

УДК 519.6

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ В ПРИБРЕЖНЫХ ВОДНЫХ СИСТЕМАХ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

А. И. Сухинов<sup>1</sup>, А. Е. Чистяков<sup>2</sup>, Е. А. Проценко<sup>3</sup>

Рассмотрена нестационарная пространственно-двумерная модель транспорта наносов в прибрежной зоне водоемов, учитывающая следующие физические параметры и процессы: пористость грунта; критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов; турбулентный обмен; динамически изменяемую геометрию дна и функцию возвышения уровня; ветровые течения и трение о дно. Построены и программно реализованы на кластере распределенных вычислений пространственно-двумерная и трехмерная модели гидродинамики в прибрежной зоне водоемов, а также модель транспорта взвешенных частиц. Приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** математическая модель, транспорт наносов, распределенные вычисления, параллельное программирование, динамика морских наносов, уравнения мелкой воды, уравнение диффузии-конвекции-реакции, уравнения Навье–Стокса.

**Введение.** Среди разнообразия природных явлений особое место по сложности, многообразию и практической значимости принадлежит процессам, протекающим в прибрежных водных системах. В условиях возрастания антропогенной нагрузки на прибрежно-шельфовые зоны реализация концепции устойчивого развития возможна с учетом всех факторов и процессов, определяющих состояние берегов. Динамика берегов и прибрежного рельефа дна во многом определяется характером перемещения наносов в береговой зоне под воздействием волн и течений. При конструктивном преобразовании рельефов необходимо учитывать динамику профиля дна в прибрежной зоне водоема под воздействием волновых процессов. Необходимы обоснованные методы расчета для достоверного прогноза динамических процессов береговой зоны. Одним из наиболее эффективных методов исследования реальных процессов гидродинамики в настоящее время становится численное моделирование. Таким образом, проблема настоящей статьи — прогнозирование формирования профиля дна в прибрежной зоне водоема при образовании наносов средствами численного моделирования — является актуальной.

**1. Задача транспорта наносов.** Для описания динамики морских наносов в работе применяются уравнения, которые описывают переформирование прибрежной зоны водоемов, где вода и твердые частицы перемещаются в одном направлении. Уравнения процесса перемещения наносов [1–5] могут быть записаны в следующем виде:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0,$$

$$Q = \begin{cases} A\bar{\omega} d |\psi|^{\beta-1} \psi, & |\tau| \geq \tau_{bc}, \\ 0, & |\tau| < \tau_{bc}; \end{cases} \quad \psi = \frac{\tau}{(\rho_1 - \rho_0)gd}. \quad (1)$$

Здесь  $H$  — глубина дна, отсчитываемая от невозмущенной поверхности водоема;  $\omega$  — пористость грунта;  $Q = \{Q_x, Q_y\}$  — расход наносов,  $|Q| = Q$ ;  $x, y$  — горизонтальные декартовы координаты;  $\tau_b$  — касательное напряжение на дне;  $\tau_{bc}$  — критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\rho$  — плотность жидкости;  $A$  и  $\beta$  — безразмерные постоянные ( $A = 19.5$ ,  $\beta = 3$ );  $\bar{\omega}$  — частота волны;  $d$  — характеристика осадков.

<sup>1</sup> Южный федеральный университет, Институт компьютерных технологий и информационной безопасности, пер. Некрасовский, 44, 347922, г. Таганрог; зав. кафедрой, профессор, e-mail: sukhinov@gmail.com

<sup>2</sup> Южный федеральный университет, Институт компьютерных технологий и информационной безопасности, пер. Некрасовский, 44, 347922, г. Таганрог; доцент, e-mail: cheese\_05@mail.ru

<sup>3</sup> Таганрогский государственный педагогический институт им. А. П. Чехова, факультет физики, математики и информатики ул. Инициативная, 48, 347900, г. Таганрог; доцент, e-mail: earpros@gambler.ru

Запишем касательное напряжение для наклонной поверхности дна:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_b - \alpha \sin S \mathbf{n}, \tag{2}$$

где  $S(x, y, t)$  — острый угол между вектором нормали к поверхности дна и вектором силы гравитации в момент времени  $t$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный в сторону градиента глубины;  $\alpha \sin S$  — дополнительное тангенциальное напряжение на дне водоема, вызываемое гравитационными силами. В случае  $|\boldsymbol{\tau}_b| = 0$  и  $|\boldsymbol{\tau}| = \tau_{bc}$  имеет место равенство  $\tau_{bc} = \alpha \sin \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — угол естественного откоса грунта в воде. Таким образом, система уравнений для параметра Шильдса принимает вид

$$\psi_S = \frac{\boldsymbol{\tau}_b - \sin S \boldsymbol{\tau}_{bc} \mathbf{n} / \sin \varphi_0}{(\rho_1 - \rho_0)gd}, \quad \mathbf{n} \operatorname{tg} S = \operatorname{grad}(H), \tag{3}$$

где  $\psi_S$  — параметр Шильдса для наклонного дна. С учетом ограничений на касательные напряжения на дне расчетной области систему уравнений (1)–(3) можно записать в форме [3–5]

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(k \boldsymbol{\tau}_b) = \operatorname{div}(k(\tau_{bc} / \sin \varphi_0) \operatorname{grad}(H)), \tag{4}$$

$$k = \frac{A \bar{w} d}{((\rho_1 - \rho_0)gd)^\beta} \left| \boldsymbol{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad}(H) \right|^{\beta-1} h \left( \left| \boldsymbol{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad}(H) \right| - \tau_{bc} \right), \tag{5}$$

где  $h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  — функция Хэвисайда.

Уравнение (4) дополняется начальным условием  $H(x, y, 0) = H_0(x, y)$ . На границе расчетной области отсутствует поток, вызванный влиянием гравитационных сил:  $H'_0(x, y) = 0$ .

**2. Численные эксперименты по переформированию дна с использованием двумерной модели гидродинамики.** Для расчета тангенциальных напряжений в модели транспорта наносов необходима информация о поле вектора скорости на дне водоема. Для описания движения водной среды использована система уравнений мелкой воды [6–9]. Исходными уравнениями модели гидродинамики являются:

$$\begin{aligned} ((H + \xi)u)'_t + (H + \xi)uu'_x + (H + \xi)vu'_y &= \\ &= -g(H + \xi)\xi'_x + ((H + \xi)\mu u'_x)'_x + ((H + \xi)\mu u'_y)'_y + \frac{\tau_{x,p}}{\rho} - \frac{\tau_{x,b}}{\rho}, \\ ((H + \xi)v)'_t + (H + \xi)uv'_x + (H + \xi)vv'_y &= \\ &= -g(H + \xi)\xi'_y + ((H + \xi)\mu v'_x)'_x + ((H + \xi)\mu v'_y)'_y + \frac{\tau_{y,p}}{\rho} - \frac{\tau_{y,b}}{\rho}, \\ \xi'_t + ((H + \xi)u)'_x + ((H + \xi)v)'_y &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $\xi$  — функция подъема уровня,  $\mathbf{V} = \{u, v\}$  — вектор скорости движения водной среды,  $\mu$  — коэффициент турбулентного обмена,  $\tau_b, \tau_p$  — тангенциальное напряжение на поверхности и дне жидкости,  $H$  — глубина водоема.

Система уравнений (6) рассматривается при следующих граничных условиях:  $u'_n = 0, v'_n = 0, \xi'_n = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к границе расчетной области.

На основе построенных алгоритмов был разработан комплекс программ, предназначенный для моделирования распространения наносов в мелководных водоемах [2, 3]. Разработанный комплекс программ используется для расчета двумерного вектора скорости течения водной среды и учитывает турбулентный обмен, геометрию дна, ветровые течения и трение о дно.

На рис. 1 и 2 приведены результаты численных экспериментов моделирования динамики изменения рельефа дна. При этом размер расчетной сетки равен  $200 \times 200$ , шаг по пространственным переменным 0.1 м, шаг по времени 0.01 с, скорость движения ветра 5 м/с и направлена слева-направо. На рис. 1 представлен начальный рельеф дна (снизу) и положение свободной поверхности (сверху).

Моделирование процесса транспорта наносов показало, что примерно через 20 минут геометрия дна начинает принимать коническую структуру. Скорость течения жидкости максимальна в пиковой части области (на минимальных глубинах). Функция возвышения уровня принимает положительные значения в левой части расчетной области (с наветренной стороны) и отрицательные в правой. Через 40 минут — присутствует волнообразная структура функции возвышения уровня не только в левой части, но и в

области пиковых значений глубины. Через 60 минут — усиливаются колебания функции возвышения уровня в левой своей части и в области пиковых значений глубины. На дне расчетной области образуются гряды.

Через 80 минут область с пиковыми значениями глубины продолжает смещаться влево, происходит расширение области в стороны, перпендикулярные движению ветра (рис. 2).

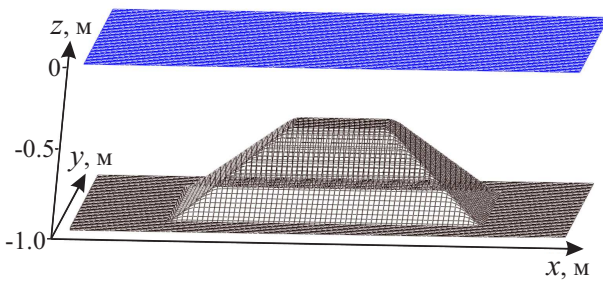


Рис. 1. Начальный рельеф дна и положение свободной поверхности

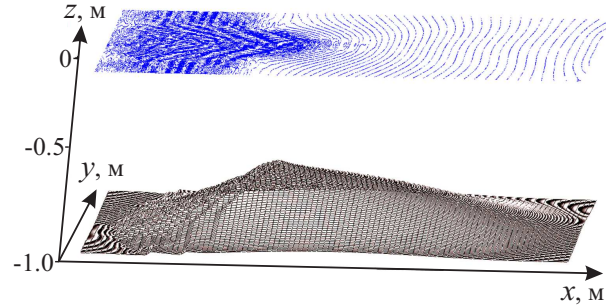


Рис. 2. Геометрия дна и функция возвышения уровня через 80 минут

Через 100 минут область с пиковыми значениями глубины продолжает смещаться влево, происходит расширение области в стороны, перпендикулярные движению ветра, функция возвышения уровня приобретает ярко выраженную колебательную структуру с наветренной стороны, а также происходит расширение области в стороны. Результаты эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, функции возвышения уровня, образования волновых структур и наносов. Рассмотренная математическая модель и разработанный комплекс программ позволяют предсказать динамику изменения рельефа дна, появление морских гряд и кос, их рост и трансформацию.

**3. Моделирование движения взвеси.** В модели транспорта взвешенных частиц использована декартова система координат в горизонтальной плоскости и  $\sigma$ -координатная система в вертикальном направлении [15–17]:  $\sigma = \frac{z - \eta}{h + \eta}$ ,  $x_\sigma = x$ ,  $y_\sigma = y$ ,  $t_\sigma = t$ . Здесь  $\sigma = a = 0$  на свободной поверхности,  $\sigma = b = -1$  на дне;  $H = h + \eta$  — общая глубина до свободной поверхности,  $h = h(x, y)$  — глубина водного объекта,  $\eta = \eta(t, x, y)$  — возвышение свободной поверхности относительно геоида (уровня моря). Для описания транспорта взвешенных частиц использовано уравнение диффузии-конвекции-реакции, которое может быть записано в следующем виде [18–20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{a - b}{H} (w - w_s) \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left( \frac{a - b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right] + F. \end{aligned}$$

Здесь  $C$  — концентрация осадка [г/л или кг/м<sup>2</sup>];  $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$  — составляющие поля вектора скорости [м/с];  $w_s$  — гидравлическая крупность или скорость осаждения взвеси в вертикальном направлении [м/с];  $H$  — глубина [м];  $D_h$ ,  $D_v$  — горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии [м<sup>2</sup>/с];  $x, y$  — координаты в горизонтальном направлении;  $\sigma$  — координата в вертикальном направлении;  $t$  — временная переменная [с];  $F$  — функция, описывающая интенсивность распределения источников загрязняющих веществ.

На свободной поверхности  $\Gamma_s$  поток в вертикальном направлении:  $\left( \frac{a - b}{H} \right) D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} w_s C_k = 0$ .

Вблизи поверхности дна  $\Gamma_b$ :  $\left( \frac{a - b}{H} \right) D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} = E - D + w_s C_k = 0$ , где  $E$  — поток эрозии [кг/м<sup>2</sup>с];  $D$  — интенсивность осаждения осадка [кг/м<sup>2</sup>с];  $C_k$  — массовая концентрация взвеси [кг/м<sup>2</sup>];  $n$  — единичный вектор нормали к открытой границе  $\Gamma_{open}$ ;

$$D = \begin{cases} 0, & \tau_b > \tau_{kr}, \\ w_s C_k \left( 1 - \frac{\tau_b}{\tau_{kr}} \right), & \tau_b \leq \tau_{kr}; \end{cases} \quad M = \begin{cases} 0, & \tau_e < \tau_{krE}, \\ M \left( \frac{\tau_e}{\tau_{krE}} - 1 \right), & \tau_e \geq \tau_{krE}; \end{cases}$$

$\tau$  — касательное напряжение сдвига у дна [Н/м<sup>2</sup>];  $\tau_{kr}$  — критическое касательное напряжение у дна, которое оценивается на основе лабораторных испытаний как величина со значениями 0.05–0.15 [Н/м<sup>2</sup>].

**4. Трехмерная модель гидродинамики.** Рассмотрим непрерывную модель гидродинамики жидкости водоема, которая включает в себя следующие исходные уравнения и граничные условия [8, 21–25]:

— уравнения Навье–Стокса (Рейнольдса):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= -\frac{P'_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D_v \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= -\frac{P'_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right], \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{a-b}{H} w \frac{\partial w}{\partial \sigma} &= -\frac{P'_\sigma}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D_v \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right]; \end{aligned}$$

— уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{a-b}{H} \frac{\partial(\rho w)}{\partial \sigma} = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) для несжимаемой жидкости имеет вид:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a-b}{H} \frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0$ . Полное гидродинамическое давление связано с глубиной:  $P(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) + \rho g(z - \eta)$ .

Уравнения рассматриваются с учетом следующих граничных условий:

— на входе (боковая граница, на которой задается источник):  $V'_n(x, y, \sigma, t) = 0$ ,  $p'_n(x, y, \sigma, t) = \frac{\rho \Pi}{\tau S}$ ;

— боковая граница без источника:  $V'_n(x, y, \sigma, t) = 0$ ,  $p'_n(x, y, \sigma, t) = 0$ ;

— на выходе (боковая граница):  $V'_n(x, y, \sigma, t) = 0$ ,  $p(x, y, \sigma, t) = 0$ ;

— на дне (нижняя граница):  $\rho D_h(u')_n(x, y, \sigma, t) = -\tau_x(t)$ ,  $\rho D_h(v')_n(x, y, \sigma, t) = -\tau_y(t)$ ;

$$w(x, y, \sigma, t) = 0, \quad p'_n(x, y, \sigma, t) = 0;$$

— верхняя граница (водная поверхность):  $\rho D_h(u')_n(x, y, \sigma, t) = -\tau_x(t)$ ,  $\rho D_h(v')_n(x, y, \sigma, t) = -\tau_y(t)$ ;

$$w(x, y, \sigma, t) = -\frac{p'_t}{\rho g}, \quad p'_n(x, y, \sigma, t) = 0.$$

Выше использованы следующие обозначения:  $\Pi$  — поток вектора скорости через поверхность;  $S$  — площадь поверхности;  $\tau_x(x, y, \sigma)$ ,  $\tau_y(x, y, \sigma)$  — составляющие тангенциального напряжения (закон Ван-Дорна);  $V = \{u, v, w\}$  — вектор скорости движения водной среды;  $g$  — ускорение свободного падения;  $P$  — давление;  $D_h$  — коэффициент турбулентного обмена по горизонтальным направлениям;  $D_v$  — коэффициент турбулентного обмена по вертикальному направлению;  $\rho$  — плотность жидкости.

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности [9]:  $\tau_x = \rho_a C_p(|\mathbf{w}|) w_x |\mathbf{w}|$ ,  $\tau_y = \rho_a C_p(|\mathbf{w}|) w_y |\mathbf{w}|$ , где  $\mathbf{w}$  — вектор скорости ветра относительно воды;  $\rho_a$  — плотность атмосферы,

$$\text{безразмерный коэффициент } C_p(|\mathbf{w}|) = \begin{cases} 0.0088, & |\mathbf{w}| < 6.6, \\ 0.0026, & |\mathbf{w}| \geq 6.6. \end{cases}$$

Составляющие тангенциального напряжения для дна с учетом введенных обозначений могут быть записаны следующим образом:  $\tau_x = \rho C_p(|\mathbf{V}|) u |\mathbf{V}|$ ,  $\tau_y = \rho C_p(|\mathbf{V}|) v |\mathbf{V}|$ .

Рассмотренная ниже аппроксимация позволяет на основании измеренных пульсаций вектора скорости рассчитывать коэффициент вертикального турбулентного перемешивания, неоднородный по глубине:  $\nu =$

$$X_x^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right)^2}, \text{ где } \bar{U}, \bar{V} \text{ — пульсации горизонтальных компонент скорости, осредненные}$$

по времени;  $\Delta$  — характерный шаг сетки;  $C_x$  — безразмерная эмпирическая константа, значение которой может быть определено на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности.

**5. Метод решения сеточных уравнений.** Сеточные уравнения, полученные в результате конечно-разностных аппроксимаций, можно записать в матричном виде [4]

$$Ax = f, \tag{8}$$

где  $A$  — линейный положительно определенный оператор ( $A > 0$ ). Для нахождения решения задачи (8) будем использовать неявный итерационный процесс [10]

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f, \tag{9}$$

где  $m$  — номер итерации;  $\tau > 0$  — итерационный параметр;  $B$  — некоторый обратимый оператор, который называется предобусловливателем, или стабилизатором. Обращение оператора  $B$  в (9) должно быть проще, чем непосредственное обращение исходного оператора  $A$  в (8). При построении оператора  $B$  исходили из аддитивного представления оператора  $A_0$  — симметричной части оператора  $A$ :

$$A_0 = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2^*, \tag{10}$$

где  $A = A_0 + A_1$ ,  $A_0 = A_0^*$ ,  $A_1 = -A_1^*$ .

Оператор-предобусловливатель запишется в следующем виде:

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \quad D = D^* > 0, \quad \omega > 0, \tag{11}$$

где  $D$  — некоторый оператор.

Соотношения (10) и (11) задают модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) решения задачи, если определены операторы  $R_1$ ,  $R_2$  и указаны способы определения параметров  $\tau_{m+1}$  и оператора  $D$ . Алгоритм адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода минимальных поправок для расчета сеточных уравнений с несамосопряженным оператором имеет вид [11–14]

$$r^m = Ax^m - f, \quad B(\omega_m)w^m, \quad \bar{\omega}_m = \sqrt{\frac{(Dw^m, w^m)}{(D^{-1}R_2w^m, R_2w^m)}},$$

$$s_m^2 = 1 - \frac{(A_0w^m, w^m)^2}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)(Bw^m, w^m)}, \quad k_m = \frac{(B^{-1}A_1w^m, A_1w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)}, \quad \theta_m = \frac{1 - \sqrt{\frac{s_m^2 k_m}{1 + k_m}}}{1 + k_m(1 - s_m^2)}, \tag{12}$$

$$\tau_{m+1} = \theta_m \frac{(A_0w^m, w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}w^m, \quad \omega_{m+1} = \bar{\omega}_m,$$

где  $r^m$  — вектор невязки,  $w^m$  — вектор поправки, в качестве оператора  $D$  используется диагональная часть оператора  $A$ .

Оценка скорости сходимости разработанного метода имеет вид

$$\rho \leq \frac{v^* - 1}{v^* + 1}, \quad v^* = v \left( \sqrt{1 + k} + \sqrt{k} \right)^2, \quad k = \frac{(B^{-1}A_1w^m, A_1w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)},$$

где  $v$  — число обусловленности оператора  $C_0 = B^{-1/2}A_0B^{-1/2}$ .

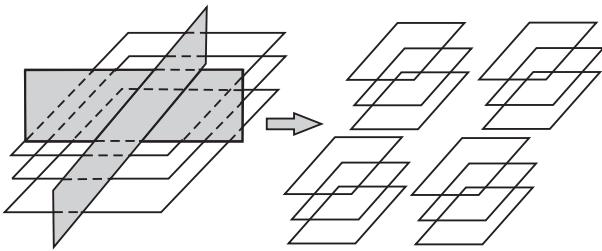


Рис. 3. Декомпозиция области

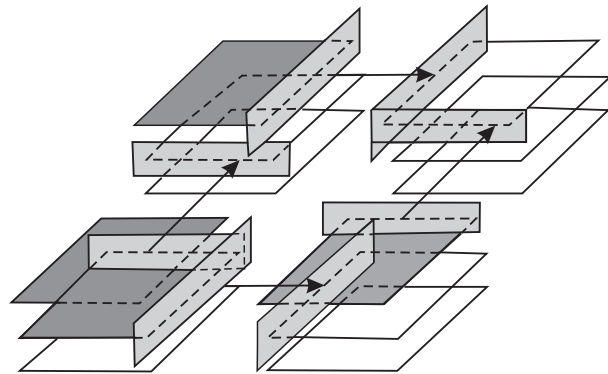


Рис. 4. Схема для расчета вектора  $y^m$

**6. Параллельный вариант метода решения сеточных уравнений.** Идея параллельного алгоритма метода решения сеточных уравнений заключается в следующем [11]. После разбиения исходной расчетной области на части по двум координатным направлениям каждый процессор получает свою расчетную область, как показано на рис. 3, при этом смежные области перекрываются двумя слоями узлов по направлению, перпендикулярному плоскости разбиения.

После того как каждый процессор получит информацию для своей части области, рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма. Затем каждый процессор определяет максимальный по модулю

элемент вектора невязки и передает его значение всем оставшимся вычислителям. Теперь для вычисления равномерной нормы вектора невязки достаточно на каждом процессоре найти максимальный элемент.

Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки:

$$(D + \omega_m R_1)D^{-1}(D + \omega_m R_2)w^m = Dy^m.$$

Здесь  $R_1$  — нижнетреугольная матрица, а  $R_2$  — верхнетреугольная матрица. Для вычисления вектора поправки нужно последовательно решить два уравнения

$$(D + \omega_m R_1)y^m = r^m, \quad (D + \omega_m R_2)w^m = Dy^m.$$

Вначале вычисляется вектор  $y^m$ , при этом расчет начинается в левом нижнем углу матрицы. Затем из правого верхнего угла начинается вычисление вектора поправки  $w^m$ . Схема расчета вектора  $y^m$  изображена на рис. 4 (показана передача элементов после расчета двух слоев первым процессором).

На первом шаге вычислений первый процессор обрабатывает верхний слой. Затем осуществляется передача перекрывающихся элементов смежным процессорам. На следующем шаге первый процессор обрабатывает второй слой, а его соседи — первый. Передача элементов после расчета двух слоев первым процессором показана на рис. 4. В схеме для расчета вектора  $y^m$  только первый процессор не требует дополнительной информации и может независимо от других процессоров вести обработку своей части области, остальные процессоры ждут результатов от предыдущего процессора, пока он не передаст вычисленные значения сеточных функций для узлов сетки, располагающихся в предшествующих позициях данной строки. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут рассчитаны все слои. Аналогичным образом можно решить систему линейных алгебраических уравнений с верхнетреугольной матрицей для расчета вектора поправки. Далее вычисляются скалярные произведения (12) и выполняется переход на следующий итерационный слой.

Алгоритм адаптивного попеременно-треугольного метода реализован на много-процессорной вычислительной системе (МВС) РОЦ НИТ ЮФУ. Пиковая производительность МВС составляет 18.8 TFlops. МВС включает в себя 8 компьютерных стоек. Вычислительное поле МВС построено на базе инфраструктуры HP BladeSystem c-class с интегрированными коммуникационными модулями, системами электропитания и охлаждения. В качестве вычислительных узлов используется 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2.3 GHz и оперативной памятью в объеме 32 ГБ.

Зависимость ускорения и эффективности от количества процессоров

Количество процессоров	Время, с	Ускорение	Эффективность
1	7.490639	1	1
2	4.151767	1.804	0.902
4	2.549591	2.938	0.734
8	1.450203	5.165	0.646
16	0.882420	8.489	0.531
32	0.458085	16.351	0.511
64	0.265781	28.192	0.44
128	0.171535	43.668	0.341

Общее количество вычислительных ядер в комплексе — 2048, суммарный объем оперативной памяти — 4 ТБ.

Результаты расчета ускорения и эффективности в зависимости от количества процессоров для параллельного варианта адаптивного попеременно-треугольного метода приведены в таблице.

**7. Численные эксперименты по осаждению взвеси и переформированию дна с использованием трехмерной модели гидродинамики.** В качестве примера практического использования разработанного проблемно-ориентированного комплекса программ решается задача переформирования донной поверхности в результате осаждения взвеси на дне, а затем переноса осажденного материала по дну. В качестве исследуемого объекта рассматривался выделенный участок водного объекта в виде параллелепипеда длиной 5.0 км, шириной 5.0 км и глубиной 3.0 м. Средняя скорость течения составляла 1 м/с, размеры расчетной сетки 100 × 100 × 20.

На рис. 5 и 6 представлены результаты численного моделирования распределения концентрации взвешенного вещества. На рис. 5 — расчетный интервал 50 часов, на рис. 6 — расчетный интервал 150 часов.

На рис. 7 и 8 представлены значения глубины и переформирования донной поверхности в расчетном интервале 50 часов и 150 часов соответственно.

Результаты эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, образования структур и наносов, переноса взвесей в акватории. Предложенная математическая модель и разработанный проблемно-ориентированный комплекс программ позволяют предсказать появление морских гряд и кос, их рост и трансформацию, прогнозировать изменение поля концентрации в случае выброса от источника, прогнозировать заиление подходов судоходных каналов и заносимость гидротехнических конструкций и сооружений.

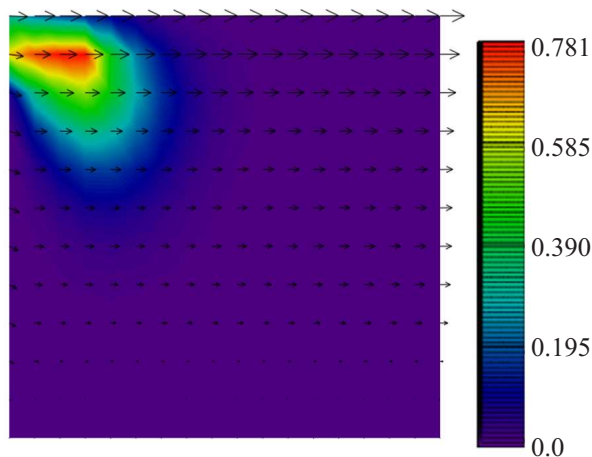


Рис. 5. Поле концентрации взвешенных частиц

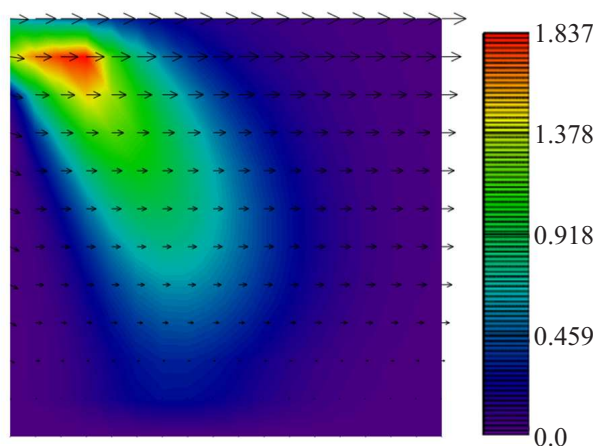


Рис. 6. Поле концентрации взвешенных частиц

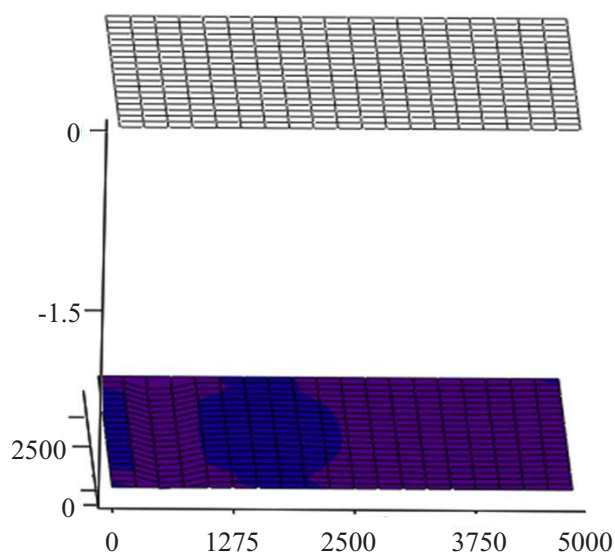


Рис. 7. Значение глубины в расчетном интервале 50 часов

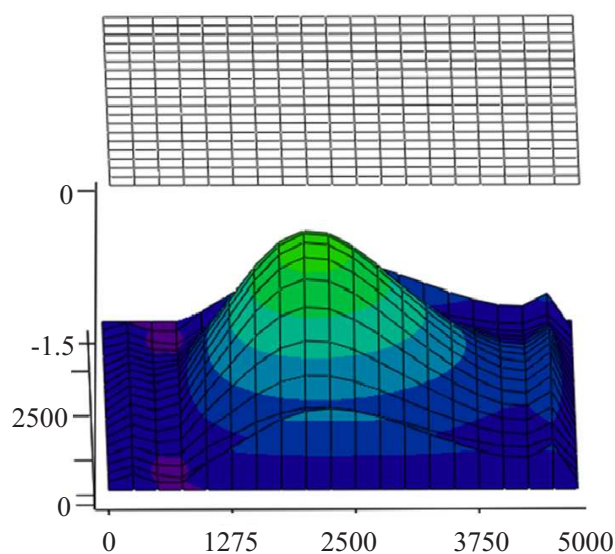


Рис. 8. Значение глубины в расчетном интервале 150 часов

**8. Пример практического использования комплекса программ для расчета переформирования донной поверхности при дноуглубительных работах.** На основе разработанного комплекса для МВС был выполнен расчет ущерба рыбному хозяйству за период ремонтного черпания подходного судоходного канала к причалам Архангельского терминала. Дноуглубительные работы на подходном канале выполняются самоотвозным землесосом типа ЗС-ТР 1300/2-2162, на акватории причалов терминала — грейферным земснарядом (плавкран). Производительность оборудования по грунту составляет: грейферный земснаряд —  $122.4 \text{ м}^3/\text{ч}$ ; самоотвозный землесос —  $778 \text{ м}^3/\text{ч}$ .

Самоотвозный землесос типа ЗС-ТР1300/2-2162: объем трюма при разработке песков —  $1000 \text{ м}^3$ ; норма загрузки грунтового трюма —  $741 \text{ м}^3$ ; продолжительность сброса грунта на подводном отвале —  $0.1 \text{ ч}$ . Грейферный земснаряд: отвозка грунта на подводный отвал осуществляется двумя грунтоотвозными шаландами типа ШС-ТР500/2-442 с емкостью грунтового трюма  $500 \text{ м}^3$ ; норма загрузки грунтового трюма



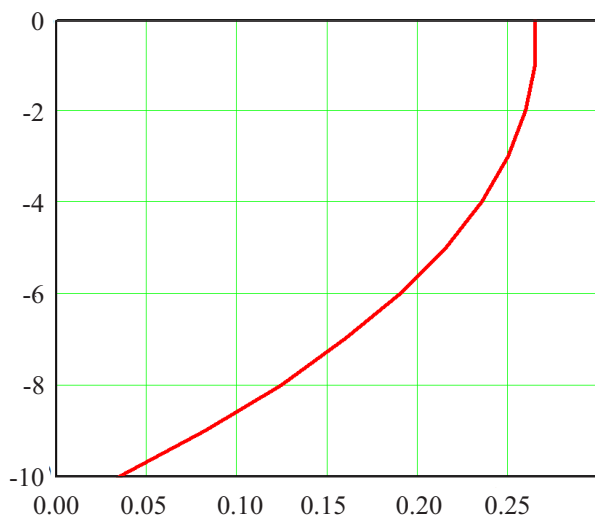


Рис. 9. Профиль вектора скорости движения водной среды

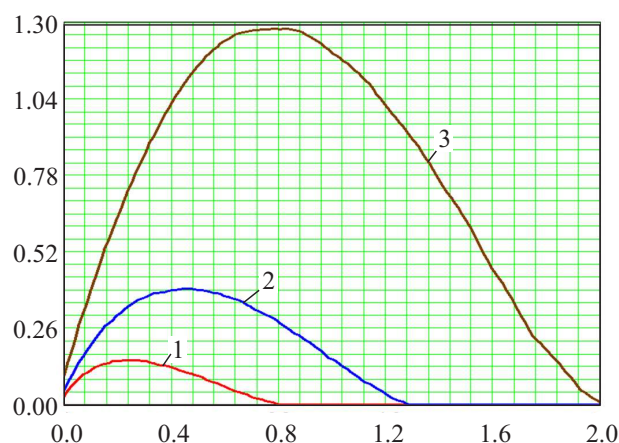


Рис. 10. Зависимости от времени объемов воды (млн. м<sup>3</sup>) с содержанием взвешенных частиц: 1) более 100 мг/л, 2) более 20 мг/л, 3) 0.75 мг/л

разработанным грунтом составляет 455 м<sup>3</sup>.

Проводилось моделирование распространения взвешенных частиц при выгрузке трюма самоотвозного землесоса в отвал.

Исходными данными являются: глубина водоема 10 м; объем загрузки 741 м<sup>3</sup>; скорость течения 0.2 м/с; скорость осаждения 2.042 мм/с; плотность грунта 1600 кг/м<sup>3</sup>; процентное содержание пылеватых частиц (диаметр меньше 0.05 мм) в песчаных грунтах — 26.83%.

Параметры расчетной области: длина 3 км; ширина 1.4 км; шаг по горизонтальной пространственной координате 20 м; шаг по вертикальной пространственной координате 1 м; расчетный интервал 2 часа.

На рис. 9 приведен результат расчета профиля горизонтальной составляющей вектора скорости движения водной среды. На рис. 10 приведены зависимости от времени (час) объемов воды (млн. м<sup>3</sup>) с содержанием взвешенных частиц (1 — более 100 мг/л, 2 — более 20 мг/л, 3 — более 0.75 мг/л). На рис. 11 приведена функция рельефа дна после осаждения взвешенных частиц, образованных при выгрузке трюма самоотвозного землесоса. Палитрой показана глубина участка. Результаты эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, образования структур и наносов, переноса взвесей в акватории, а также уровень загрязнения вод.

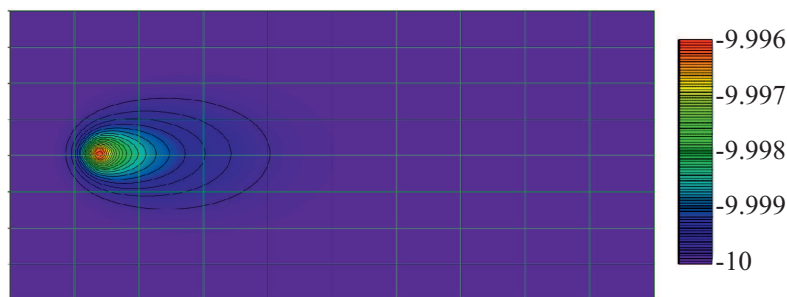


Рис. 11. Функция рельефа дна после осаждения взвешенных частиц, образованных при выгрузке трюма самоотвозного землесоса

**9. Заключение.** Предложена двумерная математическая модель транспорта наносов в мелководных водоемах, удовлетворяющая основным законам сохранения. Модель учитывает две пространственные переменные и следующие физические параметры и процессы: пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна и функцию возвышения уровня, ветровые течения и трение о дно. Описаны программные комплексы и результаты их применения, использующие модели транспорта наносов в прибрежных водных системах. Для расчета скорости движения водной среды использованы двумерная и трехмерная модели гидродинамики.

Рассмотренные модели и разработанный проблемно-ориентированный комплекс программ для МВС применимы для количественного прогноза процессов переформирования рельефа дна, береговой линии, переноса загрязнений и экологических изменений в прибрежных акваториях и могут быть полезны при строительстве и эксплуатации гидротехнических сооружений, создании проектов защиты берегов, обеспечении экологической безопасности и рекреационного режима пляжей.



Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00530-а), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (проект № 14.А18.21.0680) и в рамках реализации Программы развития ЮФУ (темы: № 213.01-24/2013-77, № 213.01-24/2013-138).

Статья рекомендована к публикации Программным комитетом Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии 2014” (ПаВТ-2014; <http://agora.guru.ru/pavt2014>).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев И.О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. М.: Геос, 2001.
2. *Проценко Е.А.* Модель и алгоритмы решения задачи о транспорте наносов // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2009. № 8. 71–75.
3. *Проценко Е.А.* Двумерная конечно-разностная модель формирования наносов в прибрежной зоне водоема и ее программная реализация // Инженерный вестник Дона. 2010. № 3. 23–31.
4. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8. 32–44.
5. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8. 159–167.
6. *Роч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
7. *Васильев В.С., Сухинов А.И.* Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 10. 17–34.
8. *Сухинов А.И.* Прецизионные модели гидродинамики и опыт применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море // Известия ТРТУ. 2006. № 3. 228–235.
9. *Якушев Е.В., Сухинов А.И., Лукашев Ю.Ф. и др.* Комплексные океанологические исследования Азовского моря в 28-м рейсе научно-исследовательского судна “Акванавт” (июль-август 2001 г.) // Океанология. 2003. **43**, № 1. 44–53.
10. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1989.
11. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
12. *Сухинов А.И.* Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения. М.: МАКС Пресс, 2005.
13. *Коновалов А.Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. 2002. **43**, № 3. 552–572.
14. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6. 237–249.
15. *Ezer T., Mellor G.L.* Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton Ocean Model // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 2000. **32**. 185–208.
16. *Дегтярева Е.Е., Проценко Е.А., Чистяков А.Е.* Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях // Инженерный вестник Дона. 2012. № 4. 30.
17. *Дегтярева Е.Е., Чистяков А.Е.* Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 2. 112–118.
18. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С.* Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 103–112.
19. *Сухинов А.И., Никитина А.В.* Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8. 62–73.
20. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А.* Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2013. № 4. 87–98.
21. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. **23**, № 3. 3–21.
22. *Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8. 22–32.
23. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишнев А.В.* Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 8. 32–44.
24. *Чистяков А.Е.* Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6. 66–77.
25. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8. 6–13.

Поступила в редакцию  
04.04.2014

## Sediment Transport Mathematical Modeling in a Coastal Zone Using Multiprocessor Computing Systems

A. I. Sukhinov<sup>1</sup>, A. E. Chistyakov<sup>2</sup>, and E. A. Protsenko<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Southern Federal University, Institute of Computer Technologies and Information Security; pereulok Nekrasovskii 44, Taganrog, 347922, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: sukhinov@gmail.com

<sup>2</sup> Southern Federal University, Institute of Computer Technologies and Information Security; pereulok Nekrasovskii 44, Taganrog, 347922, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: cheese\_05@mail.ru

<sup>3</sup> Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute, Faculty of Physics, Mathematics and Informatics; ulitsa Initsiativnaya 48, Taganrog, 347900, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: eapros@rambler.ru

Received April 4, 2014

**Abstract:** A nonstationary two-dimensional model of sediment transport in a coastal zone of reservoirs is considered. The following physical parameters and processes are taken into account: the soil porosity; the critical value of the tangent tension for which the sediment movement begins; the turbulent exchange; the dynamically variable geometry of the bottom and the level elevation function; wind currents; and the friction on the bottom. Two-dimensional and three-dimensional models of hydrodynamics in a coastal zone of reservoirs as well as a transport model for weighted particles are constructed and are implemented on a distributed computing cluster. A number of numerical results are discussed.

**Keywords:** mathematical model, sediment transport, distributed computing, parallel programming, dynamics of marine sediments, shallow water equations, diffusion-convection-reaction equation, Navier-Stokes equations.

### References

1. I. O. Leont'ev, *Coastal Dynamics: Waves, Currents, Sediment Fluxes* (Geos, Moscow, 2001) [in Russian].
2. E. A. Protsenko, "Model and Algorithms of the Sediment Transport Problem Decision," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 8, 71–75 (2009).
3. E. A. Protsenko, "A Two-Dimensional Finite-Difference Model for the Formation of Sediments in a Coastal Zone and Its Software Implementation," *Inzh. Vestn. Dona*, No. 3, 23–31 (2010).
4. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and E. A. Protsenko, "Two-Dimensional Mathematical Model of Sediment Transportation," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 8, 32–44 (2011).
5. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and E. A. Protsenko, "The Two-Dimensional Hydrodynamic Model for Geometry Dynamic Evolution of the Bottom in Shallow Basins," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 8, 159–167 (2011).
6. P. J. Roache, *Computational Fluid Dynamics* (Hermosa Publs., Albuquerque, 1976; Mir, Moscow, 1980).
7. V. S. Vasil'ev and A. I. Sukhinov, "Precise Two-Dimensional Models for Shallow Water Basins," *Mat. Model.* **15** (10), 17–34 (2003).
8. A. I. Sukhinov, "Precise Hydrodynamic Models and Their Applications to the Prediction and Reconstruction of Emergency Situations in the Sea of Azov," *Izv. Taganrog Radiotekh. Univ.*, No. 3, 228–235 (2006).
9. E. V. Yakushev, A. I. Sukhinov, Yu. F. Lukshev, et al., "Comprehensive Oceanological Studies of the Sea of Azov during Cruise 28 of R/V Akvanavt (July-August 2001)," *Okeanologiya* **43** (1), 44–53 (2003) [*Oceanology* **43** (1), 39–47 (2003)].
10. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Numerical Methods for Grid Equations* (Nauka, Moscow, 1989; Birkhäuser, Basel, 1989).
11. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1989; New York, Marcel Dekker, 2001).
12. A. I. Sukhinov, *Two-Dimensional Splitting Scheme and Their Applications* (MAKS Press, Moscow, 2005) [in Russian].
13. A. N. Konovalov, "To the Theory of the Alternating Triangle Iteration Method," *Sib. Mat. Zh.* **43** (3), 552–572 (2002) [*Sib. Math. J.* **43** (3), 439–457 (2002)].
14. A. E. Chistyakov, "Speedup and Efficiency Estimation of Parallel SSOR Algorithm," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 6, 237–249 (2010).

15. T. Ezer and G. L. Mellor, "Sensitivity Studies with the North Atlantic Sigma Coordinate Princeton Ocean Model," *Dyn. Atmos. Oceans* **32**, 185–208 (2000).
16. E. E. Degtyareva, E. A. Protsenko, and A. E. Chistyakov, "Program Realization of a Three-Dimensional Mathematical Model Sediment Transport in the Shallow Waters," *Inzh. Vestn. Dona*, No. 4, 1–30 (2012).
17. E. E. Degtyareva and A. E. Chistyakov, "Modeling Sediment Transport Based on Experimental Studies in Azov Sea," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 2, 112–118 (2012).
18. A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, and I. S. Semenov, "Mathematical Modeling of the Formation of Suffocation Conditions in Shallow Basins Using Multiprocessor Computing Systems," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 103–112 (2013).
19. A. I. Sukhinov and A. V. Nikitina, "Mathematical Modelling and Expeditional Investigations of Water Quality in Azov Sea," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 8, 62–73 (2011).
20. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and N. A. Fomenko, "Method of Construction Difference Scheme for Problems of Diffusion–Convection–Reaction, Taking into Account the Degree Filling of the Control Volume," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 4, 87–98 (2013).
21. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and E. V. Alekseenko, "Numerical Realization of the Three-Dimensional Model of Hydrodynamics for Shallow Water Basins on a High-Performance System," *Mat. Model.* **23** (3), 3–21 (2011) [*Math. Models and Comput. Simul.* **3** (5), 562–574 (2011)].
22. A. I. Sukhinov, E. F. Timofeeva, and A. E. Chistyakov, "Development and Investigation of the Discrete Mathematical Model for Coastal Wave Process Modelling," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 8, 22–32 (2011).
23. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. F. Timofeeva, and A. V. Shishenya, "A Mathematical Model for Coastal Wave Processes," *Mat. Model.* **24** (8), 32–44 (2012).
24. A. E. Chistyakov, "About Approximation of Boundary Conditions of Three-Dimensional Model of Aquatic Environment Moving," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 6, 66–77 (2010).
25. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, and Yu. S. Bondarenko, "Error Estimation for the Diffusion Equation Solution Based on the Schemes with Weights," *Izv. Yuzhn. Federal. Univ., Tekh. Nauki*, No. 8, 6–13 (2011).