

УДК 517.988.68

ГРАДИЕНТНО-ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КВАЗИРЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Козлов¹

Строится и исследуется итерационный метод для нахождения квазирешения нелинейного некорректного операторного уравнения на выпуклом замкнутом множестве в гильбертовом пространстве в условиях погрешностей. Рассматриваемый процесс является комбинацией метода проекции градиента и процедуры проектирования получаемых итераций на специально выбираемые конечномерные подпространства. Устанавливается стабилизация вырабатываемых приближений в малой окрестности искомого квазирешения.

Ключевые слова: нелинейный оператор, дифференцируемый оператор, градиентный метод, проектирование, сходимость, устойчивость.

1. Объектом изучения в работе является уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in H_1, \tag{1}$$

где $F: H_1 \rightarrow H_2$ — нелинейный оператор, H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Ставится задача отыскания квазирешения уравнения (1) на выпуклом замкнутом множестве $Q \subset H_1$, т. е. точки $x^* \in Q$, являющейся решением задачи

$$\min_{x \in Q} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2. \tag{2}$$

Здесь и далее через $\|\cdot\|$ обозначается норма соответствующего пространства.

Как известно [1, с. 28], точка $x^* \in Q$, удовлетворяющая необходимому условию минимума первого порядка в задаче (2), характеризуется соотношением

$$(\varphi'(x^*), x - x^*) = (F'^*(x^*)F(x^*), x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in Q. \tag{3}$$

Предполагается, что оператор $F(x)$ дважды дифференцируем по Гато и для всех точек $x, y \in \Omega_R(x^*)$ выполняются условия

$$\|F'(x)\| \leq N_1, \quad \|F''(x)\| \leq N_2, \quad \|F''(x) - F''(y)\| \leq L \|x - y\|, \tag{4}$$

где $\Omega_R(x^*) = \{x \in H_1: \|x - x^*\| \leq R\}$. На оператор $F(x)$ не налагается каких-либо условий регулярности, предусматривающих непрерывную обратимость его производной $F'(x)$, либо условий регулярности оператора $F'^*(x)F'(x)$ в окрестности квазирешения уравнения (1). В этих условиях задачи (1), (2) являются в общем случае некорректными [1–3], так что сколь угодно малая вариация оператора $F(x)$ может привести к существенным изменениям решений этих задач либо вовсе превратить их в задачи, не имеющие решений. Потребности численного исследования этих задач диктуют необходимость разработки устойчивых методов отыскания решений задачи (1), (2) при наличии погрешностей в задании оператора $F(x)$.

Считаем, что вместо точного оператора $F(x)$ доступно лишь его приближение $\tilde{F}: H_1 \rightarrow H_2$, обладающее в точках $\Omega_R(x^*)$ производной Гато. Предполагается также, что для всех $x \in \Omega_R(x^*)$ выполняется оценка

$$\|\tilde{F}'^*(x)\tilde{F}(x) - F'^*(x)F(x)\| \leq \delta, \tag{5}$$

где δ — известный уровень погрешности в задании $F(x)$.

В [4–7] в предположении разрешимости исходного уравнения были построены и исследованы итерационные методы решения (1), основанные на линеаризации уравнения в текущей итерационной точке и приближенной аппроксимации квазирешения линеаризованной задачи с использованием процедур регуляризации линейных некорректных уравнений. Другой подход к построению итерационных методов

¹ Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kozlovv@marsu.ru

нахождения решения уравнения (1) развивается в работах [8–12], где предложена и исследована группа итерационных процессов градиентного типа с проектированием на специально выбираемые конечномерные подпространства. В данной работе рассматривается более общая задача нахождения квазирешения уравнения (1) на выпуклом замкнутом множестве $Q \subset H_1$, не совпадающем в общем случае с H_1 . В случае $Q = H_1$ предлагаемый ниже итерационный метод близок к методам, изучавшимся в [9–12].

Зафиксируем управляющий параметр $\xi \in H_1$, конечномерное подпространство $M \subset H_1$ и обозначим через P_Q оператор проектирования из H_1 на множество Q , т. е. для любого $x \in H_1$

$$P_Q(x) \in Q, \quad \|x - P_Q(x)\| = \inf_{z \in Q} \|x - z\|.$$

Положим также

$$M_\xi = \{x \in H_1 : x = \xi + v, v \in M\}.$$

В настоящей работе для отыскания квазирешения $x^* \in Q$ предлагается и исследуется следующий итерационный процесс:

$$x_0 \in H_1, \quad x_{n+1} = P_Q(P_M x_n + \xi - P_M \xi - \gamma P_M \tilde{F}'^*(P_M x_n + \xi - P_M \xi) \tilde{F}(P_M x_n + \xi - P_M \xi)), \quad \gamma > 0. \quad (6)$$

Поскольку $P_M x_n + \xi - P_M \xi = P_{M_\xi}(x_n)$, процесс (6) может быть представлен в виде

$$x_0 \in H_1, \quad y_n = P_{M_\xi}(x_n), \quad x_{n+1} = P_Q(y_n - \gamma P_M \tilde{F}'^*(y_n) \tilde{F}(y_n)).$$

Таким образом, он является комбинацией метода проекции градиента [1, с. 72] для задачи

$$\min_{y \in Q} \tilde{\psi}(y), \quad \tilde{\psi}(y) = \frac{1}{2} \|\tilde{F}(P_M y + \xi - P_M \xi)\|^2$$

и проектирования получаемых итераций на аффинное подпространство M_ξ .

Введем обозначения

$$\Delta = \|(E - P_M)(x^* - \xi)\|, \quad \Delta_1 = \|(E - P_M)F'^*(x^*)F(x^*)\|,$$

где E — единичный оператор. Величины Δ , Δ_1 имеют смысл погрешности аппроксимации квазирешения x^* аффинным подпространством M_ξ и погрешности аппроксимации элемента $F'^*(x^*)F(x^*) \in H_1$ подпространством $M \subset H_1$ соответственно. Через

$$N(F'(x^*)) = \{h \in H_1 : F'(x^*)h = 0\}$$

обозначим нулевое подпространство оператора $F'(x^*)$.

Всюду ниже будем считать выполненным следующее основное

Условие А. Подпространство M выбрано так, что

$$N(F'(x^*)) \cap M = \{0\}.$$

В работе устанавливается, что если начальное приближение x_0 достаточно близко к x^* , то с некоторой постоянной $C > 0$ имеет место предельное соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|^2 \leq C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma).$$

Согласно этому неравенству, итерационные точки x_n при $n \rightarrow \infty$ стабилизируются в окрестности квазирешения x^* с радиусом, пропорциональным δ , Δ , Δ_1 , γ . Из определений Δ и Δ_1 следует, что малость этих величин может быть обеспечена за счет удачного выбора пары (M, ξ) ; шаговый множитель $\gamma > 0$, находящийся в нашем распоряжении, также может быть выбран достаточно малым.

2. Обратимся к исследованию сходимости итерационного процесса (6). Предположим, что для текущей итерационной точки x_n выполняется $P_{M_\xi}(x_n) \in \Omega_R(x^*)$. С использованием соотношения

$$\|P_Q(x) - P_Q(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H_1$$

и включения $x^* \in Q$ из (6) получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \left\| P_Q \left(P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M \tilde{F}'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \tilde{F}(P_{M_\xi}(x_n)) \right) - P_Q(x^*) \right\|^2 \leq \\
 &\leq \left\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M \tilde{F}'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \tilde{F}(P_{M_\xi}(x_n)) - x^* \right\|^2 = \\
 &= \left\| \left[P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) - x^* \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma P_M \left[\tilde{F}'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \tilde{F}(P_{M_\xi}(x_n)) - F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) \right] \right\|^2 \leq \\
 &\leq \left\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) - x^* \right\|^2 + \\
 &\quad + \gamma^2 \left\| \tilde{F}'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \tilde{F}(P_{M_\xi}(x_n)) - F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) \right\|^2 + \\
 &\quad + 2\gamma \left\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) - x^* \right\| \times \\
 &\quad \times \left\| \tilde{F}'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \tilde{F}(P_{M_\xi}(x_n)) - F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) \right\|.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Второе слагаемое в правой части последнего неравенства в (7) в силу (5) оценивается следующим образом:

$$\gamma^2 \left\| \tilde{F}'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \tilde{F}(P_{M_\xi}(x_n)) - F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) \right\|^2 \leq \gamma^2 \delta^2. \tag{8}$$

Последнее слагаемое в (7) оценим, используя (4), (5):

$$\begin{aligned}
 &2\gamma \left\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) - x^* \right\| \times \\
 &\quad \times \left\| \tilde{F}'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \tilde{F}(P_{M_\xi}(x_n)) - F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) \right\| \leq \\
 &\leq 2\gamma \delta \left(\|P_M x_n - P_M x^*\| + \|P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi\| + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \left\| F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \right\| \left\| F(P_{M_\xi}(x_n)) - F(P_{M_\xi}(x^*)) \right\| + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \left\| F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \right\| \left\| F(P_{M_\xi}(x^*)) - F(x^*) \right\| + \gamma \left\| F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \right\| \left\| F(x^*) \right\| \right) \leq \\
 &\leq 2\gamma \delta \left(\|P_M x_n - P_M x^*\| + \Delta + \gamma N_1^2 \|P_M x_n - P_M x^*\| + \gamma N_1^2 \Delta + \gamma N_1 \|F(x^*)\| \right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом (4), для нормы первого слагаемого в правой части заключительного неравенства в (7) имеем оценку

$$\begin{aligned}
 &\left\| P_{M_\xi}(x_n) - \gamma P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) - x^* \right\|^2 = \\
 &= \left\| (P_M x_n - P_M x^*) + (P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi) - \gamma P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) \right\|^2 = \\
 &= \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + \|P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi\|^2 + \gamma^2 \left\| F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)) \right\|^2 - \\
 &\quad - 2\gamma \left(P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)), P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi \right) - \\
 &\quad - 2\gamma \left(P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)), P_M x_n - P_M x^* \right) \leq \\
 &\leq \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + \Delta^2 + \gamma^2 N_1^2 \left(2N_1^2 \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + 4N_1^2 \Delta^2 + 4\|F(x^*)\|^2 \right) + \\
 &\quad + 2\gamma N_1 \Delta \left(N_1 \|P_M x_n - P_M x^*\| + N_1 \Delta + \|F(x^*)\| \right) + \\
 &\quad + 2\gamma \left(P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)), P_M x^* - P_M x_n \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Представим последнее слагаемое в (10) в виде

$$\begin{aligned}
& 2\gamma \left(P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)), P_M x^* - P_M x_n \right) = \\
& = -2\gamma \left(P_M F'^*(x^*) F'(x^*) (P_M x_n - P_M x^*), P_M x_n - P_M x^* \right) + \\
& + 2\gamma \left(P_M (F''(x^*) (P_M x_n - P_M x^*))^* F(x^*), P_M x^* - P_M x_n \right) + \\
& + 2\gamma \left(P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \left(F(P_{M_\xi}(x_n)) - F(P_{M_\xi}(x^*)) - \right. \right. \\
& \left. \left. - F'(P_{M_\xi}(x^*)) (P_M x_n - P_M x^*) \right), P_M x^* - P_M x_n \right) + 2\gamma \left(P_M \left(F'(P_{M_\xi}(x_n)) - F'(P_{M_\xi}(x^*)) - \right. \right. \\
& \left. \left. - F''(P_{M_\xi}(x^*)) (P_M x_n - P_M x^*) \right)^* F(x^*), P_M x^* - P_M x_n \right) + \\
& + 2\gamma \left(P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \left(F(P_{M_\xi}(x^*)) - F(x^*) \right), P_M x^* - P_M x_n \right) + \\
& + 2\gamma \left(P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) \left(F'(P_{M_\xi}(x^*)) - F'(x^*) \right) (P_M x_n - P_M x^*), P_M x^* - P_M x_n \right) + \\
& + 2\gamma \left(P_M \left(F'(P_{M_\xi}(x_n)) - F'(P_{M_\xi}(x^*)) \right)^* F'(x^*) (P_M x_n - P_M x^*), P_M x^* - P_M x_n \right) + \\
& + 2\gamma \left(P_M \left(F'(P_{M_\xi}(x^*)) - F'(x^*) \right)^* F'(x^*) (P_M x_n - P_M x^*), P_M x^* - P_M x_n \right) + \\
& + 2\gamma \left(P_M \left(F''(P_{M_\xi}(x^*)) - F''(x^*) (P_M x_n - P_M x^*) \right)^* F(x^*), P_M x^* - P_M x_n \right) + \\
& + 2\gamma \left(P_M \left(F'^*(P_{M_\xi}(x^*)) - F'^*(x^*) \right)^* F(x^*), P_M x^* - P_M x_n \right) + \\
& + 2\gamma \left((P_M F'^*(x^*) F(x^*) - F'^*(x^*) F(x^*)), x^* - x_n \right) + 2\gamma \left(F'^*(x^*) F(x^*), x^* - x_n \right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Оценим отдельные слагаемые в правой части равенства (11). Рассмотрим оператор $P_M F'^*(x^*) F'(x^*) P_M$, действующий из конечномерного пространства M в M . Очевидно, что он самосопряжен и в силу условия А не содержит точку $\lambda = 0$ в своем спектре. Поэтому линейный оператор $P_M F'^*(x^*) F'(x^*) P_M$ имеет непрерывный обратный. Следовательно, найдется такое $q > 0$, что для всех $h \in M$ выполняется

$$(P_M F'^*(x^*) F'(x^*) P_M h, h) \geq q \|h\|^2. \tag{12}$$

Определим линейный непрерывный оператор $\Phi(x^*): H_1 \rightarrow H_1$ равенством

$$\Phi(x^*)y = (F''(x^*)y)^* F(x^*), \quad y \in H_1. \tag{13}$$

Согласно (13), справедлива оценка

$$2\gamma \left((F''(x^*) (P_M x_n - P_M x^*))^* F(x^*), P_M x^* - P_M x_n \right) \leq 2\gamma \|\Phi(x^*)\| \|P_M x_n - P_M x^*\|^2. \tag{14}$$

Оценивая с учетом (3), (4), (12), (14) остальные слагаемые в правой части (11), получаем

$$\begin{aligned}
& 2\gamma \left(P_M F'^*(P_{M_\xi}(x_n)) F(P_{M_\xi}(x_n)), P_M x^* - P_M x_n \right) \leq \\
& \leq -2\gamma q \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + 2\gamma \|\Phi(x^*)\| \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + 2\gamma N_1 N_2 \|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + \\
& + \gamma L \|F(x^*)\| \|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + 2\gamma N_1^2 \|P_M x_n - P_M x^*\| \Delta + 2\gamma N_1 N_2 \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 \Delta + \\
& + 2\gamma N_1 N_2 \|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + 2\gamma N_1 N_2 \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 \Delta + \\
& + 2\gamma L \|F(x^*)\| \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 \Delta + 2\gamma N_2 \|F(x^*)\| \|P_M x_n - P_M x^*\| \Delta + 2\gamma \|x_n - x^*\| \Delta_1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Объединяя соотношения (7) – (12), (14), (15), имеем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq & 2\gamma \left(\delta + \gamma N_1^2 \delta + 2N_1^2 \Delta + N_2 \|F(x^*)\| \Delta \right) \|P_M x_n - P_M x^*\| + 2\gamma \Delta_1 \|x_n - x^*\| + \\ & + \left(1 + 2\gamma \left(-q + \|\Phi(x^*)\| + \gamma N_1^4 + 2N_1 N_2 \Delta + L \|F(x^*)\| \Delta \right) \right) \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + \\ & + \gamma \left(4N_1 N_2 + L \|F(x^*)\| \right) \|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + 4\gamma^2 N_1^2 \|F(x^*)\|^2 + 2\gamma^2 N_1 \|F(x^*)\| \delta + \\ & + \gamma^2 \delta^2 + 2\gamma \delta \Delta + 2\gamma^2 N_1^2 \delta \Delta + 2\gamma N_1 \|F(x^*)\| \Delta + 2\gamma N_1^2 \Delta^2 + \Delta^2 + 4\gamma^2 N_1^4 \Delta^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) с учетом неравенства $2a \leq a^2 + 1$ следует

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq & \left(1 + \gamma \left(-2q + 2 \|\Phi(x^*)\| + \delta + 4N_1 N_2 \Delta + 2N_1^2 \Delta + N_2 \|F(x^*)\| \Delta + 2L \|F(x^*)\| \Delta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma N_1^2 \delta + 2\gamma N_1^4 \right) \right) \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + \gamma \Delta_1 \|x_n - x^*\|^2 + \gamma \left(4N_1 N_2 + L \|F(x^*)\| \right) \times \\ & \times \|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + \gamma \delta + 2\gamma \delta \Delta + 2\gamma N_1^2 \Delta + 2\gamma N_1 \|F(x^*)\| \Delta + \gamma N_2 \|F(x^*)\| \Delta + \\ & + \Delta^2 + 2\gamma N_1^2 \Delta^2 + \gamma \Delta_1 + 4\gamma^2 N_1^2 \|F(x^*)\|^2 + \gamma^2 N_1^2 \delta + \gamma^2 \delta^2 + \\ & + 2\gamma^2 N_1 \|F(x^*)\| \delta + 2\gamma^2 N_1^2 \delta \Delta + 4\gamma^2 N_1^4 \Delta^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценку правой части неравенства (17) продолжим в предположении, что оператор $F(x)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию.

Условие В. Для оператора (13) справедливо неравенство

$$\|\Phi(x^*)\| \leq \frac{q}{8},$$

где величина $q > 0$ определяется соотношением (12).

Согласно (13), имеет место оценка

$$\|\Phi(x)\| \leq \|F''(x^*)\| \|F(x^*)\|.$$

Отсюда следует, что условие В выполняется, например, в каждом из следующих случаев.

1. Невязка $F(x^*)$ достаточно мала, так что

$$\|F(x^*)\| \leq (8N_2)^{-1} q.$$

2. Вторая производная $F''(x^*)$ мала, так что

$$\|F''(x^*)\| \leq \left(8\|F(x^*)\| \right)^{-1} q.$$

Последнее неравенство означает, что оператор $F(x)$ близок к линейному в окрестности точки x^* .

Обозначим далее

$$\begin{aligned} M(\delta, \Delta) = \max \left\{ 1, 1 + 2\Delta, 2N_1^2 \Delta + 2N_1^2 + 2N_1 \|F(x^*)\| + N_2 \|F(x^*)\|, \right. \\ \left. 4N_1^2 \|F(x^*)\|^2 + \delta^2 + N_1^2 \delta + 2N_1 \|F(x^*)\| \delta + 2N_1^2 \delta \Delta + 4N_1^4 \Delta^2 \right\}. \end{aligned}$$

С учетом условия В и введенного обозначения, из (17) получаем следующую промежуточную оценку

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq & \left(1 - 7/4 \gamma q + \gamma \left(\delta + 4N_1 N_2 \Delta + 2N_1^2 \Delta + N_2 \|F(x^*)\| \Delta + 2L \|F(x^*)\| \Delta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma N_1^2 \delta + 2\gamma N_1^4 \right) \right) \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + \gamma \Delta_1 \|x_n - x^*\|^2 + \gamma \left(4N_1 N_2 + L \|F(x^*)\| \right) \times \\ & \times \|P_M x_n - P_M x^*\|^3 + \gamma M(\delta, \Delta) (\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma) + \Delta^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Завершив необходимые вспомогательные построения, перейдем к доказательству основного результата работы.

3. Покажем, что при выполнении соответствующих условий на параметры процедуры (6) и погрешности δ, Δ, Δ_1 с подходящими постоянными $\bar{q} \in (0, 1), l, C, \gamma > 0$ имеют место соотношения

$$\|x_n - x^*\|^2 \leq l\bar{q}^n + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma), \quad P_{M_\xi}(x_n) \in \Omega_R(x^*), \quad n \geq 0. \quad (19)$$

Предположим, что (19) справедливы для $n = 0$ и некоторого номера $n \geq 1$ и покажем, что тогда

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq l\bar{q}^{n+1} + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma), \quad P_{M_\xi}(x_{n+1}) \in \Omega_R(x^*). \quad (20)$$

Заметим, что неравенство

$$(l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma))^{1/2} + \Delta \leq R \quad (21)$$

обеспечивает принадлежность точки $P_{M_\xi}(x_0)$ области $\Omega_R(x^*)$, поскольку при выполнении (21) имеем

$$\begin{aligned} \|P_{M_\xi}(x_0) - x^*\| &= \|P_M x_0 - x^* + \xi - P_M \xi\| \leq \|P_M x_0 - P_M x^*\| + \|P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi\| \leq \\ &\leq (l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma))^{1/2} + \Delta \leq R. \end{aligned}$$

Из (18), (19) получаем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \left(1 - 7/4 \gamma q + \gamma \left(\delta + 4N_1 N_2 \Delta + 2N_1^2 \Delta + N_2 \|F(x^*)\| \Delta + 2L \|F(x^*)\| \Delta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma N_1^2 \delta + 2\gamma N_1^4 + (l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma))^{1/2} (4\gamma N_1 N_2 + \gamma L \|F(x^*)\|) \right) \right) \times \\ &\quad \times \|P_M x_n - P_M x^*\|^2 + \gamma \Delta_1 \|x_n - x^*\|^2 + \gamma M(\delta, \Delta)(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma) + \Delta^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Потребуем выполнения следующих ограничений на константы \bar{q}, l, C, γ и погрешности δ, Δ, Δ_1 :

$$\delta + 4N_1 N_2 \Delta + 2N_1^2 \Delta + N_2 \|F(x^*)\| \Delta + 2L \|F(x^*)\| \Delta + (C(\delta + \Delta + \Delta_1))^{1/2} (4N_1 N_2 + L \|F(x^*)\|) \leq \frac{q}{8}, \quad (23)$$

$$\gamma N_1^2 \delta + 2\gamma N_1^4 + (\gamma C)^{1/2} (4N_1 N_2 + L \|F(x^*)\|) \leq \frac{q}{4}, \quad (24)$$

$$l^{1/2} (4N_1 N_2 + L \|F(x^*)\|) \leq \frac{q}{4}, \quad (25)$$

$$0 < 1 - 9/8 \gamma q \leq \bar{q} < 1, \quad (26)$$

$$C(1 - \gamma q) + \gamma M(\delta, \Delta) + \Delta \leq C, \quad (27)$$

Из (22)–(26) следует

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq (1 - 9/8 \gamma q) \|x_n - x^*\|^2 + \gamma \Delta_1 \|x_n - x^*\|^2 + \gamma M(\delta, \Delta)(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma) + \Delta^2. \quad (28)$$

Дополнительно предположим, что

$$\Delta_1 \leq \frac{q}{8}, \quad (29)$$

тогда из (28) получим

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \gamma q) \|x_n - x^*\|^2 + \gamma M(\delta, \Delta)(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma) + \Delta^2.$$

Отсюда с использованием (26), (27) имеем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \gamma q) (l\bar{q}^n + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma)) + \gamma M(\delta, \Delta)(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma) + \Delta^2 \leq \\ &\leq l(1 - \gamma q) \bar{q}^n + (C(1 - \gamma q) + \gamma M(\delta, \Delta) + \Delta)(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma) \leq l\bar{q}^{n+1} + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma). \end{aligned}$$

Таким образом, установлена справедливость первого из соотношений (20). Наряду с этим условие (21) гарантирует принадлежность точки $P_{M_\xi}(x_{n+1})$ области $\Omega_R(x^*)$, поскольку

$$\begin{aligned} \|P_{M_\xi}(x_n) - x^*\| &= \|P_M x_n - x^* + \xi - P_M \xi\| \leq \|P_M x_n - P_M x^*\| + \|P_M x^* - x^* + \xi - P_M \xi\| \leq \\ &\leq (l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma))^{1/2} + \Delta \leq R. \end{aligned}$$

В силу принципа математической индукции установлено, что при выполнении сделанных выше предположений соотношения (19) имеют место для всех номеров $n \geq 1$.

Покажем теперь, каким образом следует выбирать величины \bar{q} , l , C , $\gamma > 0$ с тем, чтобы при подходящих δ , Δ , Δ_1 выполнялись условия (21), (23)–(27), (29). Неравенство (21) имеет место, если

$$l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma) \leq \frac{R^2}{4}, \tag{30}$$

$$\Delta \leq \frac{R}{2}. \tag{31}$$

Соотношение (30) автоматически выполняется при

$$l \leq \frac{R^2}{8}, \quad C \leq \frac{R^2}{16\gamma}, \tag{32}$$

$$\delta + \Delta + \Delta_1 \leq \frac{R^2}{16C}. \tag{33}$$

Неравенство (24) имеет место, если γ , C подчинены условиям

$$\gamma \leq \frac{q}{8(N_1^2\delta + 2N_1^4)}, \tag{34}$$

$$C \leq \frac{q^2}{64\gamma(4N_1N_2 + L\|F(x^*)\|)^2}. \tag{35}$$

Для обеспечения (25) потребуем выполнения соотношения

$$l \leq \frac{q^2}{16(4N_1N_2 + L\|F(x^*)\|)^2}. \tag{36}$$

Выберем γ так, что

$$0 < \gamma < \frac{8}{9q}, \tag{37}$$

и положим

$$\bar{q} = 1 - \frac{9}{8}\gamma q. \tag{38}$$

Нетрудно видеть, что при таком выборе γ , \bar{q} соотношение (26) имеет место. Неравенство (27) перепишем в виде

$$(\gamma q)^{-1}(\gamma M(\delta, \Delta) + \Delta) \leq C. \tag{39}$$

Для обеспечения выполнения условий на величину C , налагаемых неравенствами (35), (39) и вторым соотношением в (32), согласуем входящие в них параметры так, что

$$\gamma \leq \min \left\{ \frac{qR^2}{32M(\delta, \Delta)}, \frac{q^3}{128M(\delta, \Delta)(4N_1N_2 + L\|F(x^*)\|)^2} \right\}, \tag{40}$$

$$\Delta \leq \min \left\{ \frac{qR^2}{32}, \frac{q^3}{128(4N_1N_2 + L\|F(x^*)\|)^2} \right\}. \tag{41}$$

В соответствии с (35) и вторым условием в (32) выберем

$$C = \min \left\{ \frac{R^2}{16\gamma}, \frac{q^2}{64\gamma(4N_1N_2 + L\|F(x^*)\|)^2} \right\}. \tag{42}$$

Объединяя (36) с первым из условий (32), видим, что величина l может быть выбрана следующим образом:

$$l = \min \left\{ \frac{R^2}{8}, \frac{q^2}{16(4N_1N_2 + L\|F(x^*)\|)^2} \right\}. \tag{43}$$

Учитывая соотношения (34), (37), (40), подчиним шаговый множитель $\gamma > 0$ условию

$$\gamma < \min \left\{ \frac{8}{9q}, \frac{q}{8(N_1^2\delta + 2N_1^4)}, \frac{qR^2}{32M(\delta, \Delta)}, \frac{q^3}{128M(\delta, \Delta)(4N_1N_2 + L\|F(x^*)\|)^2} \right\}. \quad (44)$$

Отметим, что неравенство (39) при таком выборе γ и C автоматически выполняется. Погрешности δ , Δ , Δ_1 должны быть достаточно малы с тем, чтобы выполнялись условия (23), (29), (31), (33), (41).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполняются условия А, В, соотношения (4), (5), начальное приближение x_0 удовлетворяет условию

$$\|x_0 - x^*\|^2 \leq l + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma),$$

константы \bar{q} , l , C , γ выбраны согласно (38), (43), (42), (44) соответственно. Предположим, что погрешности δ , Δ , Δ_1 удовлетворяют (23), (29), (31), (33), (41). Тогда для определяемой согласно (6) последовательности $\{x_n\}$ выполняются соотношения

$$\|x_n - x^*\|^2 \leq l\bar{q}^n + C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma), \quad (45)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|^2 \leq C(\delta + \Delta + \Delta_1 + \gamma). \quad (46)$$

Соотношения (45), (46) означают устойчивость итерационного процесса (6) по отношению к вариации начальной точки x_0 в некоторой фиксированной окрестности квазирешения x^* , а также к малым погрешностям в задании исходного оператора $F(x)$. Согласно (46), вырабатываемые процессом (6) приближения $\{x_n\}$ стабилизируются в окрестности x^* с радиусом, пропорциональным погрешностям δ , Δ , Δ_1 и шаговому множителю γ . Отметим, что малость Δ , Δ_1 может быть обеспечена за счет выбора подпространства M и управляющего параметра ξ .

Процесс (6) может быть использован в частном случае аффинного оператора $F(x) = Ax - f$, где A — линейный непрерывный оператор, действующий из H_1 в H_2 , и $f \in H_2$. В этом случае задача (2) записывается в виде

$$\min_{x \in Q} \frac{1}{2} \|Ax - f\|^2. \quad (47)$$

Нетрудно проверить, что второе и третье неравенства в (4) и условие В при этом выполняются автоматически, а условие А принимает вид $N(A) \cap M = \{0\}$. Согласно доказанной теореме, метод (6) применительно к задаче (47) вырабатывает последовательность $\{x_n\}$, стабилизирующуюся в окрестности квазирешения. В отличие от итерационных методов, рассмотренных в [13], этот метод в случае приближенных данных не требует сопровождения в виде критерия останова.

Автор признателен проф. М. Ю. Кокурину за стимулирующие обсуждения результатов настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
2. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
4. Бакушинский А.Б. Итеративные методы для решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // *Фундаментальная и прикл. матем.* 1997. **3**, № 3. 685–692.
5. Бакушинский А.Б. О скорости сходимости итерационных процессов для нелинейных операторных уравнений // *ЖВМ и МФ.* 1998. **38**, № 4. 559–563.
6. Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. О невырожденных оценках скорости сходимости итерационных методов решения некорректных нелинейных операторных уравнений // *ЖВМ и МФ.* 2000. **40**, № 6. 832–837.
7. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. Необходимые условия сходимости итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // *ЖВМ и МФ.* 2000. **40**, № 7. 986–996.
8. Бакушинский А.Б. Итеративные методы градиентного типа для нерегулярных операторных уравнений // *ЖВМ и МФ.* 1998. **38**, № 12. 1962–1966.
9. Бакушинский А.Б. Итеративные методы градиентного типа с проектированием на фиксированное подпространство для решения нерегулярных операторных уравнений // *ЖВМ и МФ.* 2000. **40**, № 10. 1447–1450.
10. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. Об итеративных методах градиентного типа для решения нелинейных некорректных уравнений // *Сибирский журнал вычислительной математики.* 2001. № 4. 317–329.

11. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал УРСС, 2002.
12. Козлов А.И. Об одном классе устойчивых итерационных методов для решения нелинейных некорректных операторных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 87–93 (электронная версия статьи приведена в <http://num-meth.sgcc.msu.su>).
13. Бакушинский А.Б. О скорости сходимости алгоритмов итеративной регуляризации для решения линейных задач с выпуклыми ограничениями // ЖВМ и МФ. 2002. **42**, № 7. 933–936.

Поступила в редакцию
21.02.2003
