УДК 519.62 doi 10.26089/NumMet.v16r102

О ПРИМЕНЕНИИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ТИПА ПРЕДИКТОР–КОРРЕКТОР В МЕТОДЕ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Г. В. Кривовичев[1], Е. В. Воскобойникова[2]

Построены конечно-разностные решеточные схемы Больцмана типа предиктор–корректор. Рассмотрены подход с раздельной аппроксимацией пространственных производных в конвективных членах кинетических уравнений и подход, когда эти члены заменяются одной конечной разностью. На обоих этапах процесса вычислений на одном шаге используются явные разностные схемы. При решении задачи о течении в каверне и задачи о вихрях Тейлора в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса показано, что построенные схемы позволяют проводить расчеты с бо́льшим значением шага по времени, чем некоторые другие известные схемы.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, кинетические уравнения, предиктор–корректор, задача о течении в каверне, вихри Тейлора.

1. Введение. В последние два десятилетия метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее метод LBM) широко используется при моделировании течений жидкости и газа [1–6]. Особенно успешно метод применяется в задачах о моделировании течений многофазных сред [7–10], течений в пористых средах [11] и течений со свободными поверхностями [12]. Популярность метода во многом связана с широкими возможностями для распараллеливания его алгоритма [13–16] и удобством его практической реализации на многопроцессорных системах с графическими процессорами [13, 15–17].

Метод LBM является альтернативой подходам, основанным на дискретизации уравнений гидродинамики. Ключевая особенность метода заключается в том, что для моделирования течений используется система разностных кинетических уравнений, носящих название решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann equations, LBE).

Недостатком метода LBM является следующее обстоятельство: число Куранта для LBE-уравнений постоянно и равно единице, а это задает жесткую связь значений шагов по времени и пространственным переменным, что влияет на устойчивость метода [1]. Для возможности варьирования числа Куранта в литературе предложены конечно-разностные решеточные схемы Больцмана (finite-difference-based lattice Boltzmann schemes) [18–20]. Кроме того, эти схемы позволяют использовать неравномерные и адаптивные сетки.

В настоящей статье продолжены исследования, начатые в [21–23]. Рассматриваются двухслойные конечно-разностные схемы типа предиктор–корректор. При решении тестовых задач сравниваются схемы с различными подходами к аппроксимации конвективных членов в системе кинетических уравнений. Показано, что схемы с единой аппроксимацией конвективных членов позволяют выполнять расчеты с бо́льшим шагом по времени.

2. Конечно-разностные решеточные схемы Больцмана типа предиктор–корректор. В методе LBM движущаяся среда моделируется ансамблем псевдочастиц с заданными скоростями. Пространственная область, в которой происходит течение, разбивается структурированной сеткой, что задает в ней так называемую решетку (lattice). За шаг по времени δt псевдочастицы переходят между узлами решетки. Взаимодействие (абсолютно упругое соударение) может осуществляться только в узлах решетки.

В дальнейшем будет рассматриваться только случай плоского изотермического течения вязкой ньютоновской жидкости и решетка с ячейками квадратной формы, построенная с шагом l по обеим декартовым координатам. В этом случае удобно использовать набор скоростей $D2Q9$: $\boldsymbol{V}_i = V\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, 9$, где

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; доцент, e-mail: gera1983k@bk.ru

[2] Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; студент, e-mail: elen.voskoboinikova@gmail.com

$V = l/\delta t$, а $\boldsymbol{v}_i$ задаются следующим образом:

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{v}_1 = (0,0), & \boldsymbol{v}_2 = (1,0), & \boldsymbol{v}_3 = (0,1), \\ \boldsymbol{v}_4 = (-1,0), & \boldsymbol{v}_5 = (0,-1), & \boldsymbol{v}_6 = (1,1), \\ \boldsymbol{v}_7 = (-1,1), & \boldsymbol{v}_8 = (-1,-1), & \boldsymbol{v}_9 = (1,-1). \end{array}$$

Система кинетических уравнений, описывающая динамику псевдочастиц на решетке, в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\tau}\left(f_i - f_i^{(\mathrm{eq})}\right), \tag{1}$$

где t — безразмерное время (время, нормированное на δt); x и y — безразмерные пространственные переменные (декартовы координаты, нормированные на l); f_i — безразмерные функции распределения; $f_i^{(\mathrm{eq})}$ — функции, аппроксимирующие равновесные безразмерные функции распределения; τ — безразмерное время релаксации. Система (1) получена посредством аппроксимации уравнения Больцмана с релаксационным столкновительным членом Бхатнагара–Гросса–Крука [24] в пространстве скоростей.

Рассмотрим построение схемы типа предиктор–корректор, основанной на раздельной аппроксимации производных по x и y. Для удобства перепишем систему (1) в векторной форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{f})}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{f})}{\partial y} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{f}), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_9)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ — линейные векторные функции от $\boldsymbol{f}$: $F_i = v_{ix} f_i$ и $G_i = v_{iy} f_i$; $\boldsymbol{S}_i$ — нелинейные векторные функции от $\boldsymbol{f}$ (нелинейность возникает из-за соответствующей зависимости $f_i^{(\mathrm{eq})}$ от $\boldsymbol{f}$ [1, 2]).

Рассмотрим равномерную сетку, построенную с шагом h по x и по y и с шагом Δt по t. Для построения схемы, реализующей этап предиктора, аппроксимируем все входящие в (2) производные в узле $(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})$, где $\boldsymbol{r}_{jk} = (x_j, y_k)$ с помощью правых разностных производных:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})}{\partial t} \approx \frac{\boldsymbol{f}_{jk}^{n+1} - \boldsymbol{f}_{jk}^{n}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{F}(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})}{\partial x} \approx \frac{\boldsymbol{F}_{j+1,k}^{n} - \boldsymbol{F}_{jk}^{n}}{h}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{G}(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})}{\partial y} \approx \frac{\boldsymbol{G}_{j,k+1}^{n} - \boldsymbol{G}_{jk}^{n}}{h}.$$

Соответствующая разностная схема примет вид

$$\boldsymbol{f}_{jk}^{n+1} = \boldsymbol{f}_{jk}^{n} - \frac{\Delta t}{h}\left(\boldsymbol{F}_{j+1,k}^{n} - \boldsymbol{F}_{jk}^{n}\right) - \frac{\Delta t}{h}\left(\boldsymbol{G}_{j,k+1}^{n} - \boldsymbol{G}_{jk}^{n}\right) + \Delta t \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{f}_{jk}^{n}\right). \tag{3}$$

Полученное по (3) решение будем обозначать через $\widetilde{\boldsymbol{f}}_{jk}^{\,n}$ и рассматривать как предварительное, требующее дальнейшей коррекции.

Для получения схемы, реализующей этап корректора, аппроксимируем в узле $(t_{n+1/2}, \boldsymbol{r}_{jk})$ производную по t тоже с помощью правой разностной производной, но с использованием полуцелого шага $\Delta t/2$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(t_{n+1/2}, \boldsymbol{r}_{jk})}{\partial t} \approx \frac{\boldsymbol{f}_{jk}^{n+1} - \boldsymbol{f}_{jk}^{n+1/2}}{\Delta t/2}.$$

Производные по пространственным координатам аппроксимируем с помощью левых разностных производных:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(t_{n+1/2}, \boldsymbol{r}_{jk})}{\partial x} \approx \frac{\boldsymbol{F}_{jk}^{n+1/2} - \boldsymbol{F}_{j-1k}^{n+1/2}}{h}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{G}(t_{n+1/2}, \boldsymbol{r}_{jk})}{\partial y} \approx \frac{\boldsymbol{G}_{jk}^{n+1/2} - \boldsymbol{G}_{jk-1}^{n+1/2}}{h}.$$

Получим разностную схему

$$\boldsymbol{f}_{jk}^{n+1} = \boldsymbol{f}_{jk}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2h}\left(\boldsymbol{F}_{jk}^{n+1/2} - \boldsymbol{F}_{j-1,k}^{n+1/2}\right) - \frac{\Delta t}{2h}\left(\boldsymbol{G}_{jk}^{n+1/2} - \boldsymbol{F}_{j,k-1}^{n+1/2}\right) + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{f}_{jk}^{n+1/2}\right), \tag{4}$$

на основе которой построим схему, реализуемую на этапе корректора. Для этого представим решение в узле $(t_{n+1/2}, \boldsymbol{r}_{jk})$ следующим образом:

$$\boldsymbol{f}_{jk}^{n+1/2} \approx \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{f}_{jk}^{n} + \boldsymbol{f}_{jk}^{n+1}\right). \tag{5}$$

Предположим, что верны следующие приближенные равенства:

$$\boldsymbol{F}_{jk}^{n+1/2} \approx \boldsymbol{F}_{jk}^{n+1}, \quad \boldsymbol{G}_{jk}^{n+1/2} \approx \boldsymbol{G}_{jk}^{n+1}, \quad \boldsymbol{S}_{jk}^{n+1/2} \approx \boldsymbol{S}_{jk}^{n+1}. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим схему без значений в узле $(t_{n+1/2}, \boldsymbol{r}_{jk})$, которая уже будет неявной. Для того чтобы избежать использования неявных схем, полученное по (3) на этапе предиктора решение $\widetilde{\boldsymbol{f}}_{jk}^{\,n+1}$ подставим в правую часть разностной схемы. В итоге получим схему, используемую на этапе корректора:

$$\boldsymbol{f}_{jk}^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{f}_{jk}^{n} + \widetilde{\boldsymbol{f}}_{jk}^{\,n}\right) - \frac{\Delta t}{2h}\left(\widetilde{\boldsymbol{F}}_{jk}^{\,n+1} - \widetilde{\boldsymbol{F}}_{j-1,k}^{\,n+1}\right) - \frac{\Delta t}{2h}\left(\widetilde{\boldsymbol{G}}_{jk}^{\,n+1} - \widetilde{\boldsymbol{G}}_{j,k-1}^{\,n+1}\right) + \frac{\Delta t}{2}\,\widetilde{\boldsymbol{S}}_{jk}^{\,n+1},$$

где $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}(\widetilde{\boldsymbol{f}})$, $\widetilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{G}(\widetilde{\boldsymbol{f}})$, $\widetilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}(\widetilde{\boldsymbol{f}})$.

Перепишем построенную схему в применении к системе (1). Этап предиктора:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) = f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) - \frac{\Delta t}{h}\, v_{ix}\big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{j+1k}) - f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})\big) - \\ - \frac{\Delta t}{h}\, v_{iy}\big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk+1}) - f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})\big) - \frac{\Delta t}{\tau}\Big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) - f_i^{(\mathrm{eq})}\big(\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})\big)\Big).\end{aligned} \tag{7}$$

Этап корректора:

$$\begin{aligned}f_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) = \frac{1}{2}\Big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) + \widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk})\Big) - \frac{\Delta t}{2h}\, v_{ix}\Big(\widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) - \widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{j-1k})\Big) - \\ - \frac{\Delta t}{2h}\, v_{iy}\Big(\widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) - \widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk-1})\Big) - \frac{\Delta t}{2\tau}\bigg(\widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) - f_i^{(\mathrm{eq})}\Big(\widetilde{\boldsymbol{f}}(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk})\Big)\bigg).\end{aligned} \tag{8}$$

Построенную двухэтапную схему (7)–(8) в дальнейшем будем называть схемой ПК1.

В работах [19, 22, 23] представлены конечно-разностные схемы, основанные не на раздельной аппроксимации пространственных производных, как это было проделано выше, а посредством аппроксимации члена $\boldsymbol{v}_i \nabla f_i$ с помощью одного разностного выражения. Рассмотрим схему типа предиктор–корректор, использующую следующие приближенные представления на этапах предиктора и корректора соответственно:

$$\boldsymbol{v}_i \nabla f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) \approx \frac{1}{h}\big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk} + \boldsymbol{v}_i h) - f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})\big),$$

$$\boldsymbol{v}_i \nabla f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) \approx \frac{1}{h}\big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) - f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk} - \boldsymbol{v}_i h)\big).$$

Все остальные действия при построении разностной схемы аналогичны тем, что проводились при построении схемы ПК1.

Таким образом, получим следующую двухэтапную схему, аппроксимирующую систему (1). Этап предиктора:

$$\widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) = f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) - \frac{\Delta t}{h}\big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk} + \boldsymbol{v}_i h) - f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})\big) - \frac{\Delta t}{\tau}\Big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) - f_i^{(\mathrm{eq})}\big(\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{r}_{jk})\big)\Big). \tag{9}$$

Этап корректора:

$$\begin{aligned}f_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) = \frac{1}{2}\Big(f_i(t_n, \boldsymbol{r}_{jk}) + \widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk})\Big) - \\ - \frac{\Delta t}{2h}\Big(\widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) - \widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk} - \boldsymbol{v}_i h)\Big) - \frac{\Delta t}{2\tau}\bigg(\widetilde{f}_i(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk}) - f_i^{(\mathrm{eq})}\Big(\widetilde{\boldsymbol{f}}(t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{jk})\Big)\bigg).\end{aligned} \tag{10}$$

Разностную схему (9)–(10) в дальнейшем будем называть схемой ПК2.

Можно показать, что схемы ПК1 и ПК2 аппроксимируют систему (1) со вторым порядком по Δt и по h в сеточной норме C. С использованием метода Чепмена–Энскога [19] ранее было показано, что выражения для схемной вязкости схем ПК1 и ПК2 в точности совпадают с выражением для кинематической вязкости, получаемом при применении этого метода к системе (1).

Возможности применения построенных схем к решению практических задач продемонстрированы при решении двух известных тестовых задач вычислительной гидродинамики — задачи о течении в каверне и задачи о вихрях Тейлора.

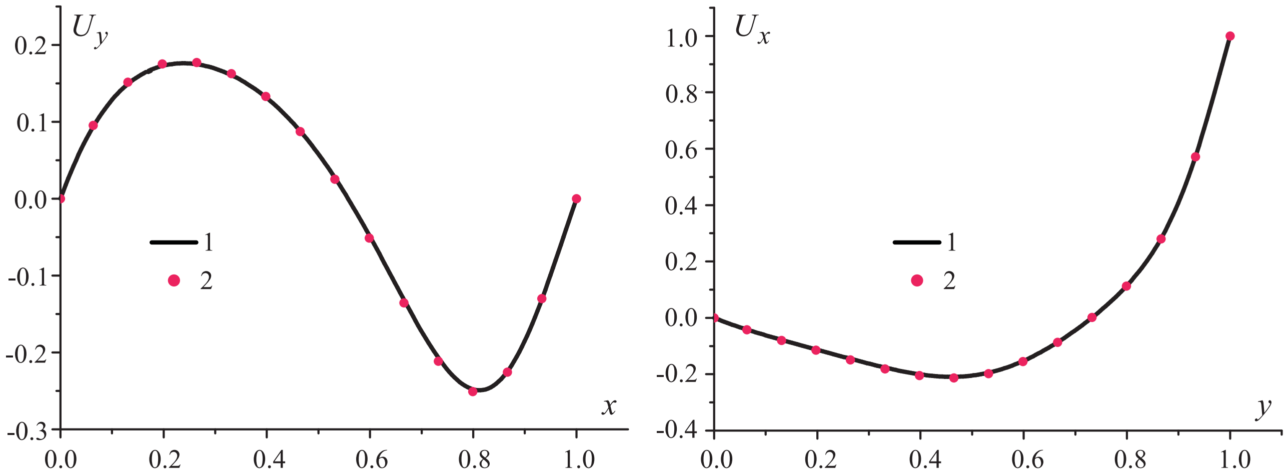

Рис. 1. Компоненты вектора скорости для задачи о течении в каверне при Re = 100:
1) результаты расчета по схеме ПК2; 2) результаты из [26]

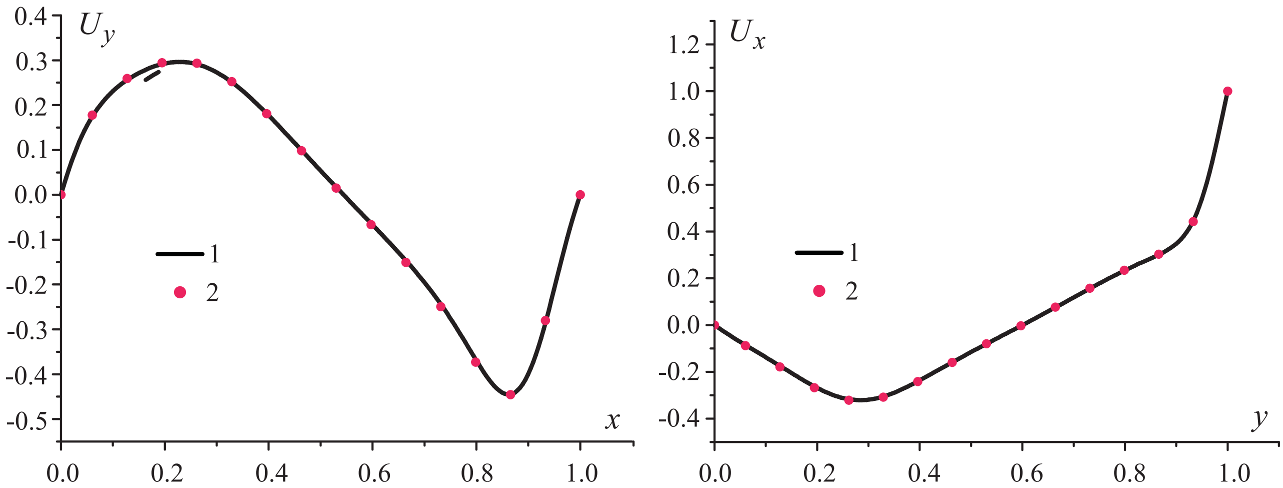

Рис. 2. Компоненты вектора скорости для задачи о течении в каверне при Re = 400:
1) результаты расчета по схеме ПК2; 2) результаты из [26]

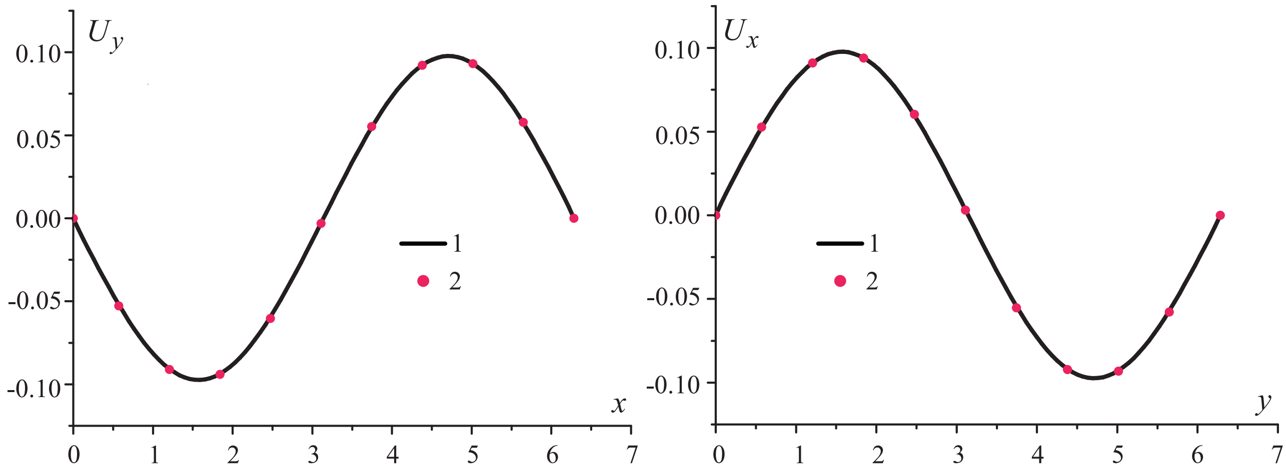

Рис. 3. Компоненты вектора скорости для задачи о вихрях Тейлора при Re = 100:
1) результаты расчета по схеме ПК2; 2) значения аналитического решения

3. Решение тестовых задач. При проведении численных расчетов проводилось сравнение схем ПК1 и ПК2 друг с другом, а также с двухслойными схемами с направленными разностями первого и второго порядков с раздельной аппроксимацией пространственных производных, исследованных в [21].

Эти схемы в дальнейшем будем называть схемами НР1 и НР2 соответственно. Для задания граничных условий первого рода на компоненты вектора скорости среды $\boldsymbol{u}$ использовался подход, предложенный в [25]. Для проведения расчетов были написаны программы на языке C++. Для расчетов в реализованных программах использовались числа двойной точности.

Сравнение схем проводилось с использованием значения параметра Куранта $\gamma = V\Delta t/h$ (в безразмерных переменных V имеет единичное значение). При сравнении схем по значению параметра Куранта при разных значениях числа Рейнольдса Re подбиралось наибольшее значение γ, при которых не развивались численные неустойчивости. Расчеты проводились при следующих значениях Re: 50, 100, 200, 300, 400. При фиксированном Re схему можно считать тем экономичнее, чем больше значение γ, поскольку для расчетов можно использовать бо́льший шаг по времени.

Таблица 1

Значение γ при различных Re для задачи о течении в каверне

Re	ПК2	ПК1	НР1	НР2
50	0.514	0.442	0.398	0.221
100	0.423	0.415	0.352	0.204
200	0.312	0.306	0.269	0.177
300	0.249	0.241	0.221	0.153
400	0.206	0.204	0.187	0.135

Таблица 2

Значение γ при различных Re для задачи о вихрях Тейлора

Re	ПК2	ПК1	НР1	НР2
50	0.418	0.411	0.354	0.198
100	0.312	0.306	0.265	0.158
200	0.209	0.205	0.187	0.132
300	0.153	0.149	0.141	0.109
400	0.122	0.119	0.115	0.093

3.1. Задача о течении в каверне. Рассматривается область в форме квадрата со сторонами единичной длины. На границах ставятся условия следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&u_x(t,x,0) = u_y(t,x,0) = 0, \quad u_x(t,x,1) = U_0, \quad u_y(t,x,1) = 0, \quad x \in [0,1],\\
&u_x(t,0,y) = u_y(t,0,y) = u_x(t,1,y) = u_y(t,1,y) = 0, \quad y \in [0,1),
\end{aligned}
$$

где $U_0 = 1$.

В начальный момент времени предполагается, что жидкость внутри области покоится. Численное решение при разных значениях Re, которое рассматривалось как эталонное, бралось из работы [26]. Для расчетов использовалась пространственная равномерная сетка из 200×200 узлов. На рис. 1 и 2 представлены графики компонент вектора скорости, получающиеся при Re = 100 и Re = 400 в сравнении с эталонным решением. Графики соответствуют моменту выхода решения на стационарный режим, после которого осуществлялся останов процесса вычислений. Значения γ, подобранные для проведения расчетов, представлены в табл. 1.

Как можно видеть, значения γ для случаев схем ПК1 и ПК2 больше, чем для случаев других схем. Причем схема с единой аппроксимацией (ПК2) позволяет проводить расчеты с большим шагом по времени, что говорит о ее экономичности и устойчивости.

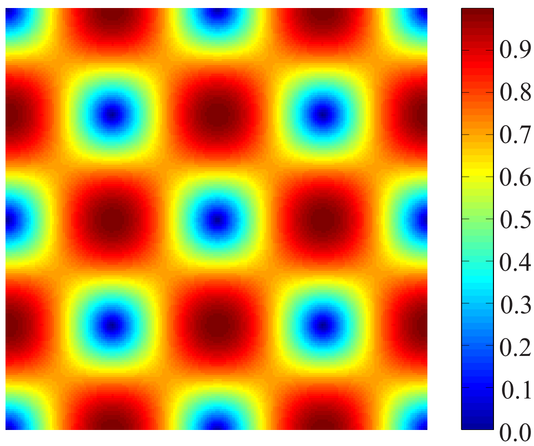

Рис. 4. График модуля вектора скорости для задачи о вихрях Тейлора при Re = 100

3.2. Задача о вихрях Тейлора. Рассматривается область в форме квадрата со стороной длины 2π. На сторонах поставлены граничные условия следующего вида:

$$
\begin{aligned}
u_x(0,y,t) &= U_0 e^{-2t/\mathrm{Re}} \sin(y), \quad u_x(2\pi,y,t) = -U_0 e^{-2t/\mathrm{Re}} \sin(y),\\
u_y(x,0,t) &= U_0 e^{-2t/\mathrm{Re}} \sin(x), \quad u_y(x,2\pi,t) = -U_0 e^{-2t/\mathrm{Re}} \sin(x).
\end{aligned}
$$

В начальный момент времени плотность считается единичной, а компоненты вектора $\boldsymbol{u}$ задаются следующим образом:

$$
u_x(x,y,0) = -U_0 \cos(x)\sin(y), \quad u_y(x,y,0) = U_0 \sin(x)\cos(y).
$$

Известно точное решение этой задачи [27]:

$$u_x(x,y,t) = -U_0 e^{-2t/\operatorname{Re}} \cos(x)\sin(y), \quad u_y(x,y,t) = -U_0 e^{-2t/\operatorname{Re}} \sin(x)\cos(y).$$

Расчеты проводились при единичном значении U_0. Использовалась сетка из 200×200 узлов. На рис. 3 представлены графики компонент вектора $\boldsymbol{u}$ в сравнении с аналитическим решением, на рис. 4 — график значений модуля вектора $\boldsymbol{u}$ на плоскости (x, y). Графики соответствуют моменту времени $t = 2$. В табл. 2 представлены значения параметра γ.

Относительно схем ПК1 и ПК2 можно сделать те же выводы, что и для случая задачи о течении в каверне.

4. Заключение. В настоящей статье построены конечно-разностные схемы типа предиктор–корректор для системы кинетических уравнений вида (1). Рассмотрены схемы с раздельной и единой аппроксимацией конвективных членов. При решении известных тестовых задач вычислительной гидродинамики показано, что схема с единой аппроксимацией позволяет производить расчеты с наибольшим значением шага по времени.

В дальнейшем планируется провести исследование устойчивости схем ПК1 и ПК2 в пространстве параметров по аналогии с работами [21–23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen S., Doolen G.D.* Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1998. **30**. 329–364.
2. *Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
3. *Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С.* Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 227–231.
4. *Евстигнеев Н.М., Магницкий Н.А.* Нелинейная динамика в начально-краевой задаче течения жидкости с уступа для гидродинамического приближения уравнений Больцмана // Дифференциальные уравнения. 2010. **46**, № 12. 1794–1798.
5. *Кривовичев Г.В.* О расчете течений вязкой жидкости методом решеточных уравнений Больцмана // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. **5**, № 2. 165–178.
6. *Кривовичев Г.В.* Модифицированный вариант метода решеточных уравнений Больцмана для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. **6**, № 3. 365–381.
7. *Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D.* The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // International Journal of Multiphase Flow. 2003. **29**, N 1. 117–169.
8. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 130–138.
9. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 384–390.
10. *Куперштох А.Л., Медвеведев Д.А., Грибанов И.И.* Моделирование тепломассопереноса в среде с фазовыми переходами методом решеточных уравнений Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**, вып. 2. 317–328.
11. *Pan C., Luo L.-S., Miller C.T.* An evaluation of lattice Boltzmann schemes for porous medium flow simulation // Computers & Fluids. 2006. **35**, N 8-9. 898–909.
12. *Zhao Z., Huang P., Li Y., Li J.* A lattice Boltzmann method for viscous free surface waves in two dimensions // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2013. **71**, N 2. 223–248.
13. *Feichtinger C., Habich J., Köstler H., Hager G., Rüde U., Wellein G.* A flexible patch-based lattice Boltzmann parallelization approach for heterogeneous GPU-CPU clusters // Parallel Computing. 2011. **37**, N 9. 536–549.
14. *Hasert M., Masilamani K., Zimny S., Klimach H., Qi J., Bernsdorf J., Roller S.* Complex fluid simulations with the parallel tree-based lattice Boltzmann solver *Musubi* // Journal of Computational Science. 2014. **5**, N 5. 784–794.
15. *Бикулов Д.А., Сенин Д.С., Демин Д.С., Дмитриев А.В., Грачев Н.Е.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 13–19.
16. *Бикулов Д.А., Сенин Д.С.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана без хранимых значений функций распределения для GPU // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 370–374.
17. *Banari A., Jansen C., Grilli S.T., Krafczyk M.* Efficient GPGPU implementation of a lattice Boltzmann model for multiphase flows with high density ratios // Computers & Fluids. 2014. **93**. 1–17.
18. *Seta T., Takahashi R.* Numerical stability analysis of FDLBM // Journal of Statistical Physics. 2002. **7**, N 1/2. 557–572.

19. *Sofonea V., Sekerka R.F.* Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // Journal of Computational Physics. 2003. **184**, N 2. 422–434.
20. *Tsutahara M.* The finite-difference lattice Boltzmann method and its application in computational aero-acoustics // Fluid Dynamics Research. 2012. **44**, N 4. 045507–045525.
21. *Кривовичев Г.В.* Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 332–340.
22. *Кривовичев Г.В.* Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 1–8.
23. *Кривовичев Г.В., Михеев С.А.* Исследование устойчивости трехслойных конечно-разностных решеточных схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**, вып. 2. 211–221.
24. *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Physical Review. 1954. **94**, N 3. 511–525.
25. *Zou Q., He X.* On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // Physics of Fluids. 1997. **9**, N 6. 1591–1598.
26. *Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High–Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // J. of Computational Physics. 1982. **48**, N 3. 387–411.
27. *Taylor G.J.* On the decay of vortices in a viscous fluid // Philosophical Magazine. 1923. **46**. 671–674.

Поступила в редакцию
20.11.2014

Application of Predictor–Corrector Finite-Difference-Based Schemes in the Lattice Boltzmann Method

G. V. Krivovichev[1] **and E. V. Voskoboinikova**[2]

[1] *Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: gera1983k@bk.ru*

[2] *Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Student, e-mail: elen.voskoboinikova@gmail.com*

Received November 20, 2014

Abstract: Predictor–corrector finite-difference-based lattice Boltzmann schemes are proposed. An approach with separate approximation of spatial derivatives in the convective terms of kinetic equations and an approach when these terms are replaced by a single finite difference are considered. Explicit finite-difference schemes are used at both the stages of the computation process. The cavity flow problem and the Taylor vortex problem are solved numerically in a wide range of the Reynolds number. It is shown that the proposed schemes allow a larger time step compared to other known schemes.

Keywords: lattice Boltzmann method, kinetic equations, predictor–corrector, cavity flow problem, Taylor vortices.

References

1. S. Chen and G. D. Doolen, "Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows," Annu. Rev. Fluid Mech. **30**, 329–364 (1998).

2. D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction* (Springer, Berlin, 2005).

3. N. E. Grachev, A. V. Dmitriev, and D. S. Senin, "Simulation of Gas Dynamics with the Lattice Boltzmann Method," Vychisl. Metody Programm. **12**, 227–231 (2011).

4. N. M. Evstigneev and N. A. Magnitskii, "Nonlinear Dynamics in the Initial-Boundary Value Problem on the Fluid Flow from a Ledge for the Hydrodynamic Approximation to the Boltzmann Equations," Differ. Uravn. **46** (12), 1794–1798 (2010) [Differ. Equ. **46** (12), 1794–1798 (2010)].

5. G. V. Krivovichev, "On the Computation of Viscous Fluid Flows by the Lattice Boltzmann Method," Kompyut. Issled. Model. **5** (2), 165–178 (2013).

6. G. V. Krivovichev, "Modification of the Lattice Boltzmann Method for the Computations of Viscid Incompressible Fluid Flows," Kompyut. Issled. Model. **6** (3), 365–381 (2014).

7. R. R. Nourgaliev, T. N. Dinh, T. G. Theofanous, and D. Joseph, “The Lattice Boltzmann Equation Method: Theoretical Interpretation, Numerics and Implications,” Int. J. Multiphase Flow **29** (1), 117–169 (2003).

8. A. L. Kupershtokh, “Three-Dimensional Simulations of Two-Phase Liquid–Vapor Systems on GPU Using the Lattice Boltzmann Method,” Vychisl. Metody Programm. **13**, 130–138 (2012).

9. A. L. Kupershtokh, “Three-Dimensional LBE Simulations on Hybrid GPU-Clusters for the Decay of a Binary Mixture of Liquid Dielectrics with a Solute Gas to a System of Gas–Vapor Channels,” Vychisl. Metody Programm. **13**, 384–390 (2012).

10. A. L. Kupershtokh, D. A. Medvedev, and I. I. Gribanov, “Modeling of Thermal Flows in a Medium with Phase Transitions Using the Lattice Boltzmann Method,” Vychisl. Metody Programm. **15** (2), 317–328 (2014).

11. C. Pan, L.-S. Luo, and C. T. Miller, “An Evaluation of Lattice Boltzmann Schemes for Porous Medium Flow Simulation,” Comput. Fluids **35** (8/9), 898–909 (2006).

12. Z. Zhao, P. Huang, Y. Li, and J. Li, “A Lattice Boltzmann Method for Viscous Free Surface Waves in Two Dimensions,” Int. J. Numer. Meth. Fluids **71** (2), 223–248 (2013).

13. C. Feichtinger, J. Habich, H. Köstler, et al., “A Flexible Patch-Based Lattice Boltzmann Parallelization Approach for Heterogeneous GPU-CPU Clusters,” Parallel Comput. **37** (9), 536–549 (2011).

14. M. Hasert, K. Masilamani, S. Zimny, et al., “Complex Fluid Simulations with the Parallel Tree-Based Lattice Boltzmann Solver *Musubi*,” J. Comput. Sci. **5** (5), 784–794 (2014).

15. D. A. Bikulov, D. S. Senin, D. S. Demin, et al., “Implementation of the Lattice Boltzmann Method on GPU Clusters,” Vychisl. Metody Programm. **13**, 13–19 (2012).

16. D. A. Bikulov and D. S. Senin, “Implementation of the Lattice Boltzmann Method without Stored Distribution Functions on GPU,” Vychisl. Metody Programm. **14**, 370–374 (2013).

17. A. Banari, C. Jansen, S. T. Grilli, and M. Krafczyk, “Efficient GPGPU Implementation of a Lattice Boltzmann Model for Multiphase Flows with High Density Ratios,” Comput. Fluids **93**, 1–17 (2014).

18. T. Seta and R. Takahashi, “Numerical Stability Analysis of FDLBM,” J. Stat. Phys. **107** (1/2), 557–572 (2002).

19. V. Sofonea and R. F. Sekerka, “Viscosity of Finite Difference Lattice Boltzmann Models,” J. Comput. Phys. **184** (2), 422–434 (2003).

20. M. Tsutahara, “The Finite-Difference Lattice Boltzmann Method and Its Application in Computational Aeroacoustics,” Fluid Dyn. Res. **44** (4), 045507–045525 (2012).

21. G. V. Krivovichev, “Investigation of the Stability of Explicit Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes,” Vychisl. Metody Programm. **13**, 332–340 (2012).

22. G. V. Krivovichev, “Stability of Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes,” Vychisl. Metody Programm. **14**, 1–8 (2013).

23. G. V. Krivovichev and S. A. Mikheev, “Stability of Three-Layer Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes,” Vychisl. Metody Programm. **15** (2), 211–221 (2014).

24. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, “A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems,” Phys. Rev. **94** (3), 511–525 (1954).

25. Q. Zou and X. He, “On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model,” Phys. Fluids **9** (6), 1591–1598 (1997).

26. U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, “High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier–Stokes Equations and a Multigrid Method,” J. Comput. Phys. **48** (3), 387–411 (1982).

27. G. J. Taylor, “On the Decay of Vortices in a Viscous Fluid,” Phil. Mag. **46**, 671–674 (1923).