УДК 532.542.2

СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА В АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ОКНАХ ГАЗОВЫХ ЛАЗЕРОВ

К. Н. Волков[1], **В. Н. Емельянов**[2], **А. В. Пустовалов**[3]

Рассматриваются вопросы, связанные с разработкой средств математического моделирования, предназначенных для расчетов сверхзвуковых течений, которые реализуются в аэродинамических окнах газовых лазеров. На основе метода конечных объемов и маршевого метода проводится численное моделирование стационарных сверхзвуковых течений идеального сжимаемого газа в криволинейных каналах и соплах с различными степенями нерасчетности. Сравниваются картины течения в сверхзвуковых струях, возникающие при реализации на срезе сопла равномерного распределения скорости и распределения скорости, соответствующего свободному вихрю. Разрабатываются средства проектирования каналов на основе решения последовательности прямых задач. Результаты расчетов показывают высокую эффективность разработанного программного обеспечения применительно к решению задач, связанных с профилированием каналов и с управлением стационарными сверхзвуковыми струйными потоками.

Ключевые слова: аэродинамическое окно, сверхзвуковое течение, сопло, струя, численное моделирование, метод конечных объемов, маршевый метод, задача о распаде произвольного разрыва.

1. Введение. Аэродинамическое окно (aerodynamic window) представляет собой устройство, в котором перепад давлений между двумя средами поддерживается за счет организации течения в газовой завесе с поперечным градиентом давления. Аэродинамические окна используются в мощных газовых лазерах для вывода лазерного луча из камеры резонатора через непоглощающую газовую среду, поддерживая при этом необходимую разность давлений между резонатором и окружающей средой. Вывод лазерного луча из резонатора через твердое окно затруднен из-за перегрева материала окна поглощенным излучением [1].

Устройство для вывода лазерного излучения содержит плоское сопло, создающее в апертуре окна сверхзвуковую струю, внешняя граница которой расположена со стороны атмосферы (область высокого давления), а внутренняя граница — со стороны камеры оптического резонатора (область низкого давления), и принимающий струю плоский диффузор (рис. 1). Для уменьшения расхода рабочего газа через сопло и улучшения восстановления давления в диффузоре используются сопла с профилированными или с прямолинейными стенками. В аэродинамических окнах напорного типа тракт для вывода излучения из резонаторной камеры и струя завесы пересекаются под некоторым углом. В зависимости от конструктивных особенностей сопла и перепада давлений формируются различные ударно-волновые структуры потока, оказывающие существенное влияние на качество оптического луча. Изменения плотности обусловливают изменения показателя преломления среды и показателей оптического качества.

Существующие конструкции аэродинамических окон газовых лазеров с поперечной сверхзвуковой струей делятся на окна с однородным потоком на срезе сопла и на окна на свободном вихре. В аэродинамических окнах с однородным потоком на срезе сопла искривление сверхзвуковой струи достигается в волне разрежения, косом скачке уплотнения или в их комбинации [2–6]. В аэродинамических окнах на свободном вихре в выходном сечении сопла формируется сверхзвуковой поток с распределением скорости, характерным для свободного вихря [7–15]. Газ в окне движется по концентрическим окружностям со скоростью, обратно пропорциональной радиусу линии тока, а перепад давления обеспечивается центробежными силами.

[1] Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет энергетического машиностроения, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; вед. науч. сотр., e-mail: dsci@mail.ru

[2] Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет энергетического машиностроения, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; профессор, e-mail: vlademelyanov@gmail.com

[3] Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет энергетического машиностроения, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; науч. сотр., e-mail: m4.voenmeh@gmail.com

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Основной характеристикой аэродинамического окна, от которой зависит возможность его практического использования, является оптическое качество. При решении задач фокусировки и передачи излучения на удаленные объекты необходимо обеспечить приемлемый уровень расходимости луча на выходе из оптического тракта лазерной установки. Важную роль играет обеспечение оптического качества аэродинамических окон, связанного с минимизацией искажений амплитудно-фазовых характеристик волнового фронта при прохождении излучения через среду [1].

В работах [2, 3] исследуются струи с равномерным распределением скорости на срезе сопла. Для реализации такой конфигурации требуется обеспечить достаточно большой массовый расход воздуха через сопло. При этом изменение момента количества движения в струе из-за разницы давлений сопровождается возникновением ударной волны и веера волн разрежения, что приводит к потере качества оптического луча. Для сохранения качества оптического луча находят применение сопла, создающие распределение скорости на срезе сопла, соответствующее свободному вихрю [7, 8].

Основными причинами изменения показателя преломления являются изменения плотности и состава газа, обусловленные диффузионными и газодинамическими процессами. Изменения фазы волнового фронта делятся на стационарные и нестационарные. Стационарные искажения волнового фронта обусловливаются средней неоднородностью распределения показателя преломления, а нестационарные искажения связываются с турбулентными пульсациями плотности среды [16, 17].

В аэродинамических окнах с поперечной струей завесы оптические искажения, связанные с нагревом газовой завесы излучением лазера, пренебрежимо малы практически для любой мощности выводимого лазерного излучения. Для оценки оптических искажений на практике используется приближение стационарного течения идеального сжимаемого газа.

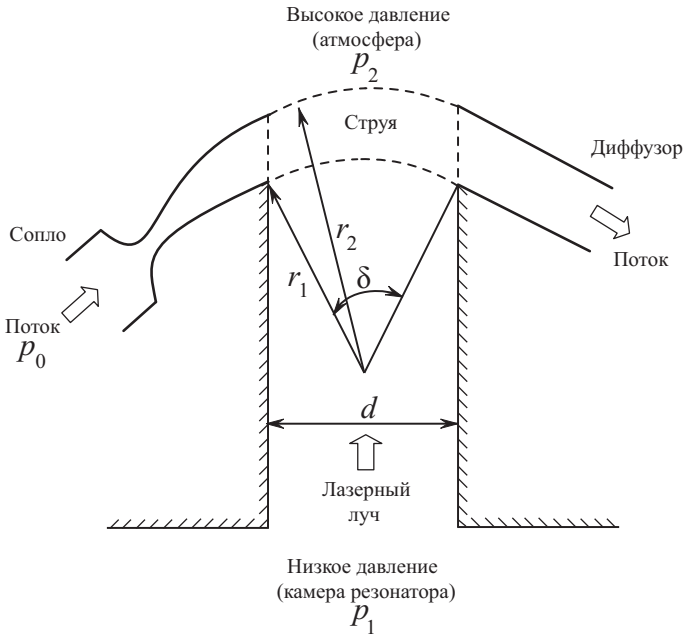


Рис. 1. Схема аэродинамического окна напорного типа

Для принятия конструкторских решений имеется необходимость в создании эффективных и быстродействующих программных средств, позволяющих рассчитывать характеристики разрабатываемых аэродинамических окон, и средств профилирования сопел, формирующих струи с требуемыми свойствами [18–20].

В настоящей статье рассматриваются средства математического моделирования, позволяющие проводить расчеты сверхзвуковых течений в каналах и струях с необычными свойствами, которые реализуются в аэродинамических окнах напорного типа. На основе метода конечных объемов и маршевого метода исследуются стационарные сверхзвуковые течения идеального сжимаемого газа в криволинейных каналах и соплах, а также разрабатываются средства проектирования каналов на основе решения последовательности прямых задач. Обсуждаются особенности интегрирования стационарных уравнений Эйлера маршевым методом и решение задачи о распаде произвольного разрыва. Результаты расчетов приводятся для различных степеней нерасчетности струйного потока.

2. Метод расчета. Рассмотрим численное моделирование стационарных сверхзвуковых течений идеального газа в криволинейных каналах и струях на основе маршевого метода [21]. Уравнения Эйлера интегрируются вдоль некоторого пространственного направления. В отличие от метода установления [22], в памяти хранится поле течения на текущем слое по маршевой координате, что позволяет повысить разрешение, с которым проводятся расчеты.

2.1. Построение разностной схемы. В двумерном случае уравнение, описывающее стационарное течение идеального сжимаемого газа, в консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) дополняется уравнением состояния совершенного газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

Полная энергия единицы объема находится из соотношения $e = \rho\varepsilon + \dfrac{1}{2}\,\rho\big(u^2 + v^2\big)$.

Вектор консервативных переменных $\boldsymbol{U}$ и вектора потоков $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho uu + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho vv + p \\ (e+p)v \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ — плотность; u и v — компоненты скорости в координатных направлениях x и y; p — давление, e — полная энергия единицы объема; ε — удельная внутренняя энергия; γ — отношение удельных теплоемкостей.

При условии, что течение является сверхзвуковым вдоль одной из пространственных координат, уравнение (1) является гиперболическим вдоль этой координаты. Стационарные сверхзвуковые течения допускают численное моделирование в рамках нестационарных уравнений методом установления [22]. Использование стационарных уравнений в ряде случаев представляется более эффективным. Такой подход заведомо предпочтителен, если уравнение (1) является гиперболическим во всей вычислительной области [23]. В частности, уравнение (1) является гиперболическим при $u^2 + v^2 > c^2$. Гиперболичность в направлении оси x имеет место при $u^2 > c^2$, а гиперболичность вдоль оси y — при $v^2 > c^2$. В дальнейшем рассматривается случай x-гиперболичности (проекция скорости течения на ось x является сверхзвуковой).

Уравнение (1) решается маршевым методом, предполагающим пошаговое интегрирование вдоль координаты x.

Построим двумерную разностную сетку с равномерными шагами Δx и Δy в координатных направлениях x и y. Под $\boldsymbol{U}_i$ понимаются значения сеточной функции $\boldsymbol{U}$ в центре контрольного объема, принадлежащего оси y и имеющего номер i ($i = 1, 2, \ldots$). Предположим, что сеточные функции принимают постоянные значения внутри ячеек. Для границы ячейки с номером $i + 1/2$ на каждом шаге по координате x решается задача Римана для уравнения (1) со следующими начальными данными: $\boldsymbol{U}_i^k = \text{const}$ при $y \leqslant y_{i+1/2}$ и $\boldsymbol{U}_{i+1}^k = \text{const}$ при $y > y_{i+1/2}$. Решение этой задачи обозначается через $\boldsymbol{U}_{i+1/2}$. Тем же способом находится вектор решения $\boldsymbol{U}_{i-1/2}$ для границы ячейки с номером $i - 1/2$. Конечно-объемная схема Годунова для уравнений стационарной газовой динамики, записанных в виде (1), имеет вид

$$\frac{\boldsymbol{F}_i^{k+1} - \boldsymbol{F}_i^k}{\Delta x} + \frac{\boldsymbol{G}_{i+1/2} - \boldsymbol{G}_{i-1/2}}{\Delta y} = 0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{G}_{i\pm1/2} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}_{i\pm1/2})$. Целый верхний индекс $k = 0, 1, \ldots$ обозначает значения сеточной функции на шаге k вдоль оси x. Для простоты записи в уравнении (2) используется явная схема Эйлера для дискретизации производной по маршевой координате.

Процедура вычисления потоков включает в себя реконструкцию значений искомых функций на гранях контрольных объемов из средних значений по контрольным объемам и решение задачи о распаде произвольного разрыва (задача Римана). Процедура реконструкции применяется к примитивным переменным [24]. Потоки через грани контрольного объема находятся из соотношения

$$\boldsymbol{F}_{m+1/2} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{G}_m^k + \boldsymbol{G}_{m+1}^k\right) + \frac{1}{2}\,|A|_{m+1/2}^k\big(\boldsymbol{F}_m^k - \boldsymbol{F}_{m+1}^k\big), \quad \text{где} \quad A = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^{-1}.$$

Спектральное исследование устойчивости линеаризованного уравнения (1) приводит к следующему условию [23]: $C = \max|\lambda_\pm|\,\dfrac{\Delta x}{\Delta y} \leqslant 1$, где $\lambda_\pm = \dfrac{uv \pm c\big(u^2 + v^2 - c^2\big)^{1/2}}{u^2 - c^2}$.

Скорость звука находится из соотношения $c = \left[(\gamma - 1)h - \dfrac{1}{2}\,(\gamma - 1)\big(u^2 + v^2\big)\right]^{1/2}$, где h — полная энтальпия.

Реализация разностной схемы (2) сводится к решению системы нелинейных уравнений [23]. Метод Годунова основан на точном решении задачи Римана. Точное решение задачи Римана общего вида состоит из двух волн (ударной волны и простой волны разрежения) с тангенциальным разрывом между ними, которые отделены друг от друга областями постоянного течения. Решение представляет собой стационарную картину течения, которая возникает в области $x > 0$ при взаимодействии двух равномерных полубезграничных сверхзвуковых потоков газа, встречающихся на прямой линии $y = 0$. Точное решение задачи Римана общего вида, построенное на основе элементарных решений, соответствующих различным частным случаям, приводится в работе [23].

Разностная схема (2) обладает первым порядком точности. Схемы более высокого порядка строятся с использованием тех же методов, что и для случая нестационарных уравнений [22]. Для интегрирования по маршевому направлению используется трехшаговая схема Рунге–Кутты [24].

2.2. Течения в каналах. При использовании произвольных трапециевидных ячеек, характерных для каналов с криволинейными стенками, разностные уравнения (2) меняются с учетом соответствующих длин сторон и направлений нормалей к ним. Общие разностные уравнения выписываются при помощи применения метода конечных объемов к интегральной форме уравнения (1). Интегрируя уравнение (1) по контрольному объему и применяя теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$\oint_{\Gamma} (\boldsymbol{F}\,dy - \boldsymbol{G}\,dx) = 0, \tag{3}$$

где Γ — контур, ограниченный областью интегрирования на плоскости (x, y).

Расчетная область представлена на рис. 2а. Под Γ_1 и Γ_2 понимаются границы расчетной области, в качестве которых выступают, например, свободные границы или непроницаемые стенки. Входная и выходная границы канала являются прямолинейными стенками. Начальным условием задачи является распределение газодинамических параметров во входном сечении a_1, от которого в направлении потока (в направлении координаты x) осуществляется расчет течения маршевым методом [21].

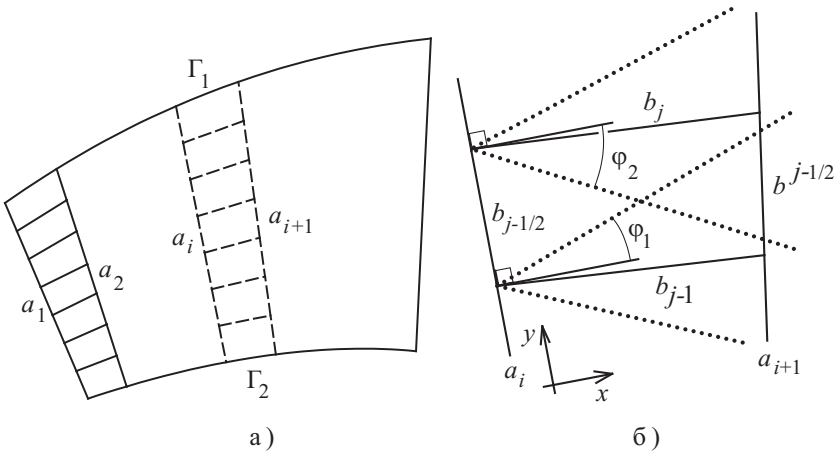


Рис. 2. Расчетная область (а) и контрольный объем (б)

Распределения параметров в сечении a_i считаются заданными. Сечение a_i разбивается на n равных отрезков $b_{j-1/2}$. На каждом отрезке определяются средние значения газодинамических параметров, например, давление p_{j-1} и плотность ρ_{j-1}. Строится новое сечение a_{i+1} (шаг по координате x выбирается из условия устойчивости), которое тоже разбивается на n равных отрезков $b^{j-1/2}$. Соответствующие точки разбиения (узлы) сечений a_i и a_{i+1} соединяются отрезками b_j, что дает контрольный объем с границами b_{j-1}, $b^{j-1/2}$, b_j и $b_{j-1/2}$ (рис. 2б). Через φ_1 и φ_2 обозначаются углы, определяющие направления распространения волн, возникающих в результате взаимодействия соответствующих равномерных потоков (на рисунке они показываются пунктирными линиями). После нахождения параметров в сечении a_{i+1} строится следующее сечение и определяются соответствующие газодинамические параметры. Процесс повторяется до тех пор, пока не будут рассчитаны параметры во всей области.

Разностная схема, с помощью которой определяются значения газодинамических параметров в сечении a_{i+1} (на отрезках $b^{j-1/2}$), получается путем применения уравнения (3) к каждому контрольному объему с последующим использованием теоремы о среднем для вычисления интегралов по отдельным участкам границы. Разностная схема для уравнения (3) имеет вид

$$(\boldsymbol{F}h_y - \boldsymbol{G}h_x)^{j-1/2} = (\boldsymbol{F}h_y - \boldsymbol{G}h_x)_{j-1/2} + (\boldsymbol{F}h_y - \boldsymbol{G}h_x)_{j} + (\boldsymbol{F}h_y - \boldsymbol{G}h_x)_{j-1}\,, \tag{4}$$

где h_x, h_y — проекции соответствующей грани ячейки на координатные оси.

Параметры на границах b_j и b_{j-1} определяются из решения плоской задачи о взаимодействии двух сверхзвуковых равномерных потоков. Волны, возникающие в результате взаимодействия двух потоков, в каждой точке разбиения на линии a_i распространяются в сверхзвуковом потоке по направлении к сечению a_{i+1}.

Допустимый шаг интегрирования по времени определяется из условия Куранта–Фридрихса–Леви, согласно которому необходимо, чтобы волны, идущие от соседних точек разбиения на линии a_i (на рис. 2б они изображаются пунктирными линиями), не достигли рассматриваемой продольной границы, так как в этом случае на ней изменяется автомодельное решение.

Максимальное допустимое расстояние до соответствующего отрезка $b^{j-1/2}$ (отрезка, принадлежащего сечению a_{i+1}), при котором обеспечивается выполнение условия устойчивости, находится из приближенного соотношения $\Delta S = \left[\left(h_x^2+h_y^2\right)\left(\mathrm{M}_{j-1/2}^2-1\right)\right]^{1/2}$, где h_x, h_y — проекции отрезка $b_{j-1/2}$ на координатные оси, $\mathrm{M}_{j-1/2}$ — число Маха.

Угол φ_k, определяющий направление распространения волны, возникающей в результате взаимодействия равномерных сверхзвуковых потоков и соответствующей элементу $b_{<k>}$ (под k понимается локальный индекс относительно элемента $b_{j-1/2}$, индекс 1 соответствует элементу b_{j-1}, а индекс 2 соответствует элементу b_j), находится из соотношения $\varphi_k = \operatorname{arctg}(\zeta_{j-1/2}) \pm \sigma_k$, где

$$\sigma_k = \begin{cases} \arcsin\left(1/\mathrm{M}_{j-1/2}\right) & \text{при} \quad p_{j-1/2} \geqslant p_{<k>}, \\ \arcsin\left[\dfrac{\gamma+1}{2\gamma \mathrm{M}_{j-1/2}^2}\left(\dfrac{p_{<k>}}{p_{j-1/2}}+\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\right]^{1/2} & \text{при} \quad p_{j-1/2} < p_{<k>}. \end{cases}$$

Здесь $\zeta_j = u_j/v_j$. Знак плюс соответствует $k=1$, а знак минус — $k=2$.

Картина течения, возникающая при взаимодействии двух сверхзвуковых равномерных потоков, представлена на рис. 3. Штриховой линией обозначается контактный разрыв, а пунктирной — либо скачок уплотнения, либо граница волны разрежения (в зависимости от соотношений параметров в потоках на отрезках $b_{j-1/2}$ и $b_{j+1/2}$).

Параметры p и ζ на контактном разрыве находятся по следующим итерационным формулам:

$$p^{(n+1)} = \left[\alpha_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)}\right]^{-1}\left[\beta_1^{(n)}\zeta_{j-1/2} - \beta_2^{(n)}\zeta_{j+1/2} + \alpha_1^{(n)}p_{j-1/2} + \alpha_2^{(n)}p_{j+1/2}\right],$$
$$\zeta^{(n+1)} = \beta_1^{(n)}\zeta_{j-1/2} - \alpha_1^{(n)}\left(p^{n+1} - p_{j-1/2}\right) = \beta_2^{(n)}\zeta_{j+1/2} + \alpha_2^{(n)}\left(p^{n+1} - p_{j+1/2}\right).$$

Верхний индекс обозначает номер итерации. Коэффициенты α_k и β_k находятся из соотношений

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(s_k + s_{<k>}\right) & \text{при} \quad p_k \leqslant p_{<k>}, \\ \beta_k g_k & \text{при} \quad p_k > p_{<k>}; \end{cases} \qquad \beta_k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad p_k \leqslant p_{<k>}, \\ \dfrac{1}{1 \pm \zeta_{<k>}\left[g_k(p_k - p_{<k>})\right]} & \text{при} \quad p_k > p_{<k>}. \end{cases}$$

Здесь $s = \dfrac{1+\zeta^2}{\rho W^2}\left(\mathrm{M}^2-1\right)^{1/2}$, $g_k = \left[\dfrac{2\gamma \mathrm{M}_{<k>}^2 p_{<k>}}{(\gamma-1)p_{<k>} + (\gamma+1)p_k} - 1\right]^{1/2}$. Элементу $b_{j-1/2}$ соответствует локальный индекс $<1>$, а элементу $b_{j+1/2}$ — локальный индекс $<2>$. Знак плюс соответствует $k=1$, а знак минус — $k=2$.

Параметры потока находятся из следующих соотношений:

— плотность потока $\rho_k = \rho_{<k>}\begin{cases} \left(\dfrac{p}{p_{<k>}}\right)^{1/\gamma} & \text{при} \quad p \leqslant p_{<k>}, \\ \dfrac{(\gamma-1)p_{<k>} + (\gamma+1)p}{(\gamma+1)p_{<k>} + (\gamma-1)p} & \text{при} \quad p > p_{<k>}; \end{cases}$

— скорость потока $W_k = \left(\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}c_*^2 - \dfrac{2\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho_{<k>}}\right)^{1/2}$;

— проекции скорости потока на оси координат $u_k = \dfrac{W_k}{\left(1+\zeta^2\right)^{1/2}}$, $v_k = \zeta u_k$;

— число Маха $\mathrm{M}_k = \dfrac{W_k}{(\gamma p_k/\rho_k)^{1/2}}$.

Критическая скорость звука определяется из равенства $c_* = \left(\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}W_{<k>}^2 + \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}\dfrac{p_{<k>}}{\rho_{<k>}}\right)^{1/2}$.

Параметр $\chi \in (0,1)$ указывает на положение отрезка $b^{j-1/2}$ (отрезка, принадлежащего сечению a_{i+1}), при котором выполняется условие устойчивости. Значение $\chi = 0$ соответствует положению, занимаемому сечением a_i, а значение $\chi = 1$ — положению сечения a_{i+1}.

Расчеты реализуются в виде следующей последовательности шагов: определяется расстояние ΔS, на котором следует установить сечение a_{i+1}; вычисляются параметры p и ζ; определяются углы φ_1 и φ_2; уточняется положение сечения a_{i+1} (при необходимости его положение изменяется); при $\chi < 1$ положение

сечения a_{i+1} изменяется (в противном случае происходит возврат к предыдущему шагу), а при $\chi \geqslant 1$ определяются газодинамические параметры элементов b_j; находятся газодинамические параметры элементов $b^{j-1/2}$; производится перенос сечения a_i в новое положение, занимаемое сечением a_{i+1}. Выполняется заданное количество шагов по маршевой координате.

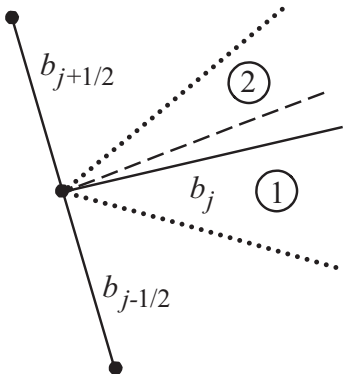


Рис. 3. Распад разрыва

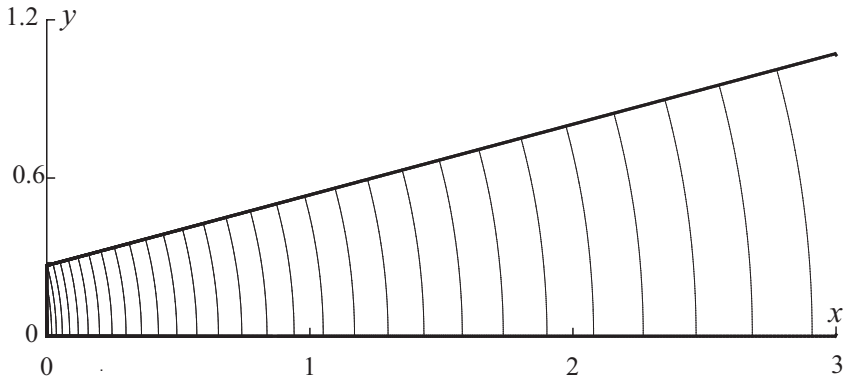


Рис. 4. Линии уровня числа Маха в течении от сверхзвукового источника

3. Тестовые задачи. Разработанные средства численного моделирования применяются для расчетов стационарных сверхзвуковых течений идеального сжимаемого газа в каналах и струях. Тестовые задачи включают в себя расчет течения от сверхзвукового источника, расчет течения с образованием распада разрыва, обтекание сверхзвуковым потоком дуги окружности. Возможности применения разработанного численного метода к расчету течений в каналах и струях ограничиваются условием отсутствия в потоке дозвуковых зон, когда нарушается условие гиперболичности уравнений Эйлера по маршевому направлению.

3.1. Течение от сверхзвукового источника. Рассмотрим течение идеального сжимаемого газа в симметричном сопле от сверхзвукового источника при $r_i/r_o = 0.25$, где r_i и r_o — радиусы входного и выходного сечения сопла. Длина сопла составляет $l = 3r_o$. Расчет осуществляется маршевым методом (от сечения к сечению) с использованием сетки размером 536×101 (количество сечений по маршевой координате определяется автоматически). В качестве начальных данных задаются распределения газодинамических параметров во входном сечении сопла. Во входном сечении число Маха на оси равняется 1.035, а на стенке сопла — 1.218.

Решение задачи, обработанное в виде линий уровня числа Маха, приводится на рис. 4. Имеет место непрерывное ускорение потока вдоль оси сопла. Линии уровня числа Маха представляют собой дуги окружностей.

3.2. Течение, возникающее в результате распада разрыва. Рассмотрим расчет сверхзвукового течения в плоском канале, которое возникает в результате распада разрыва. В начальном сечении при $y \leqslant 0.5$ задается равномерный поток с параметрами $\mathrm{M}_1 = 2.5$, $p_1 = 1.2 \times 10^5$ Па, $\rho_1 = 1$ кг/м^3, а при $y > 0.5$ — равномерный поток с параметрами $\mathrm{M}_2 = 2.5$, $p_2 = 5 \times 10^5$ Па, $\rho_2 = 3$ кг/м^3. В направлении оси y расчетная сетка содержит 101 ячейку.

Результаты расчетов приводятся на рис. 5. При заданных начальных условиях формируются скачок уплотнения, контактный разрыв и веер волны разрежения (рис. 5а). Сплошная линия на рис. 5б соответствует точному решению [24], а штрихпунктирная линия — численному решению. Области резкого изменения параметров газа размазываются на несколько ячеек сетки.

3.3. Обтекание дуги окружности. Рассмотрим моделирование сверхзвукового течения в канале с сужением. Отношение длины канала к его высоте составляет $L/H = 8$, а максимальная высота сужения — $H/8$. Расчеты проводятся на сетке, содержащей 61 ячейку в направлении оси y. Условия во входном сечении канала соответствуют числу Маха, равному 1.65. В выходном сечении канала используются граничные условия свободного вытекания. На нижней стенке канала задаются граничные условия непротекания для нормальной скорости. Расчеты проводятся для двух вариантов граничных условий на верхней границе. В варианте 1 используются граничные условия непротекания, а в варианте 2 — верхняя граница канала считается свободной границей.

Линии уровня плотности приводятся на рис. 6 для варианта 1. Результаты расчетов достаточно хорошо воспроизводят ударно-волновую структуру потока, включая скачок уплотнения, отраженный от верхней границы канала при $x = 4.1$. Скачки уплотнения воспроизводятся в виде узких зон резкого изменения давления (фронт ударной волны разрешается при помощи 2–3 ячеек).

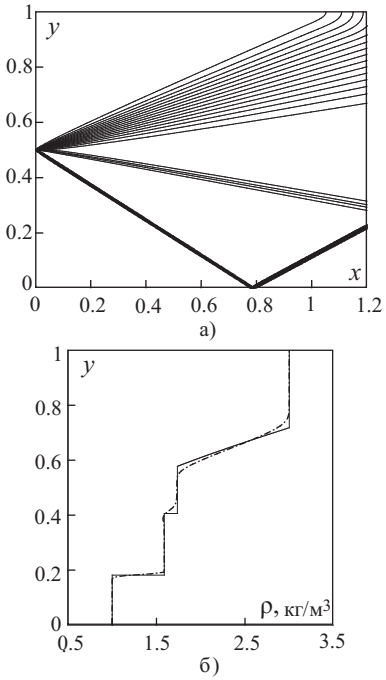


Рис. 5. Линии уровня плотности (а) и распределение плотности в сечении $x = 0.5$ (б)

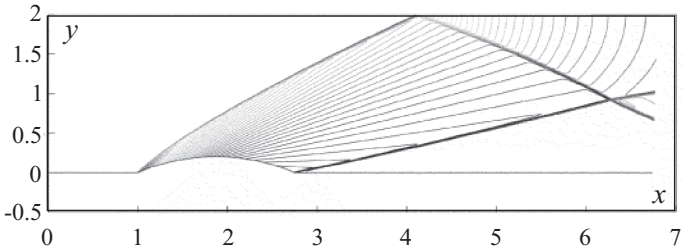


Рис. 6. Линии уровня плотности при сверхзвуковом обтекании дуги окружности (вариант 1)

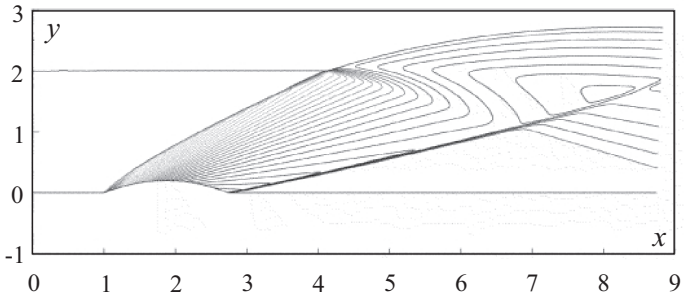


Рис. 7. Линии уровня плотности при сверхзвуковом обтекании дуги окружности (вариант 2)

Картина течения, образующаяся в результате натекания расчетной сверхзвуковой струи на дугу окружности, приводится на рис. 7 для варианта 2. В расчетах таких течений необходимо отслеживать изменение границы струи при падении на нее как скачков уплотнения, так и волн разрежения.

4. Сверхзвуковые струи. Проводится моделирование течений невязкого сжимаемого газа в стационарных сверхзвуковых плоских струях с равномерным профилем скорости на срезе сопла и с распределением скорости, соответствующим свободному вихрю. Рассматривается случай, когда разным границам струи отвечают разные наружные давления (различные степени нерасчетности). Такие струи используются для аэродинамического разделения полостей с различными давлениями. В расчетах используются сетки, содержащие 81 ячейку по координате y. Протяженность расчетной области в направлении оси x изменяется в зависимости от условий расчета.

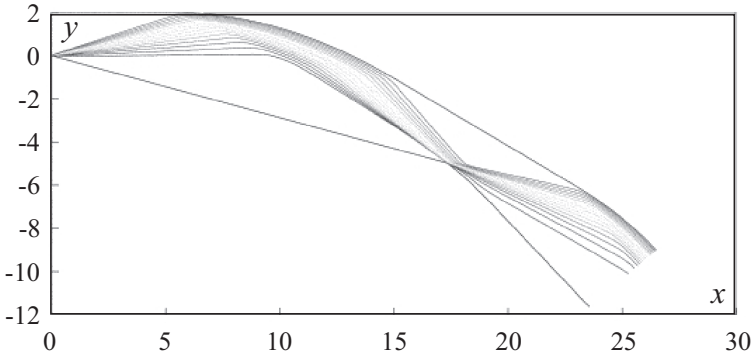


Рис. 8. Линии уровня плотности в струе, разделяющей области низкого (внизу) и высокого (вверху) давления

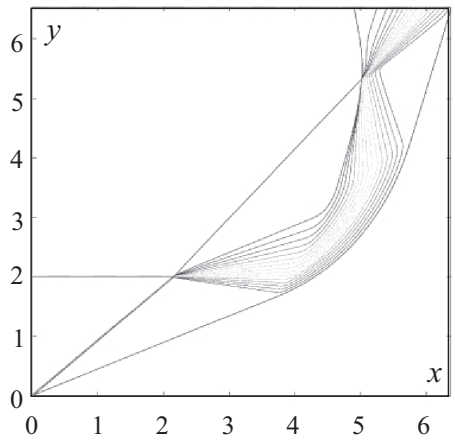


Рис. 9. Линии уровня плотности в струе с расчетной (верхней) и перерасширенной (нижней) границами

Структура плоской струи с равномерным распределением параметров на срезе сопла, которая является расчетной для верхнего полупространства и перерасширенной для нижнего полупространства,

приводится на рис. 8.

Другой вариант течения приводится на рис. 9. Струя, являющаяся расчетной для верхнего полупространства, выдерживает на скачке уплотнения положительный перепад давления, запирая нижнее полупространство с более высоким давлением. При уменьшении давления в верхнем полупространстве ниже расчетного уровня происходит образование веера волн разрежения на верхней кромке и изменение формы и угла отклонения струи (рис. 10).

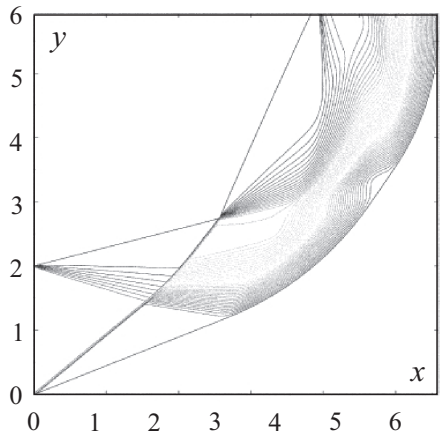


Рис. 10. Линии уровня плотности в струе с недорасширенной (верхней) и перерасширенной (нижней) границами

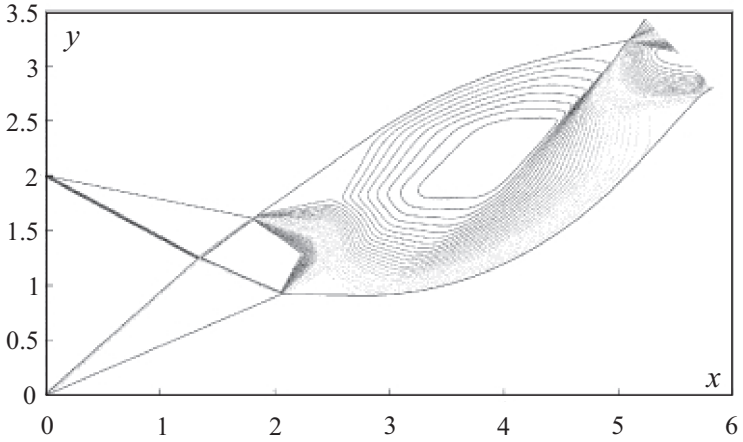


Рис. 11. Линии уровня плотности в перерасширенной струе для различной степени перерасширения на верхней и нижней границах

Случаи перерасширенных и недорасширенных кромок с разными степенями нерасчетности для верхнего и нижнего полупространства приводятся на рис. 11 и 12.

Картину течения в струе, истекающей из сопла, на срезе которого формируется поток с распределением скорости, соответствующим свободному вихрю, показывает рис. 13. В этом случае линии тока представляют собой окружности, а перепад давления поддерживается центробежными силами.

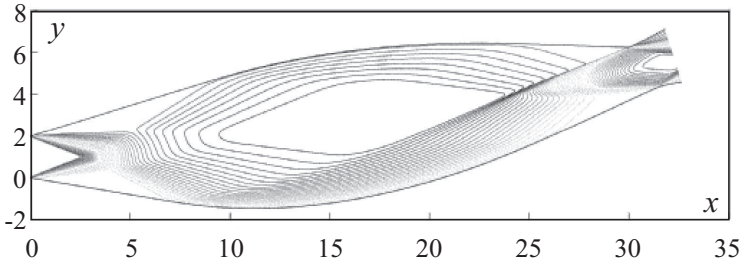


Рис. 12. Линии уровня плотности в недорасширенной струе для различной степени недорасширения на верхней и нижней границах

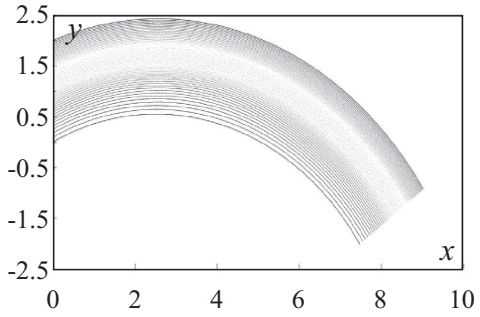


Рис. 13. Линии уровня плотности в струе свободного вихря

Представляет интерес структура течения, возникающего при затекании струи свободного вихря в канал диффузора. Рис. 14а–14з соответствуют различным перепадам давления на внешней и внутренней границах струи.

Сравнение течений, формирующихся при затекании равномерного потока, и потока, порожденного свободным вихрем, в канал диффузора приводятся на рис. 15 и 16.

В том случае, когда струя с распределением скорости на срезе сопла, соответствующим свободному вихрю, натекает на прямолинейный канал, в канальном течении формируются волны разрежения и скачки уплотнения несмотря на то, что на входе в канал поток параллелен стенкам канала (рис. 17).

5. Профилирование сопел аэродинамических окон. В аэродинамических окнах со свободным вихрем струя оказывается сильно закрученной в направлении, перпендикулярном вектору скорости потока. Скорость в струе изменяется обратно пропорционально радиусу кривизны линии тока. В идеальном случае в потоке отсутствуют скачки уплотнения и связанные с ними потери (течение оказывается изэнтропическим).

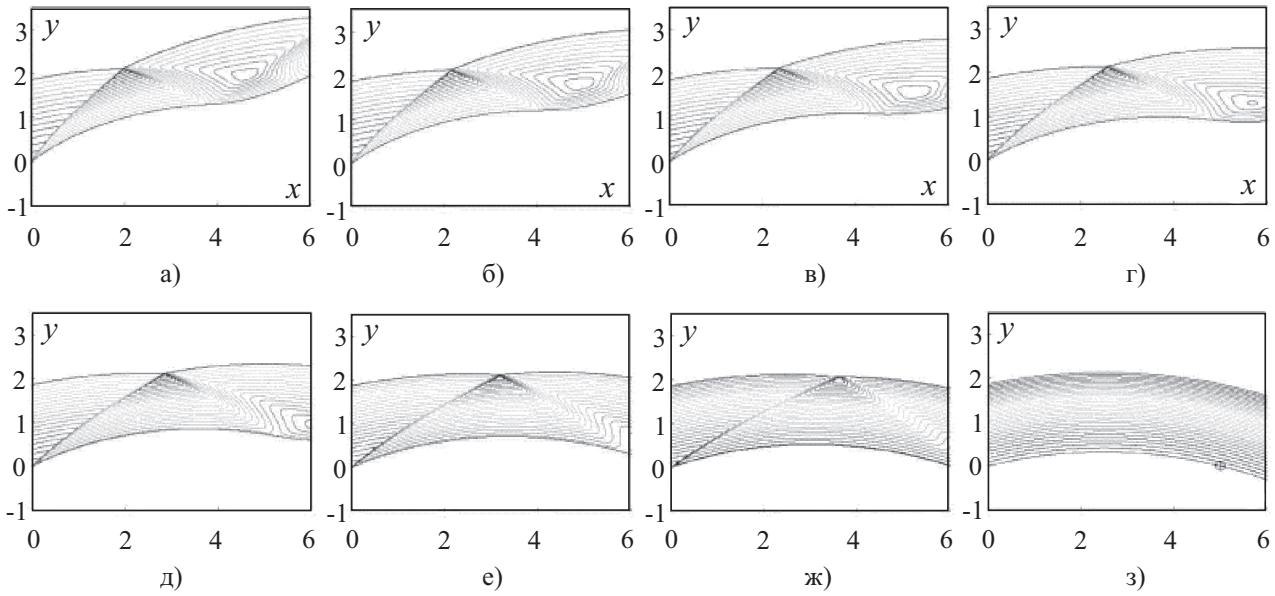


Рис. 14. Линии уровня плотности в струе свободного вихря при различных степенях нерасчетности

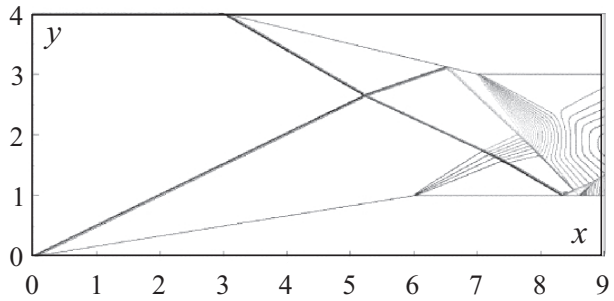


Рис. 15. Линии уровня плотности при затекании расчетной струи в диффузор

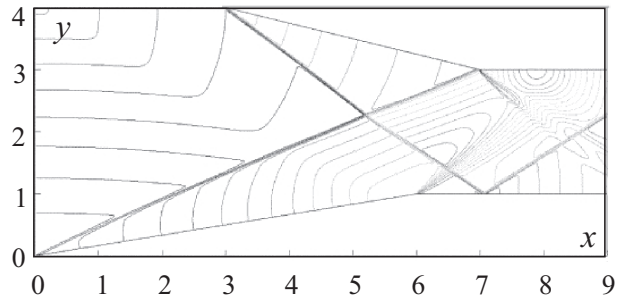


Рис. 16. Линии уровня плотности при затекании струи свободного вихря в диффузор

Сопла для окон этого типа создают на срезе свободный вихрь, параметры которого определяются соотношением давлений в разделяемых окном средах и параметрами рабочего газа окна. Вдоль образующих сопел на свободном вихре отсутствуют зоны возрастания статического давления, которые приводят к отрыву или утолщению пограничного слоя. Построение контура сопла является одной из основных проблем, которые требуют решения при конструировании аэродинамических окон на свободном вихре. Решение задачи начинается с определения условий в потоке на выходе из сопла, на основании которых строится его контур.

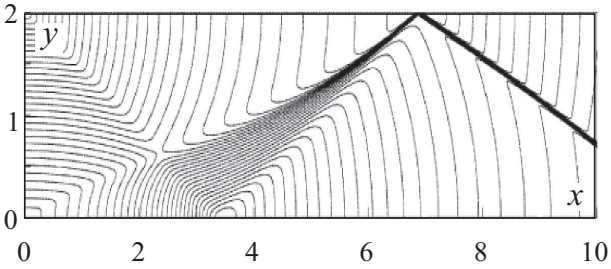


Рис. 17. Линии уровня плотности при затекании струи свободного вихря в параллельный канал

В качестве исходных данных задачи используются: вид рабочего газа (γ — показатель адиабаты, μ — молярная масса); температура и давление торможения (параметры газа в ресивере, T_0, p_0); статические давления в разделяемых средах (p_1, p_2); геометрические характеристики аэродинамического окна (ширина окна d, угол δ). Рабочий газ принимается идеальным и сжимаемым (воздух). Некоторые пояснения геометрических параметров приводятся на рис. 1.

Задача состоит в проектировании сопла, которое обеспечивает на срезе требуемое распределение числа Маха M и параметра $\zeta = v/u$, равного отношению скоростей в координатных направлениях x и y. Для решения задачи делается два шага.

Шаг 1. Для свободного вихря число Маха и отношение скоростей описываются зависимостями

$\mathrm{M} = \left[\dfrac{2}{\gamma-1}\,\dfrac{1}{(r/r_\infty)^2-1}\right]^{1/2}$, $\zeta = \dfrac{d}{2\left(r^2-d^2/4\right)^{1/2}}$, где $r \in [r_1, r_2]$. Внутренний и внешний радиусы вихря r_1 и r_2 определяются по формулам $r_1 = \dfrac{d}{2\sin(\delta/2)}$, $r_2 = r_\infty\left[1+\dfrac{2}{(\gamma-1)\mathrm{M}_2^2}\right]^{1/2}$. Предельный радиус вихря r_∞ находится из соотношения $\dfrac{r_1}{r_\infty} = \left[1+\dfrac{2}{(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}\right]^{1/2}$. Числа Маха M_1 и M_2 вычисляются с помощью газодинамических функций для давления в изэнтропийном потоке:

$$\mathrm{M}_1^2 = \frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-(\gamma-1)/\gamma} - 1\right], \quad \mathrm{M}_2^2 = \frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{-(\gamma-1)/\gamma} - 1\right].$$

Сопло строится по схеме, приведенной на рис. 18, где $\xi \in [0,1]$. Сопло состоит из двух участков. Участок $A_1A_2B_2B_1$, расположенный в непосредственной близости от критического сечения, является симметричным. Его форма принимается из условия гладкости и обеспечения требуемой технологической простоты. Для построения контура этого участка используются дуги окружностей, центры которых лежат на прямой, проходящей через входное сечение. На входном участке поток разгоняется до малых сверхзвуковых скоростей. Для построения контура другого участка $A_2A_5B_5B_2$ применяются кривые Безье. Нижний контур строится по точкам A_2, A_3, A_4 и A_5, а верхний — по точкам B_2, B_3, B_4 и B_5. На этом участке формируется требуемое распределение параметров потока в выходном сечении.

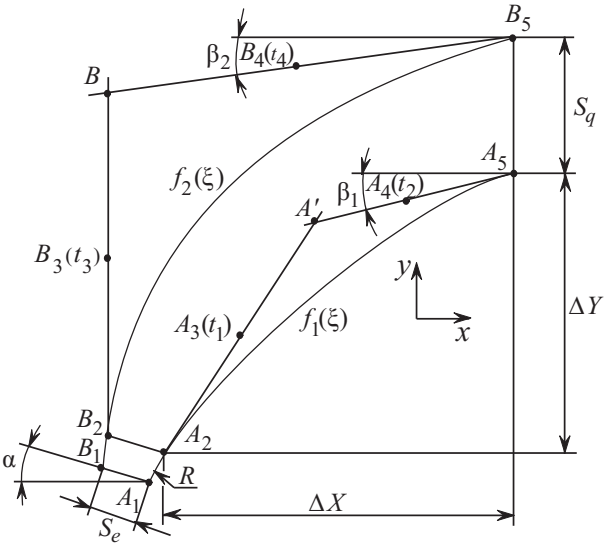


Рис. 18. Схема проектирования сопла

Шаг 2. Необходимый при построении сопла размер выходного сечения определяется по формуле, следующей из геометрических соображений:

$$S_q = \left(r_2^2 - \frac{d^2}{4}\right)^{1/2} - \left(r_1^2 - \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Размер входного сечения S_e находится из расходного соотношения, представляющего собой равенство расходов через критическое сечение сопла и через его выходное сечение:

$$S_e = \int_0^{S_q} \frac{q(\mathrm{M})}{\left(\zeta^2+1\right)^{1/2}}\,ds, \quad \text{где} \quad q(\mathrm{M}) = \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\,\mathrm{M}^2\right)^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}\mathrm{M}.$$

Учитывая, что вблизи стенки скорость потока направлена по касательной к этой стенке, для углов β_1 и β_2 получим $\beta_1 = \operatorname{arctg}\left[\zeta(r_1)\right]$ и $\beta_2 = \operatorname{arctg}\left[\zeta(r_2)\right]$.

Остаются восемь неизвестных параметров, определяющих форму канала: α — угол наклона входного сечения к оси x; R — радиус дуг окружностей на первом участке сопла; ΔX, ΔY — координаты положения выходного сечения относительно точки A_2; t_1, t_2, t_3, t_4 — параметры, определяющие положение точек A_3, A_4, B_3, B_4. Целевая функция имеет вид $\sigma = \sigma(\alpha, R, \Delta X, \Delta Y, t_1, t_2, t_3, t_4)$.

Варьируя значения этих параметров, получим те или иные характеристики потока на срезе сопла. Степень рассогласования характеристик потока с требуемыми значениями определяет величина

$$\sigma = \sum\left[\psi\left(\frac{\Delta\mathrm{M}_i}{\Delta\mathrm{M}_{\max}}\right)^2 + (1-\psi)\left(\frac{\Delta\zeta_i}{\Delta\zeta_{\max}}\right)^2\right], \quad \text{где} \quad \psi \in (0,1).$$

Задача состоит в поиске значений параметров α, R, ΔX, ΔY, t_1, t_2, t_3, t_4, при которых величина σ принимает минимальное значение ($\sigma \to 0$). Проектирование контура сопла сводится к задаче параметрической оптимизации, для решения которой используется метод градиентного поиска. Необходимые для расчетов производные находятся из решения газодинамических задач с базовыми и приращенными значениями.

Расчет течения в сверхзвуковом канале осуществляется с помощью маршевого метода, основанного на методе конечных объемов с вычислением потоков по схеме распада разрыва [21]. Во входном сечении число Маха принимается близким к единице (M = 1.005). При этом задаются следующие исходные данные: $p_1 = 5 \times 10^3$ Па, $p_2 = 10^5$ Па, $p_0 = 10^6$ Па, $T_0 = 300$ K, $d = 40$ мм, $\delta = 5.768°$. В качестве рабочего газа используется воздух ($\gamma = 1.4$, $\mu = 0.029$ кг/моль).

Исходное сопло и распределение числа Маха в его выходном сечении показывает рис. 19. Сплошная и штрихпунктирная линии соответствуют требуемому распределению числа Маха и распределению числа Маха в начале оптимизации сопла. Максимальное расхождение расчетного и требуемого чисел Маха составляет $\Delta M = 1.135$. Сопло формирует струю, представленную на рис. 20.

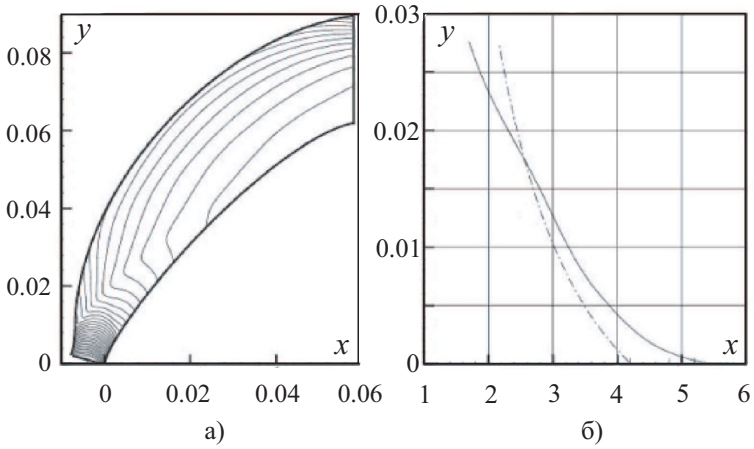


Рис. 19. Линии уровня плотности (а) и распределения числа Маха (б) в канале, взятом в качестве первого приближения

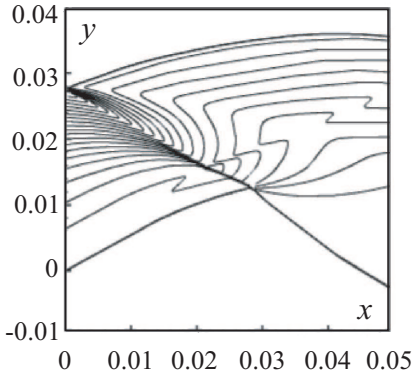


Рис. 20. Линии уровня плотности в струе, сформированной каналом, взятым в качестве первого приближения

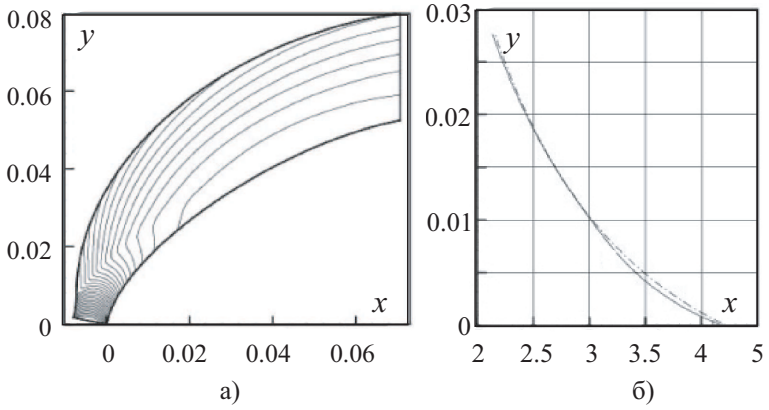


Рис. 21. Линии уровня плотности (а) и распределения числа Маха (б) в канале в процессе оптимизации

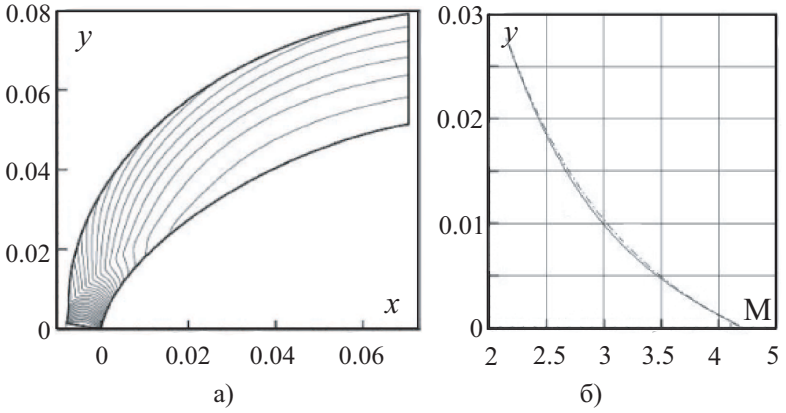


Рис. 22. Линии уровня плотности (а) и распределения числа Маха (б) в канале, полученные в результате оптимизационного поиска

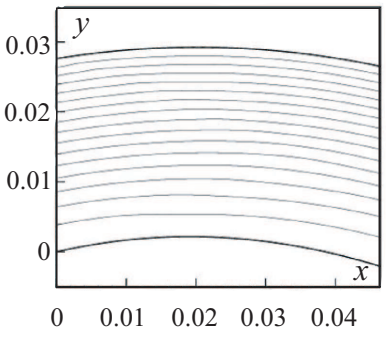


Рис. 23. Линии уровня плотности в струе, сформированной спроектированным каналом

Для получения приемлемых результатов по оптимизации сопла требуется около одного часа процессорного времени на персональном компьютере. При этом максимальное расхождение расчетного и требуемого чисел Маха сокращается до $\Delta M = 0.086$ (рис. 21).

Длительность всего процесса нахождения оптимального решения составляет около 7 часов процессорного времени на персональном компьютере. Окончательный результат представлен на рис. 22 (при этом $\Delta M = 0.036$). Линии уровня плотности в струе, сформированной спроектированным соплом, показаны на рис. 23.

6. Заключение. Разработаны средства численного моделирования стационарных сверхзвуковых течений идеального сжимаемого газа в соплах и струях, характерных для аэродинамических окон газовых лазеров. Проведен расчетный анализ стационарных сверхзвуковых плоских струй с равномерным профилем скорости на срезе сопла и изучен случай, когда разным границам струи отвечают различные наружные давления (различные степени нерасчетности). Разработан метод проектирования каналов на основе решения последовательности прямых задач. Проведено профилирование каналов, формирующих свободный вихрь в выходном сечении сопла, для использования в аэродинамических окнах газовых лазеров.

Предложенная схема профилирования каналов, имеющих заданные распределения параметров, позволяет решать задачи аэродинамического проектирования сопловых устройств, формирующих потоки с заданными свойствами. Полученные результаты позволяют сделать вывод о перспективности данного подхода для проектирования каналов с заданными газодинамическими характеристиками, соответствующими аэродинамическим окнам напорного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борейшо А.С.* Мощные мобильные химические лазеры // Квантовая электроника. 2005. **35**, № 5. 393–406.
2. *Parmentier E.M.* Supersonic flow aerodynamic windows for high power lasers // AIAA Paper. 1972. N 72-710.
3. *Parmetier E.M., Greenberg R.A.* Supersonic flow aerodynamic windows for high-power lasers // AIAA Journal. 1973. **11**, N 7. 943–949.
4. *Ефремов Н.М., Тихонов Б.А.* Экспериментальное исследование газодинамических окон газовых лазеров // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 2. 192–196.
5. *Behrens H.W., Shwartz J., Kulkarny V.A.* Beam quality of continuous and pulsed axial aerodynamic windows // Proceedings of SPIE. 1982. **343** (doi: 10.1117/12.933733).
6. *Хайлов В.М., Шеломовский В.В.* Аэродинамическое окно с отношением разделяемых давлений более 500 // Инженерно-физический журнал. 1991. **61**, № 6. 947–952.
7. *Guile R.N., Mapes S.N., Director M.N., Coulter L.J.* Performance of a multi-element centrifugal aerowindow // AIAA Paper. 1974. N 74-227.
8. *Guile R.N., Hilding W.E.* Investigation of a free-vortex aerodynamic window // AIAA Paper. 1975. N 75-122.
9. *Шеломовский В.В.* Сопла, реализующие на срезе поток свободного вихря, и особенности течения в них // Ученые записки ЦАГИ. 1982. **13**, № 1. 103–107.
10. *Гилерсон А.А., Панченко В.И., Рафиков В.Г., Сериков Р.И., Хайлов В.М.* Исследование структуры потока и газодинамических характеристик аэродинамических окон со свободным вихрем // Ученые записки ЦАГИ. 1990. **21**, № 4. 104–108.
11. *Masuda W., Yuasa M.* Experimental study of a free-vortex aerodynamic window // Journal de Physique. 1980. **41**. 423–429.
12. *Wildermuth E., Giesen A., Hűgel H.* Experimental investigations of a free-vortex aerodynamic window // Springer Proceedings in Physics. Vol. 15. Heidelberg: Springer, 1987. 96–100.
13. *Satake T., Sakai M., Watanabe T., Nakajima M., Horioka K.* Experimental investigation of supersonic free-vortex flow with large asymmetry for aerodynamic laser windows // Japanese Journal of Applied Physics. 1998. **37**, N 8. 4377–4382.
14. *Liu T., Jiang Z., Li W., Liu Z., Zhao Y.* Studies on the aero-optical phenomena of free-vortex aerodynamic window's jet // Chinese Journal of Lasers. 2002. **11**, N 6. 425–431.
15. *Zhang D., Lu F.-Y., Li X.-Y.* Numerical simulation of the overall flow and design of the free-vortex aerodynamic window // Infrared and Laser Engineering. 2005. N 6. 687–690.
16. *Волков К.Н.* Влияние турбулентности на распространение когерентного луча в пограничном слое и слое смешения // Прикладная механика и техническая физика. 2010. **51**, № 6. 63–77.
17. *Volkov K.N., Emelyanov V.N.* Large-eddy simulation of turbulence-induced aero-optic effects in free shear flows // Journal of Physics: Conference Series. 2011. **318** (doi:10.1088/1742-6596/318/4/042062).
18. *Крайко А.Н., Шеломовский В.В.* Построение и исследование плоских и осесимметричных конфигураций, создающих заданный поток. Анализ течения в соплах различных типов на их разгонном участке и в свободно расширяющейся гиперзвуковой струе // ЦИАМ. Технический отчет. 1978. № 8678.

19. *Крайко А.Н., Шеломовский В.В.* О профилировании плоских и осесимметричных сопел и каналов, реализующих заданный сверхзвуковой поток в сечении выхода // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 4. 94–102.
20. *Емельянов В.Н., Пустовалов А.В.* Среда разработки программных средств применительно к задачам численного моделирования газодинамических течений // Математические моделирование. 2003. **15**, № 6. 59–64.
21. *Карамышев В.Б.* Об одном подходе к конструированию маршевых алгоритмов решения стационарных задач газовой динамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1992. **32**, № 10. 1677–1679.
22. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012.
23. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
24. *Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Карпенко А.Г., Тетерина И.В.* Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.

Поступила в редакцию
08.11.2014

Supersonic Flows of an Inviscid Compressible Gas in Aerodynamic Windows of Gas Lasers

K. N. Volkov[1], **V. N. Emelyanov**[2], **and A. V. Pustovalov**[3]

[1] *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Power Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: dsci@mail.ru*

[2] *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Power Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: vlademelyanov@gmail.com*

[3] *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Power Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: m4.voenmeh@gmail.com*

Received November 8, 2014

Abstract: Development of mathematical modeling tools designed for calculations of supersonic flows in aerodynamic windows of gas lasers is considered. Numerical simulation of steady-state supersonic flows of an ideal compressible gas in curvilinear channels and nozzles with various pressure differences is performed on the basis of a finite volume method and a marching scheme. Flow patterns in supersonic jets observed with the uniform velocity distribution and a free vortex velocity distribution on the nozzle outlet section are compared. Channel designing tools are developed based on the solutions of a sequence of direct problems. The numerical results show a high efficiency of the software developed for problems related to the channel profiling and to the control of steady-state supersonic jet flows.

Keywords: aerodynamic window, supersonic flow, nozzle, jet, numerical simulation, finite volume method, marching method, Riemann problem.

References

1. A. S. Boreysho, "High-Power Mobile Chemical Lasers," Kvant. Elektron. **35** (5), 393–406 (2005) [Quant. Electron. **35** (5), 393–406 (2005)].

2. E. M. Parmentier, "Supersonic Flow Aerodynamic Windows for High Power Lasers," AIAA Paper No. 72-710 (1972).

3. E. M. Parmentier and R.A. Greenberg, "Supersonic Flow Aerodynamic Windows for High Power Lasers," AIAA J. **11** (7), 943–949 (1973).

4. N. M. Efremov and B. A. Tikhonov, "An Experimental Study of Gasdynamic Windows for Gas Lasers," Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza, No. 2, 192–196 (1977) [Fluid Dyn. **12** (2), 329–332 (1977)].

5. H. W. Behrens, J. Shwartz, and V. A. Kulkarny, "Beam Quality of Continuous and Pulsed Axial Aerodynamic Windows," Proc. SPIE **343** (1982). doi: 10.1117/12.933733

6. V. M. Khailov and V. V. Shelomovskii, "Aerodynamic Window with a Pressure Separation Ratio Greater Than 500," Inzh.-Fiz. Zh. **61** (6), 947–952 (1991) [J. Eng. Phys. **61** (6), 1492–1496 (1991)].

7. R. N. Guile, S. N. Mapes, N. M. Director, and L. J. Coulter, "Performance of a Multi-Element Centrifugal Aerowindow," AIAA Paper No. 74-227 (1974).

8. R. N. Guile and W. E. Hilding, "Investigation of a Free-Vortex Aerodynamic Window," AIAA Paper No. 75-122 (1975).

9. V. V. Shelomovskii, "Nozzles Producing a Free-Vortex Flow at the Exit Section and Flow Characteristics in These Nozzles," Uch. Zap. Tsentral. Aerodinam. Inst. **13** (1), 103–107 (1982).

10. A. A. Gilerson, V. I. Panchenko, V. G. Rafikov, et al., "An Investigation of the Flow Structure and Gasdynamic Characteristics of Aerodynamic Windows with Free Vortices," Uch. Zap. Tsentral. Aerodinam. Inst. **21** (4), 104–108 (1990).

11. W. Masuda and M. Yuasa, "Experimental Study of a Free-Vortex Aerodynamic Window," J. Phys. Paris **41**, 423–429 (1980).

12. E. Wildermuth, A. Giesen, and H. Hügel, "Experimental Investigations of a Free-Vortex Aerodynamic Window," in *Springer Proceedings in Physics* (Springer, Heidelberg, 1987), Vol. 15, pp. 96–100.

13. T. Satake, M. Sakai, T. Watanabe, et al., "Experimental Investigation of Supersonic Free-Vortex Flow with Large Asymmetry for Aerodynamic Laser Windows," Jpn. J. Appl. Phys. **37** (8), 4377–4382 (1998).

14. T. Liu, Z. Jiang, W. Li, et al., "Studies on the Aerooptical Phenomena of Free-Vortex Aerodynamic Window's Jet," Chin. J. Lasers **11** (6), 425–431 (2002).

15. D. Zhang, F.-Y. Lu, and X.-Y. Li, "Numerical Simulation of the Overall Flow and Design of the Free-Vortex Aerodynamic Window," Infrared Laser Eng., No. 6, 687–690 (2005).

16. K. N. Volkov, "Effect of Turbulence on Propagation of a Coherent Beam in the Boundary Layer and Mixing Layer," Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **51** (6), 63–77 (2010) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **51** (6), 827–838 (2010)].

17. K. N. Volkov and V. N. Emelyanov, "Large-Eddy Simulation of Turbulence-Induced Aero-Optic Effects in Free Shear Flows," J. Phys.: Conf. Ser. **318** (2011). doi: 10.1088/1742-6596/318/4/042062

18. A. N. Kraiko and V. V. Shelomovskii, *Design and Study of Two-Dimensional and Axisymmetric Configurations Producing a Specified Flow. Analysis of Flows in Various Nozzles on Acceleration Segments and within Freely Expanding Hypersonic Jets*, Report 8678 (Baranov Central Inst. of Aircraft Engine Design, Moscow, 1978).

19. A. N. Kraiko and V. V. Shelomovskii, "On Profiling Planar and Axisymmetric Nozzles and Channels to Achieve a Given Supersonic Stream at the Exit Section," Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza, No. 4, 94–102 (1981) [Fluid Dyn. **16** (4), 564–572 (1981)].

20. V. N. Emelyanov and A. V. Pustovalov, "Object-Oriented Software for Numerical Simulation of Gasdynamic Flows," Mat. Model. **15** (6), 59–64 (2003).

21. V. B. Karamyshev, "An Approach to the Construction of Marching Algorithms for Stationary Problems of Gas Dynamics," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **32** (10), 1677–1679 (1992) [Comput. Math. Math. Phys. **32** (10), 1507–1508 (1992)].

22. K. N. Volkov and V. N. Emelyanov, *Computational Technologies in Problems of Fluid and Gas Mechanics* (Fizmatlit, Moscow, 2012) [in Russian].

23. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).

24. K. N. Volkov, Yu. N. Deryugin, V. N. Emelyanov, A. S. Kozelkov, A. G. Karpenko, and I. V. Teterina, *Methods for the Acceleration of Gas-Dynamical Calculations on Unstructured Grids* (Fizmatlit, Moscow, 2014) [in Russian].