},$$

где $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$ — плазменная частота, n_0 — значение невозмущенной электронной плотности, $k_p = \omega_p / c$. В новых переменных система (1.2) примет вид

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \rho} (N V) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \quad \gamma = \sqrt{1 + P^2}, \quad V = \frac{P}{\gamma}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = N V. \quad (1.3)$$

Из первого и последнего уравнений (1.3) следует $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(N + \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) = 0$. Это соотношение справедливо как при отсутствии плазменных колебаний ($N \equiv 1$, $E \equiv 0$), так и при их наличии, поэтому отсюда имеем более простое выражение для электронной плотности:

$$N = 1 - \frac{\partial E}{\partial \rho}. \quad (1.4)$$

Исключая из системы (1.3) плотность N и фактор γ , приходим к уравнениям, описывающим свободные плоские одномерные релятивистские колебательные движения электронов в холодной идеальной плазме:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = 0, \quad V = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}. \quad (1.5)$$

Поясним теперь понятие “плазменный слой”, используемое в настоящей работе. Если предположить, что колеблющаяся часть плазмы занимает ограниченную часть пространства (в данном случае — отрезок $[-d, d]$) и все возмущения не выходят за его пределы, то краевое условие

$$P(-d, \theta) = P(d, \theta) = 0 \quad \forall \theta \geq 0 \quad (1.6)$$

фиксирует *колеблющийся* плазменный слой, границы которого не зависят от времени. Уточним, что здесь речь не идет о пространственном распределении электронной плотности в виде ступенчатой функции, традиционно характеризующей плазменный слой. Более того, вне области колебаний электронная плотность является невозмущенной, т.е. равна константе, непрерывно продолжающей значения из внутренней части области.

Соотношение (1.6) эквивалентно равенству

$$V(-d, \theta) = V(d, \theta) = 0 \quad \forall \theta \geq 0,$$

которое, в свою очередь, влечет из первого уравнения (1.3) закон сохранения заряда: $\int_{-d}^d N(\rho, \theta) d\rho = \text{const}$. Отсюда, в силу справедливости соотношения (1.4), для всех $\theta \geq 0$ имеем $E(-d, \theta) = E(d, \theta)$. Дополнительно заметим, что уравнения (1.5) из всех решений, не зависящих от пространства и времени, допускают только тривиальные, т.е. $P = V \equiv 0$, $E \equiv 0$. Поэтому основную систему можно снабдить локализованными по пространству начальными условиями

$$P(\rho, 0) = P_0(\rho), \quad E(\rho, 0) = E_0(\rho), \quad \rho \in [-d, d], \quad (1.7)$$

непрерывно примыкающими к тривиальным решениям вне плазменного слоя, т.е. $P_0(\pm d) = E_0(\pm d) = 0$. Теперь из локальности начальных условий и закона сохранения заряда вытекает краевое условие для возмущений электрического поля:

$$E(-d, \theta) = E(d, \theta) = 0 \quad \forall \theta \geq 0. \tag{1.8}$$

Суммируя все вышесказанное, для плазменного слоя можно определить следующую начально-краевую задачу: найти в полуполосе $\{(\rho, \theta) : \theta > 0, -d < \rho < d\}$ решение уравнений (1.5), удовлетворяющее начальным (1.7) и граничным (1.6), (1.8) условиям.

Возьмем в качестве начальных условий (1.7) функции вида

$$P_0(\rho) = 0, \quad E_0(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp\left\{-2\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\} & \text{при } |\rho| < d, \\ 0 & \text{при } |\rho| \geq d. \end{cases} \tag{1.9}$$

Подобное возмущение электрического поля, инициирующее колебания, характерно для прохождения через плазму короткого мощного лазерного импульса, имеющего гауссово распределение интенсивности по пространству [4, 10]. В силу экспоненциального затухания функции $E_0(\rho)$, для обеспечения с достаточной точностью краевого условия (1.8) (но без потери гладкости) достаточно положить $d \approx 4.5\rho_*$.

Заметим также, что если начальные функции $P_0(\rho)$ и $E_0(\rho)$ — нечетные относительно начала координат, то функции $P(\rho, \theta)$ и $E(\rho, \theta)$ (одновременно с $V(\rho, \theta)$), в силу справедливости уравнений (1.5), будут нечетными для всех $\theta \geq 0$. Это позволяет проводить исследования не на всем отрезке $[-d, d]$, а на любой его половине. Для удобства зафиксируем эту половину в виде $[0, d]$.

Окончательно постановка задачи для целей настоящей работы выглядит так: найти в полуполосе $\{(\rho, \theta) : \theta > 0, 0 < \rho < d\}$ решение уравнений (1.5), удовлетворяющее начальным (1.9) и граничным условиям

$$P(0, \theta) = P(d, \theta) = E(0, \theta) = E(d, \theta) = 0 \quad \forall \theta \geq 0. \tag{1.10}$$

Квазилинейная система уравнений (1.5) является основной в нашем исследовании, поэтому, кроме записи в эйлеровых переменных, будет полезен ее вид в лагранжевых переменных:

$$\frac{dP(\rho^L, \theta)}{d\theta} = -E(\rho^L, \theta), \quad \frac{dE(\rho^L, \theta)}{d\theta} = V(\rho^L, \theta), \quad V = \frac{P(\rho^L, \theta)}{\sqrt{1 + P^2(\rho^L, \theta)}},$$

где $\frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{V\partial}{\partial\rho}$ — полная производная по времени.

Напомним, что функция $R(\rho^L, \theta)$, определяющая смещение частицы с лагранжевой координатой ρ^L ,

$$\rho(\rho^L, \theta) = \rho^L + R(\rho^L, \theta), \tag{1.11}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dR(\rho^L, \theta)}{d\theta} = V(\rho^L, \theta).$$

Отсюда следует, что значения $R(\rho^L, \theta)$ и $E(\rho^L, \theta)$ совпадают с точностью до постоянной, которая вычисляется из условия равенства нулю электрического поля при отсутствии смещений. Другими словами, в случае плоских одномерных колебаний справедливо соотношение

$$R(\rho^L, \theta) \equiv E(\rho^L, \theta), \tag{1.12}$$

а основная система уравнений (1.5) в лагранжевых переменных принимает вид

$$\frac{dP}{d\theta} = -R, \quad \frac{dR}{d\theta} = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}} \equiv V. \tag{1.13}$$

Отметим, что соотношение (1.11) весьма полезно для определения лагранжевой координаты частицы ρ^L по начальному распределению $E_0(\rho)$; при этом формула такова:

$$\rho^L = \rho(\rho^L, 0) - E_0(\rho(\rho^L, 0)). \tag{1.14}$$

Суммируем вышесказанное: траектории всех частиц, каждая из которых идентифицируется лагранжевой координатой ρ^L , можно определить независимым интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.13). Для этого требуется задать два начальных условия: $R(\rho^L, 0)$ и $P(\rho^L, 0)$. Из (1.9) имеем $P(\rho^L, 0) = 0$. Для определения $R(\rho^L, 0)$ следует задать сначала положение частицы в начальный момент времени ρ , тогда смещение в этой точке задается электрическим полем $R(\rho^L, 0) = E_0(\rho)$ по формуле (1.9). В свою очередь, лагранжева координата частицы определяется по формуле (1.14). Знание лагранжевой координаты ρ^L и функции смещения $R(\rho^L, \theta)$ однозначно характеризует траекторию частицы по формуле (1.11).

2. Теоретические предпосылки для исследования плоских релятивистских колебаний.

Ниже рассмотрены два важных аспекта рассматриваемых плазменных колебаний:

— асимптотический анализ в слабо нелинейном приближении устанавливает, что сдвиг частоты колебаний квадратично зависит от их амплитуды (это гарантированно приводит к пересечению траекторий соседних частиц);

— нарушение в релятивистском случае свойства инвариантности электронной плотности относительно линейной замены независимых и зависимых переменных делает наблюдение за опрокидыванием весьма удобным и наглядным.

2.1. Квадратичный сдвиг частоты. Если предположить, что амплитуда колебаний достаточно мала, т.е. в начальном условии (1.9) для электрического поля имеем $a_* \ll \rho_*$, то уравнения (1.5) становятся слабо нелинейными и их приближенные решения можно построить, используя методику теории возмущений [11]. Приведем здесь краткий вывод соответствующих аналитических формул. Учитывая приближенное представление релятивистской зависимости импульса от скорости $P \approx V \left(1 + \frac{V^2}{2}\right)$ и исключая смещение R из системы (1.13), получим следующее уравнение для скорости V :

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1\right)V + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\theta^2}V^3 = 0. \quad (2.1)$$

Добавим к нему начальные условия из (1.9):

$$V(\rho, 0) = 0, \quad \frac{dV}{d\theta}(\rho, 0) = A(\rho). \quad (2.2)$$

Будем считать амплитуду колебаний $A(\rho)$ малой, тогда представляет интерес приближенное (асимптотическое) решение (2.1), (2.2), равномерно ограниченное по переменной θ и отличающееся от точного на величину третьего порядка малости, т.е. $O(A^3(\rho))$. В этом случае можно положить

$$A(\rho) \approx -E_0(\rho) = -\left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp\left\{-2\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\}. \quad (2.3)$$

Так как переменная ρ входит в задачу (2.1), (2.2) как параметр, то удобно сначала рассмотреть модельную задачу с одной независимой переменной θ :

$$U'' + U + \frac{1}{2}(U^3)'' = 0, \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = \varepsilon \ll 1. \quad (2.4)$$

Подставляя U в (2.4) в виде $U(\theta) = \varepsilon U_1(\theta) + \varepsilon^2 U_2(\theta) + \varepsilon^3 U_3(\theta) + \dots$ (разложение по степеням малого параметра), находим, что компоненты $U_i(\theta)$, $i = 1, 2, 3$, являются решениями следующих вспомогательных задач:

$$\begin{aligned} U_1'' + U_1 &= 0, & U_1(0) &= 0, & U_1'(0) &= 1, \\ U_2'' + U_2 &= 0, & U_2(0) &= 0, & U_2'(0) &= 0, \\ U_3'' + U_3 + \frac{1}{2}(U_1^3)'' &= 0, & U_3(0) &= 0, & U_3'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Несложно получить прямое разложение

$$U(\theta) = \varepsilon \sin \theta + \varepsilon^3 \left(-\frac{27}{64} \sin \theta + \frac{9}{64} \sin 3\theta - \frac{3}{16} \theta \sin \theta \right) + o(\varepsilon^3).$$

Отметим, что найденное асимптотическое решение не применимо на длительных интервалах времени, так как его компонента $U_3(\theta)$ содержит растущее слагаемое вида $\theta \sin \theta$.

От резонансного слагаемого в третьем уравнении (2.5), порождающего неограниченное частное решение, несложно избавиться, следуя [11]. Достаточно заменить функцию U_1 с $\sin \theta$ на $\sin(1 + \varepsilon^2 \omega_2)\theta$, т.е. к основной частоте колебаний, равной единице, добавить квадратично-малую по параметру ε величину. Здесь имеется в виду, что ω_2 не зависит от ε .

При $U_1 = \sin(1 + \varepsilon^2 \omega_2)\theta$ имеем $U_1'' + U_1 = -2\varepsilon^2 \omega_2 U_1 + O(\varepsilon^4)$. Полученная правая часть порождает дополнительное слагаемое порядка ε^3 , так как компонента $U_1(\theta)$ имеет в решении множитель ε . В силу этого, последнее уравнение в (2.5) принимает вид $U_3'' + U_3 - 2\omega_2 U_1 + \frac{1}{2}(U_1^3)'' = 0$. Отсюда, учитывая равенства $\cos^3 y = \frac{3}{4} \cos y + \frac{1}{4} \cos 3y$, $y = \frac{\pi}{2} - (1 + \varepsilon^2 \omega_2)\theta$ и обнуляя множитель при U_1 , получаем поправку к основной частоте:

$$\omega_2 = -\frac{3}{16}. \tag{2.6}$$

Таким образом, искомое ограниченное решение вспомогательной задачи (2.4) имеет вид

$$U(\theta) = \varepsilon \sin \omega \theta + \varepsilon^3 \left[-\frac{27}{64} \sin \omega \theta + \frac{9}{64} \sin 3\omega \theta \right] + o(\varepsilon^3), \quad \omega = 1 - \frac{3\varepsilon^2}{16}.$$

Возвращаясь к постановке (2.1),(2.2), получаем зависимость частоты колебаний от пространственного распределения начальной амплитуды $A(\rho)$:

$$V(\rho, \theta) = A(\rho) \sin \left(1 - \frac{3A^2(\rho)}{16} \right) \theta + O(A^3(\rho)).$$

При этом слагаемые третьего порядка малости уже не являются растущими по времени.

Применим полученный результат к соотношениям (1.13), (1.14). В частности, получим, что траектория частицы с точностью до членов третьего порядка малости имеет вид

$$\rho = \rho_0 - A_0 \cos \left(1 - \frac{3A_0^2}{16} \right) \theta, \quad A_0 = A(\rho_0), \tag{2.7}$$

где ρ_0 — лагранжева координата частицы в равновесном положении, не приводящем к возникновению электрического поля. Так как начальная амплитуда колебаний $A(\rho)$ не является постоянной величиной, то траектории каких-то соседних частиц рано или поздно должны пересечься.

Критерий опрокидывания плазменных колебаний в [3] был сформулирован исходя из соображений, что траектории двух электронов, первоначально отстоящих друг от друга по ρ на расстояние, равное удвоенной амплитуде смещения ($\Delta\rho_0 = 2A_0$), в дальнейшем пересекутся, когда разность фаз станет равной π . В работе [2] было уточнено, что опрокидывание обусловлено пересечением траекторий двух ближайших частиц, а не удаленных на расстояние, равное удвоенной амплитуде смещения. Однако принципиально важным в любом случае является вывод об опрокидывании колебаний вследствие различия в частотах колебаний соседних частиц при любых (сколь угодно малых!) амплитудах.

2.2. Нарушение свойства инвариантности. Рассмотрим сначала уравнения (1.5), пренебрегая релятивистским эффектом, т.е. полагая $P \approx V$. Получим

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = 0. \tag{2.8}$$

Выражение (1.4) для электронной плотности N при этом не изменится.

Запишем решение уравнений (2.8) в виде $V = \sigma U$, $E = \sigma G$, где σ — вещественный параметр. Если при этом сделать замену независимой переменной $\rho = \sigma x$, то несложно убедиться, что новые функции U и G по-прежнему удовлетворяют уравнениям (2.8), но уже в переменных θ и x . Кроме того, если в начальных условиях (1.9) при том же преобразовании координаты ρ заменить величины a_* и ρ_* на σa_* и $\sigma \rho_*$ соответственно, будем иметь равенство $E_0(\rho) = \sigma G(x, 0) \equiv G_0(x)$.

Вышесказанное означает специфическое свойство инвариантности: одновременное пропорциональное изменение независимой переменной ρ и параметров a_* , ρ_* влечет аналогичное изменение функций V и E ; с другой стороны, отмеченные изменения $\rho = \sigma x$, $E = \sigma G$ не меняют значений электронной плотности N в переменных θ и x , что следует из формулы (1.4). Отсюда, в частности, следует, что за счет подбора параметров задачи a_* и ρ_* фиксированные по амплитуде значения плотности могут достигаться при сколь угодно малых (или сколь угодно больших!) амплитудах колебаний скорости и электрического поля.

Следует отметить, что указанное свойство напрямую связано с глобальным по времени существованием плоских нерелятивистских колебаний [7], т.е. с отсутствием сдвига основной частоты в зависимости от амплитуды. В свою очередь, *базовые уравнения (1.5)*, изучаемые в настоящей работе, *указанным свойством инвариантности не обладают*: этому препятствует соотношение $V = P/\sqrt{1+P^2}$, как раз характеризующее релятивистский эффект.

Суммируя результаты этого раздела, сформулируем основную методическую идею, лежащую в основе исследования плоских релятивистских колебаний настоящей работы. Сначала фиксируются некоторые параметры задачи a_* , ρ_* , $d = 4.5\rho_*$ (граница области) и этому набору ставится в соответствие значение вспомогательного параметра $\sigma = 1$. Без ограничения общности можно считать, что ограниченная функция электронной плотности $N(\rho, \theta)$ для указанного набора, в силу раздела 2.1, существует на некотором интервале $0 < \theta < \theta_{wb}(\sigma)$. Чтобы усилить влияние релятивистского эффекта, т.е. уменьшить время опрокидывания колебаний θ_{wb} , следует в данных задачи провести одновременные изменения: $a_* \rightarrow \sigma a_*$, $\rho_* \rightarrow \sigma \rho_*$, $d \rightarrow \sigma d$, $\sigma > 1$. В свою очередь, значение $\sigma < 1$ означает уменьшение скорости колебаний, т.е. ослабление релятивистского эффекта. Для наглядности следует наблюдать функцию электронной плотности в исходном масштабе по переменной ρ , т.е. без учета σ , так как близость графиков при различных значениях параметра σ будет свидетельствовать о слабом влиянии релятивизма. Другими словами, для изучения релятивистского опрокидывания вполне достаточно наблюдений зависимости электронной плотности от одного параметра, характеризующего (правда, косвенно) скорость колебаний.

3. Численный алгоритм на основе лагранжевых переменных. Настоящий раздел посвящен численному интегрированию уравнений (1.13) с начальными условиями (1.14), (1.9). Для полноты описания приведем расчетные формулы метода, основной целью применения которого является моделирование процесса опрокидывания колебаний.

Пусть в начальный период времени $\theta = 0$ частица с номером k характеризуется начальным положением по радиусу $\rho_0(k)$ и начальным смещением $R(k, 0)$, где $1 \leq k \leq M$, M — полное число частиц. Начальное положение всех частиц формируют электрическое поле, которое имеет вид (1.9). С другой стороны, отклонение частиц в начальный момент времени создает в точке с координатой $\rho_k = \rho_0(k) + R(k, 0)$ электрическое поле в соответствии с формулой (1.12). Сравнивая выражения (1.9) и (1.12), можно определить искомые значения $\rho_0(k)$ и $R(k, 0)$. Для этого зададим начальную пространственную сетку $\rho_k = kh$, h — параметр дискретизации по радиальной переменной, характеризующий близость соседних частиц. В узлах сетки по формуле (1.9) вычислим значения электрического поля $E_0(\rho_k)$. Это электрическое поле образуется смещением частиц, т.е. на основе (1.12) имеем уравнения для определения начальных положений $\rho_0(k)$: $\rho_k = \rho_0(k) + R(k, 0) \equiv \rho_0(k) + E_0(\rho_k)$. Таким образом, для вычисления траектории каждой частицы получены начальные данные $\rho_0(k)$ и $R(k, 0)$, к которым следует добавить условие неподвижности частиц в начальный момент времени из (1.9), т.е. $P(k, 0) = 0$.

Уравнения (1.13), как отмечалось выше, являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Поэтому могут быть проинтегрированы численно обычным образом [12], например по традиционной [13] для уравнений движения схеме второго порядка точности (так называемая схема с перешагиванием). Пусть τ — параметр дискретизации по времени, т.е. $\theta_j = j\tau$, $j \geq 0$, тогда расчетные формулы будут иметь следующий вид:

$$\frac{P(k, \theta_{j+1/2}) - P(k, \theta_{j-1/2})}{\tau} = -R(k, \theta_j), \quad \frac{R(k, \theta_{j+1}) - R(k, \theta_j)}{\tau} = \frac{P(k, \theta_{j+1/2})}{\sqrt{1 + P^2(k, \theta_{j+1/2})}}.$$

При этом в произвольный момент времени θ_j может быть вычислена переменная эйлерова сетка по уже приводившейся формуле $\rho_k = \rho_0(k) + R(k, \theta_j)$, $1 \leq k \leq M$, в узлах которой в соответствии с (1.12) определены значения электрического поля $E(\rho_k, \theta_j) = R(k, \theta_j)$. Этот прием использовался для представления электронной плотности в иллюстративных целях: в расчетах применялась формула численного дифференцирования второго порядка точности в серединах подотрезков:

$$N\left(\frac{\rho_{k+1} + \rho_k}{2}, \theta_j\right) = 1 - \frac{E(\rho_{k+1}, \theta_j) - E(\rho_k, \theta_j)}{\rho_{k+1} - \rho_k}.$$

Здесь было удобно считать, что в любой момент времени на прямой $\rho = 0$ располагается частица с номером $k = 0$, у которой всегда отсутствует смещение, т.е. ее траектория просто совпадает с осью и на этой траектории электрическое поле всегда равно нулю. Аналогичные соображения использовались для границы области $\rho = d$ и частицы с номером $k = M$.

4. Разностная схема на основе эйлеровых переменных. Приведем уравнения (1.5) к виду

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} + E + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = 0, \quad \gamma = \sqrt{1 + P^2}, \quad V = \frac{P}{\gamma}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = 0. \quad (4.1)$$

В системе (4.1) представлено взаимодействие двух физических процессов: нелинейные колебания в фиксированной точке пространства и их пространственно-временной перенос. Поэтому, как и в работе [14], построим схему расщепления по физическим процессам, используя для уравнений переноса схему Лакса–Вендроффа (“тренога”) [15].

Отнесем к описанию процесса нелинейных колебаний уравнения

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} + \tilde{E} = 0, \quad \tilde{V} = \frac{\tilde{P}}{\sqrt{1 + \tilde{P}^2}}, \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \theta} - \tilde{V} = 0, \tag{4.2}$$

а к их переносу в пространстве и времени — уравнения

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \rho} = 0, \quad \bar{\gamma} = \sqrt{1 + \bar{P}^2}, \quad \bar{V} = \frac{\bar{P}}{\bar{\gamma}}, \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} + \bar{V} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \rho} = 0. \tag{4.3}$$

В качестве основы для дискретизаций по времени обеих систем применим обычную схему с перешагиванием. Пусть τ — шаг по времени, тогда будем относить к “целым” моментам времени $\theta_j = j\tau$ ($j \geq 0$ — целое) величины E, \tilde{E} и \bar{E}, N , к “полуцелым” $\theta_{j\pm 1/2}$ — величины P, \tilde{P} и \bar{P} , а также зависимые от импульса P величины γ и V . Выбор соответствующего момента времени для значения функции будем обозначать верхним индексом. Для дискретизации по пространству будем использовать сетку с постоянным шагом h так, что $\rho_m = mh, 0 \leq m \leq M, Mh = d$.

Запишем разностные уравнения, аппроксимирующие системы (4.2) и (4.3). Для первой из них получим

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{P}_m^{j+1/2} - \tilde{P}_m^{j-1/2}}{\tau} + \tilde{E}_m^j = 0, \quad \tilde{V}_m^{j+1/2} = \frac{\tilde{P}_m^{j+1/2}}{\sqrt{1 + (\tilde{P}_m^{j+1/2})^2}}, \quad \frac{\tilde{E}_m^{j+1} - \tilde{E}_m^j}{\tau} - \tilde{V}_m^{j+1/2} = 0, \\ \tilde{P}_m^{j-1/2} = P_m^{j-1/2}, \quad \tilde{E}_m^j = E_m^j, \quad 1 \leq m \leq M - 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Дискретный аналог системы (4.3) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}_m^{j+1/2} - \bar{P}_m^{j-1/2}}{\tau} + \gamma_{X,m}^{j-1/2} = \frac{\tau}{2} \left(\bar{V}_{s,m}^{j-1/2} \gamma_{X,m}^{j-1/2} \right)_{\bar{X},m}, \\ \bar{\gamma}_m^{j+1/2} = \sqrt{1 + (\bar{P}_m^{j+1/2})^2}, \quad \bar{V}_m^{j+1/2} = \frac{\bar{P}_m^{j+1/2}}{\bar{\gamma}_m^{j+1/2}}, \\ \frac{\bar{E}_m^{j+1} - \bar{E}_m^j}{\tau} + \left(\bar{V}_m^{j+1/2} + \frac{\tau}{2} \frac{\bar{V}_m^{j+1/2} - \bar{V}_m^{j-1/2}}{\tau} \right) \bar{E}_{X,m}^j = \frac{\tau}{2} \bar{V}_m^{j+1/2} \left(\bar{V}_{s,m}^{j+1/2} \bar{E}_{X,m}^j \right)_{\bar{X},m}, \\ \bar{P}_m^{j-1/2} = \tilde{P}_m^{j+1/2}, \quad \bar{E}_m^j = \tilde{E}_m^{j+1}, \quad 1 \leq m \leq M - 1, \quad \bar{P}_0^{j+1/2} = \bar{P}_M^{j+1/2} = \bar{E}_0^{j+1} = \bar{E}_M^{j+1} = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

В выражении (4.5) были использованы обозначения: $F_{X,m}^\circ = \frac{F_{m+1} - F_{m-1}}{2h}$ — центральная разность, $F_{X,m} = \frac{F_{m+1} - F_m}{h}$ и $F_{\bar{X},m} = \frac{F_m - F_{m-1}}{h}$ — разности вперед и назад, $F_{s,m} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2}$.

После вычислений по схеме (4.5) следует переопределить искомые функции на следующем временном слое: $P_m^{j+1/2} = \bar{P}_m^{j+1/2}, E_m^{j+1} = \bar{E}_m^{j+1}, 0 \leq m \leq M$, и рассчитать (при необходимости) значение электронной плотности по формуле

$$N_m^{j+1} = \begin{cases} 1 - \frac{E_{m+1}^{j+1} - E_{m-1}^{j+1}}{2h} & \text{при } 1 \leq m \leq M - 1, \\ 1 - \frac{E_1^{j+1}}{h} & \text{при } m = 0, \\ 1 & \text{при } m = M. \end{cases} \tag{4.6}$$

На этом вычисления на j -м шаге по времени заканчиваются и можно переходить к следующему шагу. Следует отметить, что начальные данные (1.9) соответствуют $j = 0$, поэтому их необходимо отнести для P к слою с номером $-1/2$, а для E — с номером 0.

Сделаем замечание о предлагаемой схеме расщепления (4.4), (4.5). Для каждой из вспомогательных задач при достаточной гладкости решения имеется аппроксимация порядка $O(\tau^2 + h^2)$, а также условие устойчивости, полученное на основе спектрального признака [12, 15], вида $\tau = O(h)$. Это позволяет добиться существенной экономии вычислительных ресурсов за счет более слабого условия устойчивости без потери аппроксимации. Кроме того, схема (4.4), (4.5) — явная, что порождает потенциал для распараллеливания при обобщении на многомерные случаи.

Отметим, что для анализа только эффекта опрокидывания плоских релятивистских колебаний вполне достаточно одного алгоритма на основе лагранжевых переменных, тем более что вычисляемые при этом траектории частиц фактически порождают в каждый момент времени неравномерную эйлерову сетку, наиболее подходящую для описания (построения) функции электронной плотности. В этом смысле схема на основе эйлеровых переменных применялась в первую очередь для контроля лагранжевых расчетов. Однако существует ряд более сложных задач, связанных с плоскими электронными колебаниями, например учитывающих эффекты ионизации и рекомбинации, вязкость, сопротивление и диссипативность плазмы [16–19]. В этот список следует добавить задачи, учитывающие движение ионов. Для таких постановок конструирование алгоритмов на основе лагранжевых переменных становится затруднительным, хотя эйлеровы методы допускают естественное несложное обобщение на эти случаи. Поэтому можно сказать, что схема в эйлеровых переменных более ориентирована на перспективные исследования, нежели на текущие.

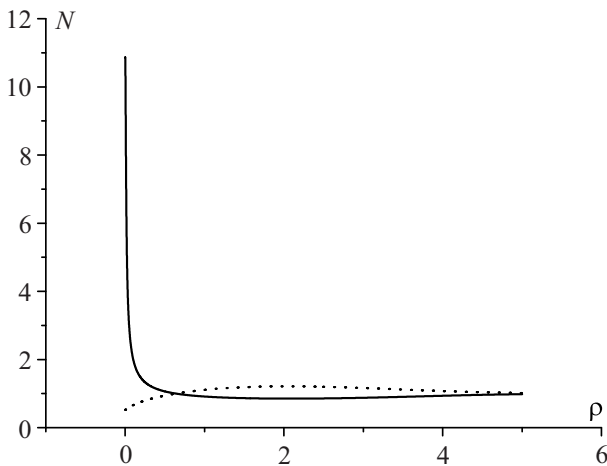


Рис. 1. Пространственные распределения плотности электронов, меняющиеся через каждую половину периода при регулярных колебаниях: максимум в начале координат (сплошная линия) и минимум в начале координат (пунктирная линия)

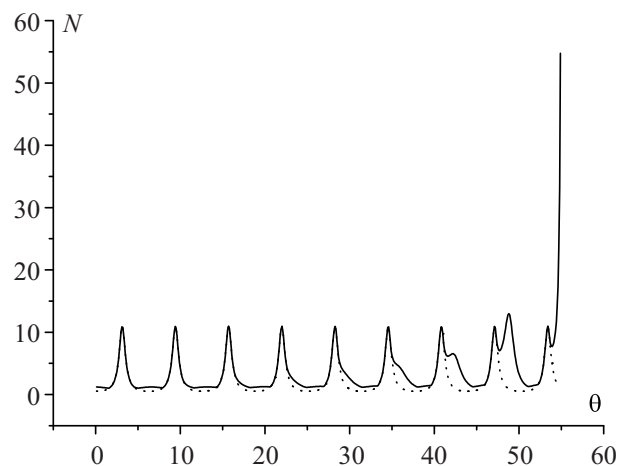


Рис. 2. Динамика плотности электронов при $\sigma = 1$: максимум по области (сплошная линия) и в начале координат (пунктирная линия)

5. Результаты расчетов и сценарий процесса. Зафиксируем для определенности значения параметров в (1.9): $a_* = 2.07$, $\rho_* = 3.0$, припишем для дальнейшего им значение вспомогательного параметра $\sigma = 1$ и рассмотрим соответствующий им рис. 1. На нем пунктиром изображено пространственное распределение электронной плотности N в начальный момент времени, т.е. следствие формул (1.4) и (1.9). Избыток положительного заряда в начале координат приводит к движению электронов в направлении центра области, что через половину периода колебаний порождает другое распределение функции плотности, также изображенное на рис. 1 (сплошной линией). Заметим, что концентрация электронов в центре области может многократно превосходить равновесное (фоновое) значение, равное единице. Зафиксированные параметры приводят к колебаниям небольшой интенсивности, когда амплитуда колебаний всего примерно в 10 раз превышает фоновое значение. Если бы нелинейные плазменные колебания сохраняли во времени свою пространственную форму, то представленные на рис. 1 изображения плотности электронов регулярно меняли бы друг друга через каждую половину периода, порождая в центре области строго периодическую последовательность экстремумов с неизменными амплитудами.

Однако в соответствии с результатами раздела 2.1 в процессе колебаний наблюдаются две тенденции. Первая из них заключается в том, что внеосевые колебания несколько опережают по фазе колебания на оси симметрии (при $\rho = 0$) и от периода к периоду этот фазовый сдвиг увеличивается. Вторая тенденция более наглядна: с течением времени происходит постепенное формирование абсолютного максимума плотности, расположенного вне оси и сравнимого по величине с осевыми. Хорошей иллюстрацией этим утверждениям

является рис. 2. На нем пунктиром изображено для электронной плотности изменение во времени в начале координат, а сплошной линией — динамика максимального по области значения. Сначала колебания носят регулярный характер, т.е. глобальные по области максимумы и минимумы плотности сменяют друг друга через половину периода и располагаются в начале координат. После седьмого регулярного (центрального) максимума в момент времени $\theta \approx 42.2$ возникает новая структура — внеосевой максимум электронной плотности, при этом регулярные колебания продолжают наблюдаться в окрестности начала координат. Внеосевой максимум, в свою очередь, в момент времени $\theta \approx 48.8$ возрастает по величине примерно в два раза и на следующем периоде — в момент времени $\theta \approx 55.1$ — на его месте возникает сингулярность электронной плотности.

Для большей наглядности внеосевого максимума электронной плотности приведены рис. 3 и 4. На рис. 3 изображено пространственное распределение плотности в момент $\theta \approx 48.8$, когда он уже полностью сформировался и стал по абсолютной величине сопоставимым с регулярным (осевым) максимумом. График плотности на рис. 3 является следствием распределений скорости V и электрического поля E , изображенных на рис. 4. Отметим, что в окрестности максимума плотности функция скорости стремится к скачку производной, а функция электрического поля принимает ступенчатый характер. Именно такие качественные характеристики V и E обеспечивают опрокидывание колебаний в момент $\theta \approx 55.1$. Важно отметить, что опрокидывание носит характер “градиентной катастрофы”, т.е. сами функции V и E при этом остаются ограниченными.

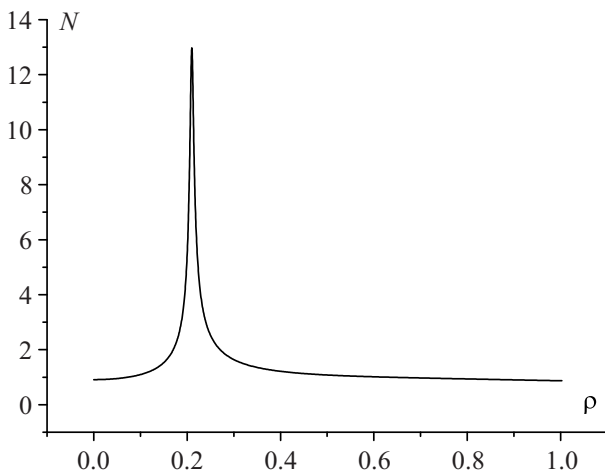


Рис. 3. Пространственное распределение плотности электронов в момент образования второго внеосевого максимума

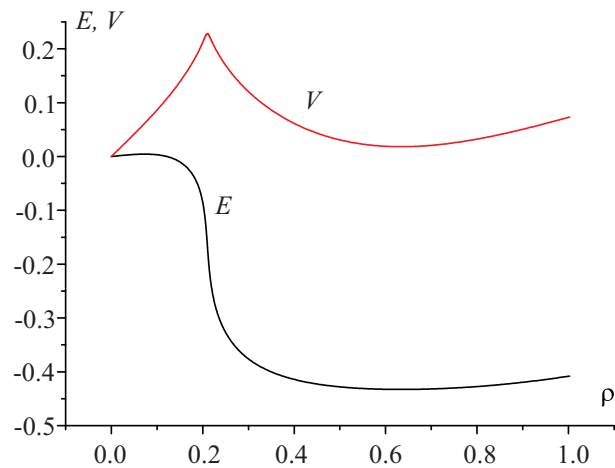


Рис. 4. Пространственное распределение скорости и электрического поля в момент образования второго внеосевого максимума

Зафиксируем теперь указанное значение ρ_* и охарактеризуем вариации описанного процесса при изменении параметра a_* . Предположим сначала, что a_* будет монотонно убывать. Тогда эволюция плазменных колебаний будет растягиваться во времени, асимптотически приближаясь к результатам слабо нелинейной модели, которая была рассмотрена в разделе 2.1. Здесь следует отметить, что в соответствии с результатами [2] при достаточно малых a_* для времени опрокидывания колебаний справедлива асимптотическая формула $\theta_{br} = \frac{C}{\rho_*^2} \left(\frac{\rho_*}{a_*} \right)^6$ с некоторой постоянной C , т.е. время опрокидывания квадратично убывает относительно роста ρ_* при $a_*/\rho_* = \text{const}$.

Пусть теперь параметр a_* будет монотонно расти. Тогда, наоборот, эволюция плазменных колебаний будет сжиматься во времени, приобретая все более нелинейный характер. В первую очередь это будет заметно по абсолютным значениям регулярных осевых максимумов: их значения начнут превосходить фоновое в десятки раз и более. Например, при $a_* = 2.12$ имеем $N_{axis} \approx 300$. Время опрокидывания колебаний и соответствующая радиальная координата будут уменьшаться. При этом наблюдается такая качественная картина. Если опрокидывания колебаний происходят внутри одного периода, то их радиальная координата монотонно убывает при возрастании a_* . При “перескакивании” времени опрокидывания в предыдущий период радиальная координата скачком увеличивается, а затем плавно внутри периода убывает, при этом ее минимальное по периодам значение стремится к нулю, т.е. к оси. В процессе роста параметра a_* (при фиксированном значении ρ_*) не всегда удастся отследить формирование и рост внеосевого экстремума плотности. Внеосевое опрокидывание часто происходит настолько быстро, что вне-

осевой экстремум не может просуществовать даже одного периода по времени. Отметим также, что время формирования первого осевого экстремума электронной плотности также убывает при возрастании a_* . По крайней мере, ни разу в расчетах не было обнаружено опрокидывания накануне появления первого осевого максимума. Критическим в гидродинамической модели является значение $(a_*/\rho_*)^2 = 1/2$, в окрестности которого опрокидывание будет носить практически осевой характер: начальное распределение электронов таково, что все они дружно устремляются к оси, отражаются от нее, а затем очень быстро происходит пересечение электронных траекторий. Таким образом, длительность колебаний в окрестности критического значения не будет превышать и половины периода. Этот факт следует из исследования аксиальных решений рассматриваемой задачи [7, 20].

Обсудим релятивистское опрокидывание электронных колебаний, описанное в разделе 2.2. Оставим без изменения отношение a_*/ρ_* при увеличении параметра ρ_* , т.е. характерного масштаба и соответственно скорости колебаний. Для количественного описания воспользуемся параметром σ : его увеличение, т.е. $\rho_* \rightarrow \sigma\rho_*$, соответствует увеличению релятивистского фактора. При его уменьшении плоские колебания стремятся к нерелятивистским, изучению которых посвящена работа [7].

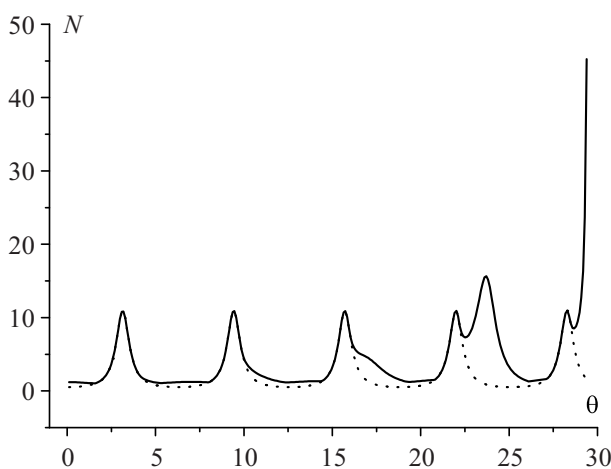


Рис. 5. Динамика плотности электронов при $\sigma = 1.5$: максимум по области (сплошная линия) и в начале координат (пунктирная линия)

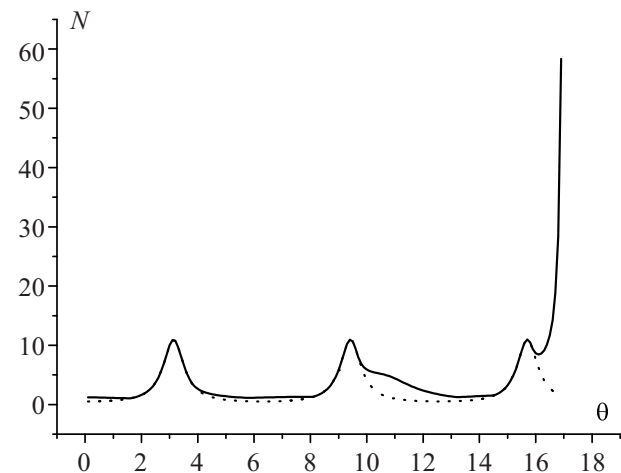


Рис. 6. Динамика плотности электронов при $\sigma = 2$: максимум по области (сплошная линия) и в начале координат (пунктирная линия)

Рассмотрим рис. 5, соответствующий увеличению параметра ρ_* в 1.5 раза. Его следует сравнить с рис. 2. Легко заметить, что при сохранении амплитуды колебаний в центре области периферийные процессы, приводящие к опрокидыванию, развиваются примерно в два раза быстрее. Так, внеосевой экстремум, сравнимый по величине с осевым, сформировался при $\theta \approx 23.7$, что привело к опрокидыванию в момент времени $\theta \approx 29.5$. Эта тенденция сохраняется в дальнейшем. На рис. 6 изображены графики электронной плотности, соответствующие параметру $\sigma = 2$, т.е. дальнейшему увеличению ρ_* . Здесь время опрокидывания сократилось примерно в два раза по сравнению с предыдущим вариантом. Таким образом, влияние релятивистского фактора, связанного с увеличением ρ_* , приводит к сокращению времени опрокидывания при неизменной амплитуде колебаний в центре области. При этом естественным пределом времени опрокидывания является половина периода колебаний, так как пересечение траекторий вне оси симметрии не может произойти ранее, чем сформируется первый центральный максимум электронной плотности.

Заключение. Настоящая статья посвящена численному моделированию опрокидывания плоских одномерных электронных плазменных колебаний за счет только релятивистского эффекта. С этой целью построены два различных вычислительных алгоритма (на основе лагранжевых и эйлеровых переменных) и проведено предварительное теоретическое исследование.

На основании многочисленных расчетов был исследован сценарий развития–завершения плоских релятивистских колебаний, ключевым этапом которого является формирование максимума электронной плотности, располагающегося вне оси симметрии задачи. Часть расчетов, касающихся контроля точности, была проведена на суперкомпьютере “Чебышев” (МГУ им. М. В. Ломоносова).

Следует отметить, что в окрестности опрокидывания колебаний, т.е. при большой концентрации электронов, видимо, следует учитывать динамику ионов. Вполне возможно, что в сильных электрических полях тяжелые ионы начнут значительно перемещаться, тем самым меня картину динамики электронной плотности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
2. Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В., Андреев Н.Е. Опрокидывание нелинейных цилиндрических колебаний плазмы // Физика плазмы. 2010. **36**, № 4. 375–386.
3. Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. **113**, N 2. 383–387.
4. Chizhonkov E.V., Frolov A.A., Gorbunov L.M. Modelling of relativistic cylindrical oscillations in plasma // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. **23**, N 5. 455–467.
5. Chizhonkov E.V., Frolov A.A. Numerical simulation of the breaking effect in nonlinear axially-symmetric plasma oscillations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2011. **26**, N 4. 379–396.
6. Милотин С.В., Фролов А.А., Чижонков Е.В. Пространственное моделирование опрокидывания нелинейных плазменных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 295–305.
7. Чижонков Е.В. К моделированию электронных колебаний в плазменном слое // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2011. **51**, № 3. 456–469.
8. Pohozaev S.I. The general blow-up theory for nonlinear PDE's // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. The Hans Triebel Anniversary Volume. Bazel: Birkhäuser, 2003. 141–159.
9. Esarey E., Sprangle P., Krall J., Ting A. Overview of plasma-based acceleration concepts // IEEE Trans. on Plasma Science. 1996. **24**, N 2. 252–288.
10. Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В. О моделировании нерелятивистских цилиндрических колебаний в плазме // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 58–65.
11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958.
12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ, 2008.
13. Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer simulation using particles. New York: McGraw-Hill, 1981.
14. Попов А.В., Чижонков Е.В. Об одной разностной схеме для расчета плазменных аксиально-симметричных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 1–13.
15. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990.
16. Karimov A.R., Yu M.Y., Stenflo L. Large quasineutral electron velocity oscillations in radial expansion of an ionizing plasma // Physics of Plasmas. 2012. **19**. 0921181–0921185.
17. Verma P.S., Soni J.K., Segupta S., Raw P.K. Nonlinear oscillations in a cold dissipative plasma // Physics of Plasmas. 2010. **17**. 0445031–0445034.
18. Infeld E., Rowlands G., Skorupski A.A. Analytically solvable model of nonlinear oscillations in a cold but viscous and resistive plasma // Phys. Rev. Lett. 2009. **102**. 1450051–1450054.
19. Rowlands G., Brodin G., Stenflo L. Exact analytic solutions for nonlinear waves in cold plasmas // J. Plasma Physics. 2008. **74**, N 4. 569–573.
20. Чижонков Е.В. Численное моделирование аксиальных решений некоторых нелинейных задач // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 215–227.

Поступила в редакцию
25.08.2014

Relativistic Breaking Effect of Electron Oscillations in a Plasma Slab

A. A. Frolov¹ and E. V. Chizhonkov²

¹ Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences; ulitsa Izhorskaya 13, Moscow, 125412, Russia; Dr. Sci., Senior Scientist, e-mail: frolov@ihed.ras.ru

² Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Received August 28, 2014

Abstract: The relativistic breaking effect of plane one-dimensional electron plasma oscillations is studied by numerical modeling methods. Two different algorithms (on the basis of Eulerian and Lagrangian variables) are proposed and a preliminary analytical analysis is performed. The development–completion dynamical processes of plane relativistic oscillations are discussed. Their culmination is the off-axis singularity of the electron density function. A part of calculation was performed on the “Chebyshev” Moscow University supercomputer system.

Keywords: numerical modeling, plasma oscillations, breaking effect, methods on the basis of Eulerian and Lagrangian variables.

References

1. Ya. B. Zel'dovich and A. D. Myshkis, *Elements of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
2. L. M. Gorbunov, A. A. Frolov, E. V. Chizhonkov, and N. E. Andreev, "Breaking of Nonlinear Cylindrical Plasma Oscillations," *Fiz. Plazmy* **36** (4), 375–386 (2010) [*Plasma Phys. Rep.* **36** (4), 345–356 (2010)].
3. J. M. Dawson, "Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma," *Phys. Rev.* **113** (2), 383–387 (1959).
4. E. V. Chizhonkov, A. A. Frolov, and L. M. Gorbunov, "Modelling of Relativistic Cylindrical Oscillations in Plasma," *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **23** (5), 455–467 (2008).
5. E. V. Chizhonkov and A. A. Frolov, "Numerical Simulation of the Breaking Effect in Nonlinear Axially-Symmetric Plasma Oscillations," *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **26** (4), 379–396 (2011).
6. S. V. Milyutin, A. A. Frolov, and E. V. Chizhonkov, "Spatial Modeling of Breaking Effects in Nonlinear Plasma Oscillations," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 295–305 (2013).
7. E. V. Chizhonkov, "To the Question of Large-Amplitude Electron Oscillations in a Plasma Slab," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **51** (3), 456–469 (2011) [*Comput. Math. Math. Phys.* **51** (3), 423–434 (2011)].
8. S. I. Pohozaev, "The General Blow-up Theory for Nonlinear PDE's," in *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis: The Hans Triebel Anniversary Volume* (Birkhäuser, Basel, 2003), pp. 141–159.
9. E. Esarey, P. Sprangle, J. Krall, and A. Ting, "Overview of Plasma-Based Accelerator Concepts," *IEEE Trans. Plasma Sci.* **24** (2), 252–288 (1996).
10. L. M. Gorbunov, A. A. Frolov, and E. V. Chizhonkov, "On Modeling of Nonrelativistic Cylindrical Oscillations in Plasma," *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 58–65 (2008).
11. N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropol'sky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Fizmatlit, Moscow, 1958; Gordon and Breach, New York, 1961).
12. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Numerical Methods* (Binom, Moscow, 2008) [in Russian].
13. R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (McGraw-Hill, New York, 1981).
14. A. V. Popov and E. V. Chizhonkov, "A Finite-Difference Scheme for Computing Axisymmetric Plasma Oscillations," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 1–13 (2012).
15. D. A. Anderson, J. C. Tannehill, and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (Hemisphere, New York, 1984; Mir, Moscow, 1990).
16. A. R. Karimov, M. Y. Yu, and L. Stenflo, "Large Quasineutral Electron Velocity Oscillations in Radial Expansion of an Ionizing Plasma," *Phys. Plasmas* **19** (2012). doi: 10.1063/1.4754865
17. P. S. Verma, J. K. Soni, S. Segupta, and P. K. Raw, "Nonlinear oscillations in a cold dissipative plasma," *Phys. Plasmas* **17** (2010). doi: 10.1063/1.3389227
18. E. Infeld, G. Rowlands, and A. A. Skorupski, "Analytically Solvable Model of Nonlinear Oscillations in a Cold but Viscous and Resistive Plasma," *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009). doi: 10.1103/PHYSREVLETT.102.145005
19. G. Rowlands, G. Brodin, and L. Stenflo, "Exact Analytic Solutions for Nonlinear Waves in Cold Plasmas," *J. Plasma Phys.* **74** (4), 569–573 (2008).
20. E. V. Chizhonkov, "Numerical Modeling of Axial Solutions to Some Nonlinear Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 215–227 (2010).