

УДК 519.6

О СЛОЖНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ РАСТЕРИЗАЦИИ СУММ МИНКОВСКОГО

С. А. Карпухин¹

Рассматривается задача поиска наибольшего многогранника заданной формы (шаблона) внутри другого многогранника и численный метод ее решения при фиксированной ориентации шаблона, основанный на растеризации сумм Минковского. Исследуется сложность данного метода в случае задачи с выпуклым шаблоном и единственным решением в трехмерном пространстве. Доказана ограниченность используемой в алгоритме сетки вне зависимости от точности решения. Выведена теоретическая оценка сверху времени работы алгоритма. Полученная оценка проверена на практической реализации метода.

Ключевые слова: геометрическая оптимизация, размещение многогранников, суммы Минковского, растеризация, численные методы, сложность вычислений.

1. Введение. Задача оптимального размещения многогранников возникает в разных областях науки и техники [1, 2]. В частности, в процессе огранки драгоценных камней требуется найти наилучшее размещение многогранника заданной формы внутри модели исходного камня, полученной сканированием образца. В этой связи становится важной задача поиска наилучшего размещения одного многогранника (*шаблона*) внутри другого (*контура*). В современных программных комплексах эта задача решается в два этапа: сначала ищется оптимальное решение при фиксированной ориентации, т.е. при фиксированном наборе углов поворота шаблона в пространстве, а затем на основе этой процедуры перебираются всевозможные углы для общего решения задачи размещения. В настоящей статье исследуется метод поиска решения для первого этапа, т.е. поиска наилучшего размещения шаблона, допускающего только параллельные переносы и масштабирование.

Для задач размещения и схожей задачи планирования движения предлагалось множество методов, однако ни один из известных автору методов не решает задачу полностью и достаточно быстро. Большинство известных подходов можно разделить на два класса: методы итерационного улучшения от стартовой точки и методы поиска по геометрической структуре. Первый класс методов обладает лучшей производительностью [2, 3], но существенно зависит от стартовой точки и не гарантирует сходимости к глобальному решению. Ко второму классу относятся алгоритмы, основанные на диаграммах Вороного [4], суммах Минковского [5] и вычислении конфигурационного пространства [6, 7]. Упомянутые методы приводят к более точному решению, однако они сложны в реализации и имеют невысокую скорость работы [8–10]. Более того, почти все известные автору практические алгоритмы требуют выпуклости шаблона. Для устранения описанных недостатков было предложено использовать растровое [11] представление геометрических структур [12] и алгоритмов [13]. Такой подход позволяет обеспечить любую точность решения учетом свойств геометрической структуры и, в то же время, получить простые и быстрые алгоритмы на основе графических процедур, в том числе с использованием специализированных графических процессоров [14–16].

Попытки применить эти методы для задачи размещения сопряжены с рядом трудностей. В частности, приближенные диаграммы Вороного применялись для поиска оптимального размещения только в двумерном случае [4]. Их вычисление в трехмерном случае достаточно трудоемко и может содержать множество ошибок [14, 17], а случай трехмерных граней до сих пор не исследован. Приближенные суммы Минковского, напротив, могут быть построены достаточно быстро в трехмерном случае [18, 19]. Тем не менее, автору не известны практические алгоритмы поиска наибольшего шаблона внутри контура на основе приближенных сумм Минковского. Как правило, подобные методы проистекают из задач планирования движения, а размер шаблона в них фиксирован. Алгоритмы на основе сумм Минковского с переменным размером шаблона ограничиваются поиском вписанного в многогранник шара [5].

В [20] автором настоящей статьи предложен новый численный метод поиска наибольшего шаблона-многогранника фиксированной ориентации внутри другого многогранника на основе растрового представ-

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; аспирант, e-mail: ks-linp@yandex.ru

ления сумм Минковского. Там же доказано, что новый метод сходится к глобальному решению поставленной задачи для класса шаблонов, называемых звездными. В настоящей статье исследуется сложность этого метода и доказывается, что для выпуклых шаблонов в трехмерном пространстве предложенный алгоритм требует не более $O(nm \log(\varepsilon))$ операций, где n — количество граней контура, m — количество граней шаблона, а ε — требуемая точность решения.

2. Постановка задачи и метод решения. В этом разделе приведена формальная постановка задачи и метод ее решения, рассмотренные в [20].

Определение. Будем называть *шаблоном* некоторый многогранник $P \subset \mathbb{R}^d$ для которого точка $0 \in \mathbb{R}^d$ — строго внутренняя. *Реализацией* с центром C радиуса r шаблона P будем называть многогранник $R_{C,r}(P) = T_{0C} \circ H_0^r(P)$, где T_{0C} — параллельный перенос, переводящий 0 в центр C , а H_0^r — гомотетия шаблона с коэффициентом r .

В этих определениях имеем следующую постановку задачи о наибольшей реализации шаблона.

Задача. Пусть даны контур (некоторый многогранник) и шаблон. Требуется найти реализацию шаблона наибольшего радиуса, не выходящую за границу контура.

Для формального описания алгоритма потребуются следующие определения [20].

Определение. В условиях сформулированной задачи назовем ρ -суммой сумму Минковского [21] в \mathbb{R}^d поверхности контура с внутренней областью множества $H_0^{-\rho}(P)$, где $H_0^{-\rho}$ — гомотетия с коэффициентом $-\rho$, т.е. $H_0^{-\rho}(P)$ — центрально-отраженный шаблон радиуса ρ . Обозначим через I_ρ *внутреннюю область ρ -суммы*, т.е. разность данного в нашей задаче контура как многогранника с внутренними точками и ρ -суммы.

Определение. Будем называть кубы в \mathbb{R}^d с гранями, параллельными координатным плоскостям, *простыми*. Под *растром* в \mathbb{R}^d будем понимать набор $(\mathcal{G}_n, \mathcal{P})$, где $\mathcal{G}_n = \{1, \dots, n\}^d$ — сетка, а $\mathcal{P} : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ — вложение раstra в \mathbb{R}^d . При этом полагаем, что \mathcal{P} переводит \mathcal{G}_n в некоторый простой куб G , называемый далее *контейнером* раstra. Образом точки $g \in \mathcal{G}_n$ является *воксел* — простой куб со стороной в n раз меньше стороны G , расположенный в G соответственно своим *координатам g* . *Шагом* раstra назовем длину стороны его воксела. *Изображением* множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$ на растре $(\mathcal{G}_n, \mathcal{P})$ будем называть этот растр с отображением $\mathcal{R} : \mathcal{G}_n \rightarrow \{0, \chi, 1\}$, для которого $\mathcal{R}(g) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(g) \subset \mathcal{M}$, и $\mathcal{R}(g) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(g) \cap \mathcal{M} = \emptyset$, при этом $\mathcal{R}(g) = \chi$ в остальных случаях. Воксел изображения назовем *установленным*, если для его координат g $\mathcal{R}(g) = 1$, либо *пустым*, если $\mathcal{R}(g) = 0$, либо *граничным*, если $\mathcal{R}(g) = \chi$.

В приведенных выше определениях алгоритм численного метода решения задачи о наибольшей реализации шаблона с заданной точностью ε можно представить следующим образом [20].

1. Зададим начальный радиус $\rho = 0$, приращение $\delta = D(G)$, где $D(G)$ — диаметр куба G , содержащего контур, и текущий контейнер — куб $K = G$.

2. Будем увеличивать ρ на δ , пока изображение области I_ρ не пусто.

(а) Построим изображение $(\rho + \delta)$ -суммы на растре $(\mathcal{G}_n, \mathcal{P})$ с контейнером $\mathcal{P}(\mathcal{G}_n) = K$ и шагом $\delta/2$. Все воксели вне контура считаем установленными.

(б) Если построенное изображение содержит пустой воксел, то увеличим ρ на δ и перейдем к предыдущему шагу.

(с) В противном случае перейдем к следующему шагу.

3. Примем в качестве нового контейнера K куб, содержащий все пустые и граничные воксели полученного на шаге 2а изображения. Затем уменьшим δ в два раза и перейдем к шагу 2, если $\delta \geq \varepsilon$.

4. В качестве приближенного решения рассматриваемой нами задачи с точностью ε примем реализацию шаблона радиуса ρ с центром в любом пустом вокселе полученного на шаге 2а изображения.

В [20] доказана теорема о сходимости предложенного алгоритма к решению задачи для звездных невырожденных шаблонов. Под звездными невырожденными шаблонами понимаются многогранники, поверхность которых видна из некоторой внутренней точки, не лежащей ни в одной из гиперплоскостей, содержащих грани шаблона.

3. Вспомогательные утверждения. В настоящей статье исследуется сложность предложенного алгоритма решения задачи о наибольшей реализации шаблона в случае выпуклых шаблонов и трехмерного пространства. Для доказательства основной оценки сложности потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Везде в данном разделе полагаем, что шаблон $P \subset \mathbb{R}^3$ — выпуклый многогранник и контур тоже принадлежит пространству \mathbb{R}^3 .

В первую очередь исследуем структуру ρ -суммы, используемой в алгоритме. По определению, ρ -сумма — это сумма Минковского поверхности контура и центрально-отраженного шаблона $E_\rho = H_0^{-\rho}(P)$.

Поскольку поверхность контура F представляет собой объединение конечного числа граней F_i , то, пользуясь предложением 1.1.1 из [21], получаем, что ρ -сумма есть объединение сумм вида $F_i + E_\rho$. Это выражение эквивалентно линейной комбинации $F_i + \rho E$, определенной в §2 главы VI книги [22], где $E = H_0^{-1}(P)$ — центрально-отраженный шаблон радиуса 1. Из результатов §2 главы VI этой книги следует, что $F_i + \rho E$ — это выпуклый многогранник, грани которого суть линейные комбинации вида $f_i + \rho e$, где f_i и e — некоторые *элементы*, т.е. вершины, ребра или грани F_i и E соответственно. Следовательно, поверхность ρ -суммы состоит из многоугольников-граней, при этом каждая грань ρ -суммы содержится в некотором многоугольнике $f + \rho e$, где f — элемент контура, а e — элемент центрально-отраженного шаблона.

Определение. Будем называть (f, e) -псевдогранью или просто псевдогранью ρ -суммы множество $f + \rho e$, где f и e — некоторые элементы контура и центрально-отраженного шаблона соответственно, которые будем называть *базисными элементами* соответствующей псевдограни.

Заметим, что ρ -сумма при различных ρ имеет один и тот же набор псевдограней, которые определяются только контуром и шаблоном.

Лемма 1. Пусть некоторые псевдограни ρ -суммы пересекаются при $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$, где $\rho_1 < \rho_2$. Тогда те же псевдограни пересекаются при всех $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$.

Доказательство. Пусть z_1 и z_2 — точки пересечения псевдограней при $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ соответственно. Тогда по определению псевдограней имеем $z_k = f_k^i + \rho_k e_k^i$, где $k = \overline{1, 2}$, $f_k^i \in f^i$, $e_k^i \in e^i$, а f^i , e^i — базисные элементы i -й псевдограни. Без ограничения общности будем считать, что f^i — треугольник, а e^i — выпуклый многоугольник.

Рассмотрим точку

$$z = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} z_1 + \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} z_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} z &= \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} (f_1^i + \rho_1 e_1^i) + \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} (f_2^i + \rho_2 e_2^i) = \\ &= \left(\frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} f_1^i + \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} f_2^i \right) + \rho \left(\frac{(\rho_2 - \rho)\rho_1}{\rho(\rho_2 - \rho_1)} e_1^i + \frac{(\rho - \rho_1)\rho_2}{\rho(\rho_2 - \rho_1)} e_2^i \right). \end{aligned}$$

Докажем, что точка z принадлежит обоим псевдограням при любом $\rho = \tilde{\rho} \in (\rho_1, \rho_2)$, т.е. что $z = \tilde{f}^i + \tilde{\rho} \tilde{e}^i$, где $\tilde{f}^i \in f^i$ и $\tilde{e}^i \in e^i$. Действительно, поскольку $f_1^i \in f^i$, $f_2^i \in f^i$ и f^i — треугольник, а

$$\tilde{f}^i = \left(\frac{\rho_2 - \tilde{\rho}}{\rho_2 - \rho_1} f_1^i + \frac{\tilde{\rho} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} f_2^i \right) -$$

точка на отрезке $[f_1^i, f_2^i]$, то $\tilde{f}^i \in f^i$. Докажем далее, что

$$\tilde{e}^i = \left(\frac{(\rho_2 - \tilde{\rho})\rho_1}{\tilde{\rho}(\rho_2 - \rho_1)} e_1^i + \frac{(\tilde{\rho} - \rho_1)\rho_2}{\tilde{\rho}(\rho_2 - \rho_1)} e_2^i \right) \in e^i. \tag{1}$$

Обозначим

$$\lambda = \frac{(\rho_2 - \tilde{\rho})\rho_1}{\tilde{\rho}(\rho_2 - \rho_1)}.$$

Из неравенств $\rho_1 < \tilde{\rho} < \rho_2$ следует, что $\lambda > 0$. Покажем, что $\lambda < 1$. Действительно,

$$\lambda < 1 \Leftrightarrow (\rho_2 - \tilde{\rho})\rho_1 < \tilde{\rho}(\rho_2 - \rho_1) \Leftrightarrow \rho_2\rho_1 < \tilde{\rho}\rho_2,$$

что верно в силу $\rho_1 < \tilde{\rho}$. Далее имеем

$$1 - \lambda = \frac{\tilde{\rho}(\rho_2 - \rho_1) - (\rho_2 - \tilde{\rho})\rho_1}{\tilde{\rho}(\rho_2 - \rho_1)} = \frac{(\tilde{\rho} - \rho_1)\rho_2}{\tilde{\rho}(\rho_2 - \rho_1)}.$$

Таким образом, из (1) заключаем, что $\tilde{e}^i = \lambda e_1^i + (1 - \lambda)e_2^i$, $\lambda \in (0, 1)$. Значит, \tilde{e}^i лежит на отрезке $[e_1^i, e_2^i]$. По определению $e_1^i \in e^i$ и $e_2^i \in e^i$; как показано ранее, e^i — выпуклый многоугольник. Следовательно, $\tilde{e}^i \in e^i$, $z = \tilde{f}^i + \tilde{\rho} \tilde{e}^i$, что верно для $i = \overline{1, 2}$, т.е. для обеих псевдограней, а значит z — точка пересечения тех же псевдограней при $\rho = \tilde{\rho}$.

Лемма доказана.

Во всех нижеследующих леммах радиус решения задачи о наибольшей реализации шаблона обозначен через $\tilde{\rho}$.

Лемма 2. *Начиная с некоторого шага алгоритма область I_ρ — многогранник, причем каждая вершина этого многогранника — это результат пересечения одних и тех же псевдограней ρ -суммы, а все эти псевдограни касаются решения при $\rho = \bar{\rho}$.*

Доказательство. Как было показано выше, ρ -сумма для выпуклого шаблона является объединением выпуклых многогранников. Разность многогранника и выпуклого многогранника — это конечная фигура, ограниченная многоугольниками, т.е. некоторое множество многогранников. Значит, область I_ρ на каждом шаге представляет собой некоторое множество многогранников.

Выберем какую-либо пару псевдограней. Пусть $\mathbb{P}(\rho')$ — предикат их пересечения, т.е. $\mathbb{P}(\rho') = 1$, если эти псевдограни имеют общую точку при $\rho = \rho'$, и $\mathbb{P}(\rho') = 0$ в противном случае. Если $\mathbb{P}(\rho)$ меняется более трех раз в процессе работы алгоритма, то существуют такие $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$, что значения $\mathbb{P}(\rho_i)$ чередуются. Тогда существуют такие $\rho_{k-1} < \rho_k < \rho_{k+1}$, что при ρ_{k-1} и при ρ_{k+1} данные псевдограни пересекаются, а при ρ_k — нет. Это противоречит лемме 1, значит предположение не верно и предикат пересечения для этих псевдограней меняется в процессе работы алгоритма не более трех раз. Псевдограней в ρ -сумме конечное число; следовательно, набор их пересечений меняется конечное число раз и, начиная с некоторого шага i_1 алгоритма, предикаты пересечения для всех пар псевдограней остаются постоянными. Значит, если на шаге i_1 область I_ρ состоит из нескольких многогранников, то эти многогранники сохраняются на всех последующих шагах алгоритма, так как сохраняются их вершины как точки пересечения псевдограней. Однако решение единственно и содержится лишь в одном из этих многогранников; следовательно, остальные многогранники на некотором шаге накроются ρ -суммой, а это противоречит тому факту, что они сохраняются. Значит, начиная с шага i_1 алгоритма, область I_ρ состоит из единственного многогранника, содержащего решение, и все его вершины образованы пересечением одних и тех же псевдограней.

Выберем те псевдограни суммы, которые касаются решения при $\rho = \bar{\rho}$. Тогда существует такое ε , что остальные псевдограни при $\rho = \bar{\rho}$ удалены от решения как минимум на ε . Действительно, поскольку решение при всех $\rho \leq \bar{\rho}$ находится во внутренней области, то остальные псевдограни не пересекают решение и не касаются его; значит, расстояние от них до решения при $\rho = \bar{\rho}$ положительно. Псевдограней в ρ -сумме конечное число, поэтому в качестве ε можем взять наименьшее из таких расстояний. Рассмотрим $B_{\varepsilon/2}$ — шар с центром в решении радиуса $\varepsilon/2$. Тогда, поскольку все точки вне $B_{\varepsilon/2}$ не являются решениями, существует шаг i_2 , такой, что внешние к шару точки накроются ρ -суммой, т.е. $I_{\rho_{i_2}} \subset B_{\varepsilon/2}$. Поскольку все грани, не являющиеся касательными к решению при $\rho = \bar{\rho}$, находятся вне $B_{\varepsilon,2}$, то $I_{\rho_{i_2}}$ состоит только из касательных граней.

Выберем $i = \max\{i_1, i_2\}$. Тогда начиная с шага i выполнены все утверждения леммы.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если все псевдограни, образующие поверхность многогранника I_ρ на некотором шаге i алгоритма, касаются решения при $\rho = \bar{\rho}$, то на шаге i алгоритма реализация шаблона радиуса $\bar{\rho} - \rho$ с центром в решении задачи не выходит за границу многогранника I_ρ и касается каждой его грани.*

Доказательство. Рассмотрим любую псевдогрань $f + \rho e$ из образующих поверхность многогранника I_ρ . По условию $f + \bar{\rho} e$ касается решения. Положим $\delta = \bar{\rho} - \rho$. По предложению 1.2.3 из [21] имеем

$$f + \bar{\rho} e = f + \rho e + \delta e,$$

поскольку e — выпуклое множество как элемент центрально-отраженного выпуклого шаблона. Значит, $f + \rho e + \delta e$ касается решения и существуют такие точки $A \in f + \rho e$ и $B \in \delta e$, что $A + B = S$, где S — решение нашей задачи. Здесь и далее под суммой точек понимаем их сумму как векторов в \mathbb{R}^3 . Тогда, поскольку δe — элемент центрально-отраженного шаблона радиуса δ и $B \in \delta e$, то $-B$ лежит на поверхности шаблона радиуса δ , а $A = S - B$ лежит на поверхности реализации $R_{S,\delta}(P)$ шаблона радиуса δ с центром в S . Кроме того, по определению имеем $A \in f + \rho e$, т.е. точка A лежит на выбранной псевдограней ρ -суммы. Следовательно, реализация шаблона радиуса $\bar{\rho} - \rho$ имеет общую точку с каждой псевдогранью из образующих поверхность многогранника I_ρ .

Докажем теперь, что реализация шаблона радиуса $\bar{\rho} - \rho$ с центром в S не выходит за границу многогранника I_ρ . Предположим противное, тогда существует точка C на границе $R_{S,\delta}(P)$, лежащая вне I_ρ , и найдется некоторый шар \mathbb{B} с центром в C , лежащий вне I_ρ . Тогда найдется такое значение ε , что $R_{S,\delta-\varepsilon}(P)$ касается \mathbb{B} , а значит имеет точку \bar{C} внутри ρ -суммы. По лемме 1 [20] поверхность $R_{\bar{C},\rho}$ выходит за границу контура, а значит существует такая точка $D \in \rho P$, что $\bar{C} + D$ лежит вне контура. Заметим, что $\bar{C} + D \in R_{S,\delta-\varepsilon}(P) + \rho P$. По лемме 1 (§2 главы VI книги [22]) имеем

$$R_{S,\delta-\varepsilon}(P) + \rho P = T_{0S}((\delta - \varepsilon)P) + \rho P = T_{0S}((\delta - \varepsilon)P + \rho P).$$

Из предложения 1.2.3 (см. [21]) получаем

$$R_{S,\delta-\varepsilon}(P) + \rho P = T_{0S}((\rho + \delta - \varepsilon)P) = R_{S,\bar{\rho}-\varepsilon}(P).$$

Отсюда следует, что $\bar{C} + D \in R_{S,\bar{\rho}-\varepsilon}(P)$. Аналогично доказательству леммы 2 из [20], из выпуклости шаблона следует, что $R_{S,\bar{\rho}-\varepsilon}(P) \subset R_{S,\bar{\rho}}(P)$. Получаем, что точка $\bar{C} + D \in R_{S,\bar{\rho}}(P)$ лежит вне контура, т.е. решение $R_{S,\bar{\rho}}(P)$ задачи выходит за границу контура, что противоречит его определению. Следовательно, предположение не верно и $R_{S,\bar{\rho}-\rho}$ не выходит за границу многогранника I_ρ . Однако, как показано выше, $R_{S,\bar{\rho}-\rho}$ имеет общую точку с каждой псевдогранью, образующей границу I_ρ , что возможно только в том случае, когда $R_{S,\bar{\rho}-\rho}$ касается каждой грани I_ρ .

Лемма доказана.

Определение. Назовем *внешним радиусом* многогранника I_ρ наибольшее расстояние от решения задачи о наибольшей реализации шаблона до границы I_ρ , а *внутренним радиусом* I_ρ величину $\bar{\rho} - \rho$.

Замечание. Очевидно, что I_ρ содержится внутри шара с центром в решении задачи радиуса, равного внешнему радиусу I_ρ , и внешний радиус I_ρ реализуется в вершине I_ρ как многогранника. Кроме того, по лемме 3 реализация шаблона с центром в решении радиуса, равного внутреннему радиусу I_ρ , лежит внутри I_ρ и касается всех граней I_ρ .

Лемма 4. Существует такая константа \bar{C} , что, начиная с некоторого шага алгоритма, для внешнего радиуса $R(\rho)$ и внутреннего радиуса $r(\rho)$ многогранника I_ρ выполнено

$$R(\rho) \leq \bar{C}r(\rho).$$

Доказательство. Рассмотрим некоторую вершину многогранника I_ρ . По лемме 2, начиная с некоторого шага i алгоритма, эта вершина есть результат пересечения одних и тех же псевдограней. По лемме 4 (§2 главы VI книги [22]) нормали к плоскостям псевдограней совпадают с нормальными элементами их базисных элементов, а значит их направления не зависят от радиуса и одинаковы на всех шагах алгоритма. Пусть \bar{n}_j — нормали к этим псевдограням, $j = \overline{1, 2, 3}$. Будем считать, что $\|\bar{n}_j\| = 1$. Тогда для координат x вершины, в которой реализуется внешний радиус, выполнены уравнения

$$\bar{n}_j \cdot x = h_j(\rho), \quad j = \overline{1, 2, 3}, \tag{2}$$

причем \bar{n}_j не зависят от ρ .

Поскольку $\|\bar{n}_j\| = 1$, то $|h_j(\rho)|$ есть расстояние до точки 0 от плоскости соответствующей псевдограню ρ -суммы. Без ограничения общности, сделав параллельный перенос контура, полагаем, что решение задачи совпадает с 0. Тогда $|h_j(\rho)|$ — расстояние от плоскости псевдограню до решения. По лемме 3 и замечанию выше реализация шаблона с центром в решении и радиусом, равным внутреннему радиусу, касается плоскостей псевдограней, значит $h_j(\rho)$ — расстояние от центра этого шаблона до касательной к нему плоскости с соответствующей нормалью. Из свойств подобия имеем

$$h_j(\rho) = k_j r(\rho), \tag{3}$$

где k_j зависит только от \bar{n}_j и не зависит от ρ , а $r(\rho)$ — радиус вписанной реализации шаблона, равный внутреннему радиусу многогранника I_ρ .

Поскольку многогранник I_ρ конечен, то вершина должна определяться пересечением псевдограней однозначно. Без ограничения общности считаем что \bar{n}_j линейно независимы. Тогда уравнения (2) можно записать в виде

$$Nx = \bar{h}(\rho),$$

где матрица N состоит из нормированных векторов нормалей к плоскостям псевдограней, а $\bar{h}(\rho) = (h_1(\rho), h_2(\rho), h_3(\rho))$ — вектор расстояний от плоскостей псевдограней до решения. Пользуясь выражением (3) и обозначая $\bar{k} = (k_1, k_2, k_3)$, имеем

$$Nx = \bar{k}r(\rho).$$

Поскольку \bar{n}_j линейно-независимы, то матрица N не вырождена и решение системы имеет вид

$$x = N^{-1}\bar{k}r(\rho).$$

Оценим расстояние от 0 до выбранной вершины с координатами x :

$$\|x\| = \|N^{-1}\bar{k}\|r(\rho).$$

Матрица N состоит из векторов \bar{n}_j , которые, как показано выше, не зависят от ρ . Вектор \bar{k} зависит только от \bar{n}_j и, следовательно, тоже не зависит от ρ . Поэтому величина $\|N^{-1}\bar{k}\|$ есть некоторое число C , не зависящее от ρ , и

$$\|x\| = Cr(\rho). \quad (4)$$

По замечанию выше внешний радиус $R(\rho)$ реализуется в некоторой вершине y и $R(\rho) = \|y\|$. Однако, начиная с шага i , для всех вершин выполнено (4). Взяв максимум \bar{C} среди констант в (4), получаем для любой вершины y неравенство $\|y\| \leq \bar{C}r(\rho)$ и для внешнего радиуса

$$R(\rho) \leq \bar{C}r(\rho).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть решение единственно, а шаблон выпуклый. Тогда количество вокселей в растре ограничено некоторой константой G на всех шагах алгоритма.

Доказательство. Пусть k — отношение радиуса шаблона к радиусу вписанного в него куба. Тогда из доказательства леммы 3 [20] очевидно, что внутри шаблона радиуса $k\delta$ есть пустой воксел на растре шага $\delta/2$.

Рассмотрим переход на шаге 3 алгоритма. Так как радиус многогранника I_ρ уменьшается с каждым шагом 2, то на шаге 3 достигается наибольший размер сетки для заданного δ . Докажем, что на этом шаге внутренний радиус I_ρ ограничен $4k\delta$. Действительно, если для внутреннего радиуса многогранника I_ρ , равного по лемме 3 радиусу вписанного шаблона, выполнено $r(\rho) \geq 4k\delta$, то внутри есть пустой 2δ -воксел. Значит, увеличив ρ на δ , мы не накроем δ -воксел внутри и не сделаем переход на шаг 3. Однако переход имеет место; следовательно,

$$r(\rho) \leq 4k\delta. \quad (5)$$

По лемме 4, начиная с некоторого шага i алгоритма, для внешнего радиуса $R(\rho)$ многогранника I_ρ и некоторой константы C выполнено $R(\rho) \leq Cr(\rho)$. Отсюда и из (5) получаем оценку $R(\rho) \leq 4kC\delta$. Следовательно, вдоль одной стороны контейнера K алгоритма имеем не более $16kC$ вокселей и, начиная с шага i , общее количество вокселей раstra не превышает $(16kC)^d$, где d — размерность пространства.

До шага i выполняется конечное число построений раstra. Взяв в качестве G максимум среди количеств вокселей в этих растрах и принимая оценку $(16kC)^d$, получаем, что количество вокселей в растре ограничено константой G на всех шагах алгоритма.

Лемма доказана.

4. Оценка сложности алгоритма. В данном разделе формулируется и доказывается основная теорема настоящей статьи.

Теорема. Если в задаче о наибольшей реализации шаблона решение единственно, шаблон выпуклый, а пространство трехмерно, то сложность предложенного алгоритма решения задачи о наибольшей реализации шаблона не больше $O(nm \log(\varepsilon))$, где n — количество граней контура, m — количество граней шаблона, а ε — требуемая точность решения задачи.

Доказательство. Если шаблон выпуклый, то сумма Минковского каждой грани контура (треугольника) и шаблона строится за $O(m)$ операций и имеет сложность $O(m)$ [19]. Сформировать ρ -сумму на растре можно с помощью построения суммы Минковского шаблона и каждой грани контура с последующей заливкой внутренних вокселей. Растеризация суммы Минковского с $O(m)$ гранями требует не более $O(G(\varepsilon)m)$ операций, а заливку можно выполнить одним из известных алгоритмов [23] за $O(G(\varepsilon))$ операций, где $G(\varepsilon)$ — максимальное количество вокселей раstra среди шагов, требуемых для достижения точности ε . Этот процесс следует повторить для каждой грани контура, а затем найти на растре пустые воксели. Таким образом, на одну итерацию шага 2 алгоритма, т.е. построение ρ -суммы на растре и проверку непустоты многогранника I_ρ требуется не более $O(G(\varepsilon)nm)$ операций. По лемме 5 имеем $G(\varepsilon) \leq G$ для некоторой фиксированной константы G ; следовательно, $O(G(\varepsilon)nm) = O(nm)$, и на одну итерацию шага 2 требуется максимум $O(nm)$ операций.

Пусть k — радиус наибольшего куба с центром в 0 , не выходящего за границы шаблона радиуса 1. Рассмотрим шаг 3 алгоритма и без ограничения общности полагаем, что на текущей и на предыдущей итерациях шага 3 выполнено утверждение леммы 2, так как постоянное число шагов до этого момента не влияет на итоговую оценку по ε . Пусть $\rho = \rho_1$ на предыдущей итерации шага 3. По лемме 3 реализация шаблона с центром в решении радиуса $(\bar{\rho} - \rho_1) - \delta$ содержится в области $I_{\rho_1 + \delta}$, где $\bar{\rho}$ — радиус решения; следовательно, внутри $I_{\rho_1 + \delta}$ содержится куб радиуса $k((\bar{\rho} - \rho_1) - \delta)$. На предыдущей итерации шага 3

область $I_{\rho_1+\delta}$ не должна содержать пустых вокселей со стороны $\delta/2$, откуда следует оценка

$$k((\bar{\rho} - \rho_1) - \delta) \leq \delta,$$

или

$$(\bar{\rho} - \rho_1) \leq \frac{\delta}{k} + \delta. \tag{6}$$

Пусть $\rho = \rho_2$ на текущей итерации шага 3, тогда на предпоследней итерации шага 2 область I_{ρ_2} содержала пустой воксел, т.е. куб со стороной $\delta/4$, поскольку приращение на этой итерации равно $\delta/2$. Значит, область I_{ρ_2} содержит реализацию шаблона радиуса как минимум $\delta/4$. По лемме 3 область I_{ρ_2} содержит реализацию шаблона радиуса $\bar{\rho} - \rho_2$, откуда следует, что

$$\bar{\rho} - \rho_2 \geq \frac{\delta}{4}. \tag{7}$$

Объединяя уравнения (6) и (7), получаем

$$\rho_2 - \rho_1 = -(\bar{\rho} - \rho_2) + (\bar{\rho} - \rho_1) \leq \frac{\delta}{k} + \delta - \frac{\delta}{4} = \delta \frac{3k + 4}{4k}.$$

На каждой итерации шага 2 алгоритма, за исключением последней, радиус увеличивается на приращение, т.е. на $\delta/4$ в случае текущей итерации шага 3. Значит, количество итераций шага 2 на одну итерацию шага 3 не превышает

$$(\rho_2 - \rho_1) \frac{4}{\delta} + 1 = \frac{3k + 4}{k} + 1,$$

а суммарное число шагов 2 и 3 для достижения точности ε не больше $O(S(\varepsilon))$, где $S(\varepsilon)$ — число итераций шага 3 алгоритма. На каждой итерации шага 3 приращение уменьшается в 2 раза до достижения точности ε ; следовательно,

$$S(\varepsilon) \leq \log\left(\frac{\delta_0}{\varepsilon}\right) = O(\log(\varepsilon)),$$

где δ_0 — приращение на первом шаге. Сложность выполнения одного шага 3 равна $G(\varepsilon)$, т.е. количеству вокселей в растре; по лемме 5 имеем $G(\varepsilon) \leq G$. Выше показано, что сложность шага 2 не превышает $O(nm)$. Таким образом, получаем следующую общую оценку сложности алгоритма сверху: $O(nm \log(\varepsilon))$.

Теорема доказана.

5. Выводы. Исследуемый в настоящей статье алгоритм был реализован на практике. Зависимость времени работы полученной реализации от размера входных данных приведена на рис. 1–3.

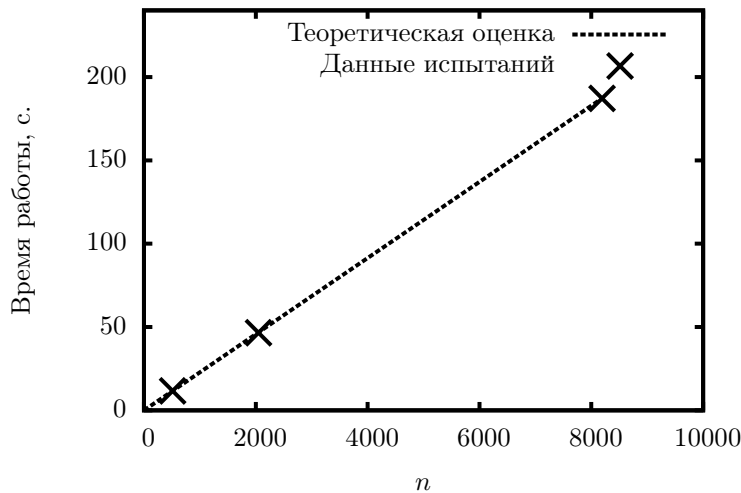


Рис. 1. Зависимость времени работы от размера контура, $m = 480$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

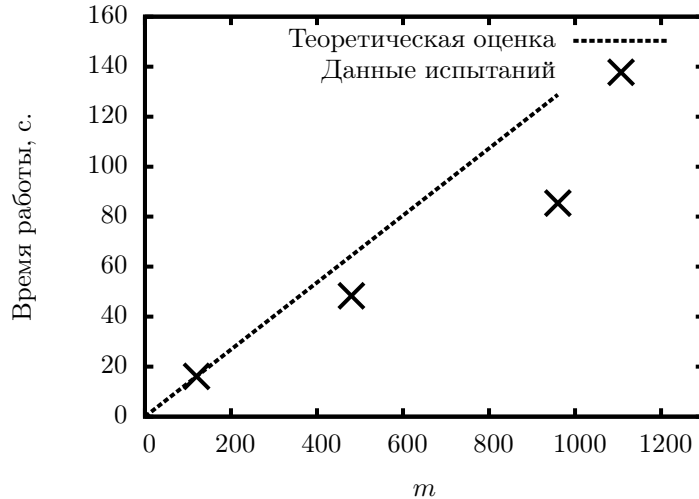


Рис. 2. Зависимость времени работы от размера шаблона, $n = 2048$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

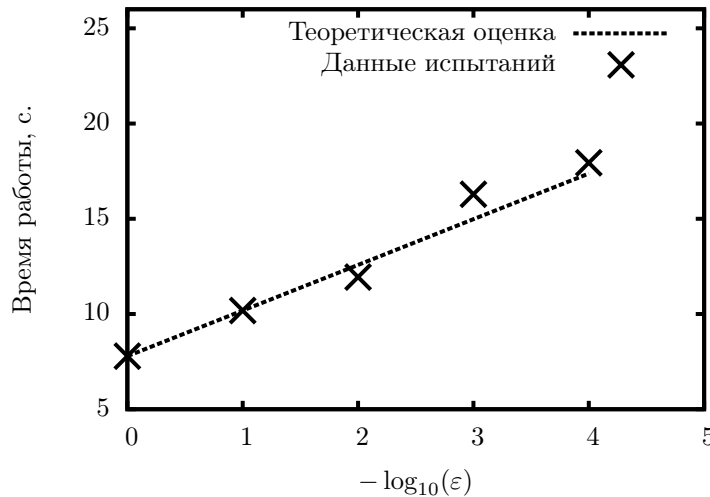


Рис. 3. Зависимость времени работы от точности решения, $n = 2048$, $m = 120$.

Полученное время работы больше, чем в [20], так как для чистоты эксперимента был отключен ряд оптимизаций, в частности отсечение граней суммы Минковского, не влияющий на последующие шаги алгоритма. Из рис. 1 и 3 видно, что обоснованная теоретически сложность хорошо согласуется с данными эксперимента. На рис. 2 практически полученное время работы меньше теоретической оценки несмотря на отключенные оптимизации. Это объясняется тем, что большая часть граней шаблона не участвует в формировании границы rasterизуемой ρ -суммы, а количество существенных граней шаблона, т.е. порождающих псевдограней с непустым изображением на растре, растет не так быстро, как общее количество граней шаблона. Таким образом, большая часть граней шаблона порождает треугольники, отсекаемые rasterизатором как заведомо далекие от растра. По результатам профилирования от 60% до 90% времени работы алгоритма тратится на rasterизацию. Отсюда следует, что время работы в зависимости от количества граней шаблона растет медленнее, чем теоретическая оценка, что видно на рис. 2. Тем не менее, полученная в статье теоретическая оценка сверху остается справедливой на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roth L. Optimal containment. Munich: Technical Univ. Munich, 2009.
2. Deits R., Tedrake R. Computing large convex regions of obstacle-free space through semidefinite programming. 2014 (http://groups.csail.mit.edu/robotics-center/public_papers/Deits14.pdf).

3. *Chebrolu U., Kumar P., Mitchell J.S.B.* On finding large empty convex bodies in 3D scenes of polygonal models // Proc. Int. Conf. on Computational Sciences and Its Applications (ICCSA 2008). New York: IEEE Press, 2008. 382–393.
4. *Denny M.* Solving geometric optimization problems using graphics hardware // Computer Graphics Forum. 2003. **22**, N 3. 441–451.
5. *Pustyl'nik G.* Spatial planning with constraints on translational distances between geometric objects (<http://www.cs.tau.ac.il/~genap/SpatPlan.pdf>).
6. *Lozano-Perez T.* Spatial planning: a configuration space approach // IEEE Transactions on Computers. 1983. **C-32**, N 2. 108–120.
7. *Agarwal P.K., Amenta N., Aronov B., Sharir M.* Largest placements and motion planning of a convex polygon // Proc. 2nd Int. Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR'96). Toulouse: Lab. for Analysis and Architecture of Systems, 1996. 143–154.
8. *Koltun V., Sharir M.* Polyhedral Voronoi diagrams of polyhedra in three dimensions // Discrete and Computational Geometry. 2004. **31**, N 1. 83–124.
9. *Karavelas M.I., Tzanaki E.* The maximum number of faces of the Minkowski sum of two convex polytopes // Proc. 23rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia: SIAM, 2012. 11–28.
10. *Fogel E., Halperin D., Weibel C.* On the exact maximum complexity of Minkowski sums of polytopes // Discrete and Computational Geometry. 2009. **42**, N 4. 654–669.
11. *Kaufman A.E.* Voxels as a computational representation of geometry // CD-ROM Proc. ACM SIGGRAPH'94. The Computational Representation of Geometry. New York: ACM Press, 1994.
12. *Fischer I., Gotsman C.* Fast approximation of high-order Voronoi diagrams and distance transforms on the GPU // Journal of Graphics, GPU, and Game Tools. 2006. **11**, N 4. 39–60.
13. *Agarwal P.K., Krishnan S., Mustafa N.H., Venkatasubramanian S.* Streaming geometric optimization using graphics hardware // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2832. Heidelberg: Springer, 2003. 544–555.
14. *Yuan Z., Rong G., Guo X., Wang W.* Generalized Voronoi diagram computation on GPU // Proc. 8th Int. Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering. New York: IEEE Press, 2011. 75–82.
15. *Li W., McMains S.* Voxelized Minkowski sum computation on the GPU with robust culling // Computer-Aided Design. 2011. **43**, N 10. 1270–1283.
16. *Sacks E.P., Kyung M.-H., Milenkovic V.* Robust Minkowski sum computation on the GPU. Technical Report N 13-001. West Lafayette: Purdue Univ., 2013.
17. *Hoff K.E., Keyser J., Lin M., et al.* Fast computation of generalized Voronoi diagrams using graphics hardware // Proc. 26th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1999. 277–286.
18. *Varadhan G., Manocha D.* Accurate Minkowski sum approximation of polyhedral models // Graphical Models. 2006. **68**, N 4. 343–355.
19. *Barki H., Denis F., Dupont F.* Contributing vertices-based Minkowski sum computation of convex polyhedra // Computer-Aided Design. 2009. **41**, N 7. 525–538.
20. *Карпухин С.А.* О геометрической оптимизации методом растеризации сумм Минковского // Программная инженерия. 2014. № 6. 19–22.
21. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
22. *Александров А.Д.* Выпуклые многогранники. Л.: ГИТТЛ, 1950.
23. *Иванов Д.В., Карпов А.С., Кузьмин Е.П., Лемпицкий В.С., Хропов А.А.* Алгоритмические основы растровой машинной графики. М.: БИНОМ, 2007.

Поступила в редакцию
21.08.2014

Complexity of Geometric Optimization by Rasterization of Minkowski Sums

S. A. Karpukhin¹

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119899, Russia; Graduate Student, e-mail: ks-linp@yandex.ru*

Received August 21, 2014

Abstract: The problem of finding the largest polytope of a given shape (pattern) inside another polytope is considered. A numerical method based on Minkowski sums rasterization for solving the problem in the case of a pattern with fixed orientation is studied. The method's complexity for the case of the problem with a unique solution and a convex pattern is analyzed. It is proved that the grid used in the algorithm

is bounded independently of the solution's accuracy. An upper estimate of the algorithm's running time is derived theoretically. This estimate is confirmed practically.

Keywords: geometric optimization, polytope placement, Minkowski sums, rasterization, numerical methods, computational complexity.

References

1. L. Roth, *Optimal Containment* (Technical Univ. of Munich, Munich, 2009).
2. R. Deits and R. Tedrake, "Computing Large Convex Regions of Obstacle-Free Space through Semidefinite Programming," http://groups.csail.mit.edu/robotics-center/public_papers/Deits14.pdf. Cited August 20, 2014.
3. U. Chebrolu, P. Kumar, and J. S. B. Mitchell, "On Finding Large Empty Convex Bodies in 3D Scenes of Polygonal Models," in *Proc. Int. Conf. on Computational Sciences and Its Applications (ICCSA 2008)* (IEEE Press, New York, 2008), pp. 382–393.
4. M. Denny, "Solving Geometric Optimization Problems Using Graphics Hardware," *Comput. Graph. Forum* **22** (3), 441–451 (2003).
5. G. Pustylnik, "Spatial Planning with Constraints on Translational Distances between Geometric Objects," <http://www.cs.tau.ac.il/genap/SpatPlan.pdf>. Cited August 20, 2014.
6. T. Lozano-Perez, "Spatial Planning: A Configuration Space Approach," *IEEE Trans. Comput.* **32** (C-32), 108–120 (1983).
7. P. K. Agarwal, N. Amenta, B. Aronov, and M. Sharir, "Largest Placements and Motion Planning of a Convex Polygon," in *Proc. 2nd Int. Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR'96)* (Lab. for Analysis and Architecture of Systems, Toulouse, 1996), pp. 143–154.
8. V. Koltun and M. Sharir, "Polyhedral Voronoi Diagrams of Polyhedra in Three Dimensions," *Discrete Comput. Geom.* **31** (1), 83–124 (2004).
9. M. I. Karavelas and E. Tzanaki, "The Maximum Number of Faces of the Minkowski Sum of Two Convex Polytopes," in *Proc. 23rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SIAM, Philadelphia, 2012), pp. 11–28.
10. E. Fogel, D. Halperin, and C. Weibel, "On the Exact Maximum Complexity of Minkowski Sums of Polytopes," *Discrete Comput. Geom.* **42** (4), 654–669 (2009).
11. A. E. Kaufman, "Voxels as a Computational Representation of Geometry," in *CD-ROM Proc. ACM SIGGRAPH'94. The Computational Representation of Geometry* (ACM Press, New York, 1994).
12. I. Fischer and C. Gotsman, "Fast Approximation of High-Order Voronoi Diagrams and Distance Transforms on the GPU," *J. Graph. GPU Game Tools* **11** (4), 39–60 (2006).
13. P. K. Agarwal, S. Krishnan, N. H. Mustafa, and S. Venkatasubramanian, "Streaming Geometric Optimization Using Graphics Hardware," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2003), Vol. 2832, pp. 544–555.
14. Z. Yuan, G. Rong, X. Guo, and W. Wang, "Generalized Voronoi Diagram Computation on GPU," in *Proc. 8th Int. Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering* (IEEE Press, New York, 2011), pp. 75–82.
15. W. Li and S. McMains, "Voxelized Minkowski Sum Computation on the GPU with Robust Culling," *Comput. Aided Design* **43** (10), 1270–1283 (2011).
16. E. P. Sacks, M.-H. Kyung, and V. Milenkovic, *Robust Minkowski Sum Computation on the GPU*, Report 13-001 (Purdue Univ., West Lafayette, 2013).
17. K. E. Hoff, J. Keyser, M. Lin, et al., "Fast Computation of Generalized Voronoi Diagrams Using Graphics Hardware," in *Proc. 26th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques* (ACM Press, New York, 1999), pp. 277–286.
18. G. Varadhan and D. Manocha, "Accurate Minkowski Sum Approximation of Polyhedral Models," *Graph. Models* **68** (4), 343–355 (2006).
19. H. Barki, F. Denis, and F. Dupont, "Contributing Vertices-Based Minkowski Sum Computation of Convex Polyhedra," *Comput. Aided Design* **41** (7), 525–538 (2009).
20. S. A. Karpukhin, "On Geometric Optimization by Means of Minkowski Sums Rasterization," *Programm-naya Inzheneriya*, No. 6, 19–22 (2014).
21. E. S. Polovinkin and M. V. Balashov, *Elements of Convex and Strongly Convex Analysis* (Fizmatlit, Moscow, 2004) [in Russian].
22. A. D. Aleksandrov, *Convex Polytopes* (Gostekhizdat, Leningrad, 1950) [in Russian].
23. D. V. Ivanov, A. S. Karpov, E. P. Kuz'min, V. S. Lempitskii, and A. A. Khropov, *Algorithmic Foundations of Raster Computer Graphics* (Binom, Moscow, 2007) [in Russian].