

УДК 517.968; 519.612; 004.021

doi 10.26089/NumMet.v16r116

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ “УРАН”

Е. Н. Акимова¹, В. Е. Мисилов², А. Ф. Скурыдина³, А. И. Третьяков⁴

Для решения трехмерных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела слоев постоянной плотности либо намагниченности для модели многослойной среды предложен линейаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска с весовыми множителями. Построен линейаризованный метод сопряженных градиентов и его модифицированный вариант с весовыми множителями для решения задач гравиметрии и магнитометрии в многослойной среде. На основе модифицированных методов градиентного типа разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA. Для модельной задачи проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета.

Ключевые слова: обратные задачи гравиметрии и магнитометрии, параллельные алгоритмы, методы градиентного типа, многоядерные и графические процессоры.

1. Введение. Важнейшими задачами при исследовании структуры земной коры являются обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной плотности по известным скачкам плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности [1], и задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной вертикальной намагниченности по известным скачкам намагниченности и вертикальной компоненте магнитного поля, измеренной на некоторой площади земной поверхности [2]. Задачи гравиметрии и магнитометрии описываются нелинейными интегральными уравнениями Фредгольма первого рода. При разработке методов решения задач используются идеи итеративной регуляризации [3]. После дискретизации эти задачи сводятся к системам нелинейных уравнений большой размерности. Необходимость повышения точности результатов решения задач, в частности использование более мелких сеток, существенно увеличивает время вычислений.

Одним из путей уменьшения времени расчетов и повышения эффективности решения геофизических задач является распараллеливание алгоритмов и использование многопроцессорных вычислительных систем (МВС). В Институте математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург) установлен суперкомпьютер “Уран”, который успешно используется при решении прикладных задач. Суперкомпьютер “Уран” включает в себя гибридный вычислительный кластер на основе видеоускорителей GPU NVIDIA Tesla и многоядерных Intel Xeon CPU.

В настоящей статье для решения трехмерных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела слоев постоянной плотности либо намагниченности предложены линейаризованные модифицированные методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов с переменными весовыми множителями для модели нижнего полупространства в форме многослойной среды. На основе модифицированных методов градиентного типа решения задач гравиметрии и магнитометрии для многослойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA. Для модельной задачи проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета. Параллельные алгоритмы встроены в разработанную систему удаленных вычислений “Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах”.

¹ Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (УрО РАН), ул. С. Ковалевской, 16, 620990, Екатеринбург; вед. науч. сотр., д.ф.-м.н.; e-mail: aen15@yandex.ru

² Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (УрО РАН), ул. С. Ковалевской, 16, 620990, Екатеринбург; аспирант, e-mail: out.mrscreg@gmail.com

³ Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (УрО РАН), ул. С. Ковалевской, 16, 620990, Екатеринбург; вед. математик, e-mail: afinapal@gmail.com

⁴ Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (УрО РАН), ул. С. Ковалевской, 16, 620990, Екатеринбург; программист; e-mail: fr1z2rt@gmail.com

2. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред.

2.1. Обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела для модели многослойной среды. Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред по известным скачкам плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности.

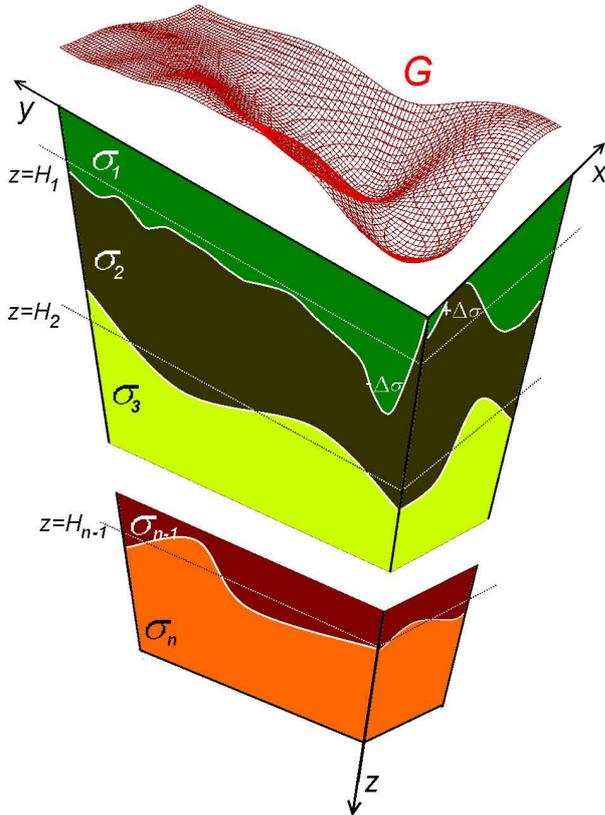


Рис. 1. Модель многослойной среды для задачи гравиметрии

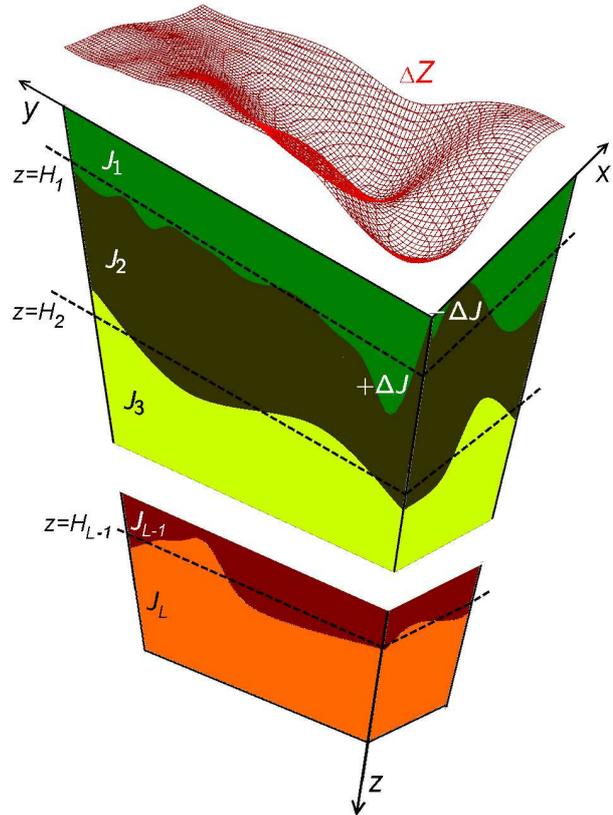


Рис. 2. Модель многослойной среды для задачи магнитометрии

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной плотности, разделенных искомыми поверхностями $S_l, l = 1, \dots, L$, где L — число границ раздела (рис. 1). Гравитационный эффект от такого полупространства равен сумме гравитационных эффектов от всех поверхностей раздела.

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями $z_l = z_l(x, y)$, скачки плотности на них равны $\Delta\sigma_l$, поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости $z_l = H_l$, т.е. $\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow \infty}} |z_l(x, y) - H_l| = 0$. Поле от суперпозиции границ с точностью до постоянного слагаемого имеет вид [4]

$$A(z) \equiv f \sum_{l=1}^L \Delta\sigma_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x,y)}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2}} \right\} dx dy = \Delta g(x', y', 0), \tag{1}$$

где f — гравитационная постоянная, L — число границ раздела, $\Delta g(x, y, 0) = \sum_{l=0}^L \Delta g_l$ — суммарное аномальное гравитационное поле, измеренное на земной поверхности.

Функции $z_l = z_l(x, y)$, описывающие искомые поверхности раздела, удовлетворяют нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода (1).

После дискретизации уравнения (1) на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta g(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора $A(z)$ по квадратурным формулам имеем вектор правой части $F(x, y)$ длиной MN , результирующий вектор решения $z = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$ длиной LMN , матрицу производной оператора $A'(z^k)^T$ размера $MN \times LMN$ и систему нелинейных уравнений

$$\tilde{A}_n[z] = \tilde{F}_n. \tag{2}$$

Задача является недоопределенной, поскольку по заданной функции $\Delta g(x, y)$ мы пытаемся найти несколько неизвестных функций $z_l = z_l(x, y)$, что влечет неединственность решения.

2.2. Обратная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела для модели многослойной среды. Рассматривается трехмерная структурная обратная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред на основе данных о магнитном поле, измеренном на некоторой площади земной поверхности, и о скачках векторов намагниченности.

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной вертикальной намагниченности $J_l = J_l^z$ ($l = 1, \dots, L$), разделенных искомыми поверхностями S_l , где L — число границ раздела (рис. 2). Магнитный эффект от такого полупространства равен сумме магнитных эффектов от всех поверхностей раздела.

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями $z_l = z_l(x, y)$, скачки модулей векторов намагниченности на них равны ΔJ_l , поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости $z_l = H_l$, т.е. $\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow \infty}} |z_l(x, y) - H_l| = 0$. Поле от суперпозиции границ с точностью до постоянного слагаемого имеет вид

$$B(z) \equiv \sum_{l=1}^L \Delta J_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{z_l(x, y)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x, y)]^{3/2}} - \frac{H_l}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2]^{3/2}} \right\} dx dy = \Delta H^z(x', y', 0), \tag{3}$$

где $\Delta H^z(x, y, 0) = \sum_{l=0}^L \Delta H_l^z$ — суммарное аномальное магнитное поле, измеренное на земной поверхности.

Функции $z_l = z_l(x, y)$, описывающие искомые поверхности раздела, удовлетворяют нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода (3).

После дискретизации уравнения (3) на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta H^z(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора $B(z)$ по квадратурным формулам имеем вектор правой части $F(x, y)$ длиной MN , результирующий вектор решения $z = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$ длиной LMN , матрицу производной оператора $B'(z^k)^T$ размера $MN \times LMN$ и систему нелинейных уравнений

$$\tilde{B}_n[z] = \tilde{F}_n. \tag{4}$$

Задача является недоопределенной, поскольку по заданной функции $\Delta H^z(x, y)$ мы пытаемся найти несколько неизвестных функций $z_l = z_l(x, y)$, что влечет неединственность решения.

3. Методы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред.

3.1. Линеаризованные методы наискорейшего спуска и минимальной ошибки с переменными весовыми множителями. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии является существенно некорректными задачами, решения которых не единственны и обладают сильной чувствительностью к погрешностям правых частей, полученной в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

В работе [5] предлагаются линеаризованные методы градиентного типа с постоянным демпфирующим множителем γ , которые можно использовать для решения задач гравиметрии и магнитометрии для модели двухслойной среды. В работах [6–8] для решения задач гравиметрии и магнитометрии для модели многослойной среды при решении систем нелинейных уравнений (2) и (4) предложены и использованы следующие линеаризованные итерационные методы градиентного типа (наискорейшего спуска и минимальной ошибки) с весовыми множителями γ_i , вычисляемыми для каждой компоненты z_i ($i = 1, \dots, LMN$):

— *линеаризованный метод наискорейшего спуска* (ЛМНС)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \gamma_i \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F); \quad (5)$$

— *линеаризованный метод минимальной ошибки* (ЛММО)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \gamma_i \frac{\|A(z_k) - F\|^2}{\|S(z^k)\|^2} S_i(z^k). \quad (6)$$

Здесь z_i — i -я компонента результирующего вектора z , k — номер итерации, ψ — демпфирующий параметр.

3.2. Линеаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска. В данной работе для решения задач гравиметрии и магнитометрии в многослойной среде предлагается линеаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска.

Модификация метода (5) состоит во внесении весовых множителей в направление линейного поиска, т.е. $S(z) = \nabla \left[\frac{1}{2} \|A(z) - y\|^2 \right]$ заменяется на $v = \Lambda S(z)$, где Λ — диагональная матрица, состоящая из весовых множителей, и в этом направлении ищется минимум суммарной невязки. Эта модификация уменьшает число итераций по сравнению с методом (5).

Получаем *линеаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска* (ЛММНС)

$$z^{k+1} = z^k - \psi \frac{v_k^T S(z^k)}{\|A'(z^k)v_k\|^2} v_k, \quad v_k = \Lambda S(z^k), \quad S(z) = A'(z)^T (A(z) - F), \quad (7)$$

где ψ — демпфирующий параметр, k — номер итерации, Λ — диагональная матрица, состоящая из весовых множителей $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{LMN}$.

3.3. Линеаризованный метод сопряженных градиентов и его модифицированный вариант. Построим линеаризованный метод сопряженных градиентов по аналогии с линеаризованными методами наискорейшего спуска и минимальной ошибки.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений $A(x) = y$ с дифференцируемым по Фреше оператором $A : R^n \rightarrow R^m$. Если решение существует, то задача его нахождения эквивалентна задаче минимизации $\min \left\{ \frac{1}{2} \|A(x) - y\|^2 : x \in R^n \right\}$. Обозначим $S(x) \equiv A'(x)^T (A(x) - y) = \nabla \left[\frac{1}{2} \|A(x) - y\|^2 \right]$.

Для решения задачи предлагается итеративный процесс вида

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad (8)$$

где $k \geq 0$ — номер итерации, $x_0 \in R^n$ — некоторое начальное приближение, α_k — размер шага.

Направления убывания p_k вычисляются по формулам

$$p_k = -A'(x)^T (A(x) - y) + \beta_k p_{k-1}, \quad p_0 = -A'(x_0)^T (A(x_0) - y),$$

где параметры β_k определяются по модифицированной формуле Полака–Рибьера–Поляка [9, 10]

$$\beta_k = \beta_k^{PRP+} = \max \{ \beta_k^{PRP}, 0 \}, \quad \beta_k^{PRP} = \frac{S(x_k)^T (S(x_k) - S(x_{k-1}))}{\|S(x_{k-1})\|^2}.$$

Такой процесс можно назвать вариантом нелинейного метода сопряженных градиентов [11].

В классических методах размер шага α_k находится решением задачи

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \|A(x_k - \alpha p_k) - y\|^2 \right\},$$

т.е. на каждой итерации необходимо решить одномерную задачу минимизации.

Вместо выполнения этой трудоемкой процедуры модифицируем процесс (8) аналогично линеаризованным градиентным методам из [12].

Линеаризуем оператор A в точке x_k : $A(x) \cong A(x_k) + A'(x_k)(x - x_k)$ и найдем размер шага α_k решением задачи минимизации для линеаризованного выражения:

$$\begin{aligned} \alpha_k &\approx \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \left\| A(x_k) + A'(x_k)(x_k + \alpha p_k - x_k) - y \right\|^2 \right\} = \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \left\| (A(x_k) - y) + \alpha A'(x_k)p_k \right\|^2 \right\} = \\ &= \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \left\| (A(x_k) - y) \right\|^2 + 2\alpha p_k^T S(x_k) + \alpha^2 \left\| A'(x_k)p_k \right\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда размер шага по направлению убывания находится по формуле $\alpha_k \approx \tilde{\alpha}_k = -\frac{p_k^T S(x_k)}{\left\| A'(x_k)p_k \right\|^2}$.

После добавления демпфирующего множителя ψ процесс (8) запишется как *линеаризованный метод сопряженных градиентов* (ЛМСГ)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \psi \frac{p_k^T S(x_k)}{\left\| A'(x_k)p_k \right\|^2} p_k, \quad p_k = S(x_k) + \beta_k p_{k-1}, \quad p_0 = S(x_0), \\ \beta_k &= \max \left\{ \frac{S(x_k)^T (S(x_k) - S(x_{k-1}))}{\left\| S(x_{k-1}) \right\|^2}, 0 \right\}, \quad S(x) = A'(x)^T (A(x) - y). \end{aligned} \tag{9}$$

Метод (9) можно использовать для решения структурных задач для моделей двухслойной среды.

Для решения задач гравиметрии и магнитометрии в многослойной среде, сводящихся к системам (2) и (4), модифицируем метод (9), добавив весовые множители γ_i в направления $S(z^k)$ аналогично (7). Таким образом, имеем *линеаризованный модифицированный метод сопряженных градиентов* (ЛММСГ)

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k - \psi \frac{p_k^T S(z^k)}{\left\| A'(z^k)p_k \right\|^2} p_k, \quad p_k = v_k + \beta_k p_{k-1}, \quad p_0 = v_0, \quad v_k = \Lambda S(z^k), \\ \beta_k &= \max \left\{ \frac{v_k^T (v_k - v_{k-1})}{\left\| v_{k-1} \right\|^2}, 0 \right\}, \quad S(z) = A'(z)^T (A(z) - y), \end{aligned} \tag{10}$$

где ψ — демпфирующий параметр, k — номер итерации, Λ — диагональная матрица, состоящая из весовых множителей $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{LMN}$.

3.4. Выбор весовых множителей. Для компенсации разномасштабности фрагментов вектора решения проведем замену переменных и будем искать не абсолютное значение $z_l(x, y)$, а относительное отклонение от асимптотической плоскости $\bar{z}_l(x, y) = z_l(x, y)/H_l - 1$. Весовые множители γ_i для каждой компоненты z_i ($i = 1, \dots, LMN$) будем выбирать следующим образом:

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow [F_1, F_2, \dots, F_L] = (f_1, f_2, \dots, f_{MN}, \dots, f_{LMN}) \longrightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{LMN}), \\ F_l &\longrightarrow (\gamma_{MN(l-1)+1}, \gamma_{MN(l-1)+2}, \dots, \gamma_{MNl}), \quad \gamma_i = \frac{|f_i|^\beta}{\max_{i,l} |f_i|^\beta}, \quad \beta > 1, \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= [\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \dots, \hat{Z}_L] = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_{MN}, \dots, \hat{z}_{LMN}) \longrightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{LMN}), \\ \hat{Z}_l &\longrightarrow (\gamma_{MN(l-1)+1}, \gamma_{MN(l-1)+2}, \dots, \gamma_{MNl}), \quad \gamma_i = \frac{|\hat{z}_i/H_i - 1|^\beta}{\max_{i,l} |\hat{z}_i/H_i - 1|^\beta}, \quad \beta > 1. \end{aligned}$$

Здесь F_l ($l = 1, \dots, L$) — аномальные поля от гравитирующих либо магнитных масс, находящихся между соответствующими глубинами H_{l-1} и H_{l+1} ($H_0 = 0, H_{L+1} = +\infty$) для искомым поверхностей раздела S_l ($l = 1, \dots, L$), выделенные из общего гравитационного $\Delta g(x, y)$ или магнитного поля $\Delta H^z(x, y)$ по методике [13], \hat{Z}_l ($l = 1, \dots, L$) — известные нулевые приближения соответствующих искомым поверхностей раздела S_l ($l = 1, \dots, L$), β — сглаживающий параметр.

В качестве начального приближения можно использовать горизонтальные асимптотические плоскости $\bar{z}^0 = 0$ либо известное нулевое приближение \hat{Z} . Условием останова итерационных процессов является

выполнение условия $\frac{\left\| A(z) - F \right\|}{\left\| F \right\|} < \varepsilon$ при достаточно малом ε , где $F = \sum_{l=1}^L F_l$.

4. Распараллеливание и численная реализация итерационных методов решения обратных задач. Параллельные алгоритмы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела сред для модели многослойной среды на основе модифицированных линейризованных градиентных методов численно реализованы на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящих в состав суперкомпьютера “Уран” (ИММ УрО РАН). Параллельные алгоритмы реализованы на многоядерном процессоре Intel с помощью технологии OpenMP, на GPU NVIDIA Tesla — с помощью технологии CUDA и библиотеки CUBLAS (NVIDIA CUDA Basic Linear Algebra Subroutines).

Алгоритмы имеют два узких места: вычисление на каждой итерации значений интегрального оператора $A(z^k)$ и матрицы производных $A'(z^k)$ и матрично-векторные операции.

Распараллеливание проводится путем разделения матрицы $A'(z^k)$ горизонтальными полосами на m блоков и вектора $A(z^k)$ на m фрагментов, таких, что $n = m \times K$, где n — размерность матрицы и векторов, m — число процессорных ядер, K — число строк матрицы и элементов вектора в блоке [14]. Основной поток исполнения (помимо исполнения своего фрагмента расчетов) занимается созданием дополнительных OpenMP-потоков и их синхронизацией. На текущей итерации каждый дополнительный поток вычисляет свой блок матрицы производных и вектора $A(z^k)$, а затем основной поток объединяет результаты.

С целью оптимизации выполнения векторно-матричных операций проведено распараллеливание и векторизация циклов с помощью технологии OpenMP и средств компилятора Intel соответственно.

При реализации на CUDA в процессе нахождения значения оператора и матрицы производных kernel-функция выполняет фрагмент вычислений, соответствующий одной точке сетки, а результаты объединяются с помощью атомарных операций [15]. Стандартные векторно-матричные операции выполняются с использованием функций библиотеки CUBLAS.

Матрица $A'(z^k)$ имеет большую размерность и занимает значительный объем оперативной памяти, поэтому оптимальным оказывается метод вычисления элементов матрицы производных “на лету”, т.е. вычисление значения элемента матрицы происходит в момент обращения к этому элементу без сохранения его в памяти.

Алгоритмы решения структурных обратных задач магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела сред встроены в разработанную систему удаленных вычислений “Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислителях” [16], установленный в отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН. В настоящее время пилотная версия веб-портала предусматривает запуск программ для решения задач гравимагнитометрии на суперкомпьютере “Уран” с указанием числа процессорных узлов или ядер (NVIDIA Tesla, Multi-Core CPU).

5. Результаты численных экспериментов. Здесь мы рассмотрим решение структурной задачи гравиметрии для трехслойной среды, разделенной двумя искомыми поверхностями на площади S , имеющей размеры $99 \times 109 \text{ км}^2$.

Суммарное гравитационное поле $\Delta g(x, y)$ на площади S находилось путем решения прямой задачи гравиметрии (1) с известными границами раздела (рис. 3):

$$\begin{aligned} z_1(x, y) &= 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6-(y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6-(y/8.63-7.435)^6} + \\ &\quad + 3.19e^{-(x/9.89-4.82)^6-(y/8.72-4.335)^6}, \\ z_2(x, y) &= 20 - 18.64e^{-(x/25.14-2.23)^2-(y/28.45-1.75)^2}. \end{aligned}$$

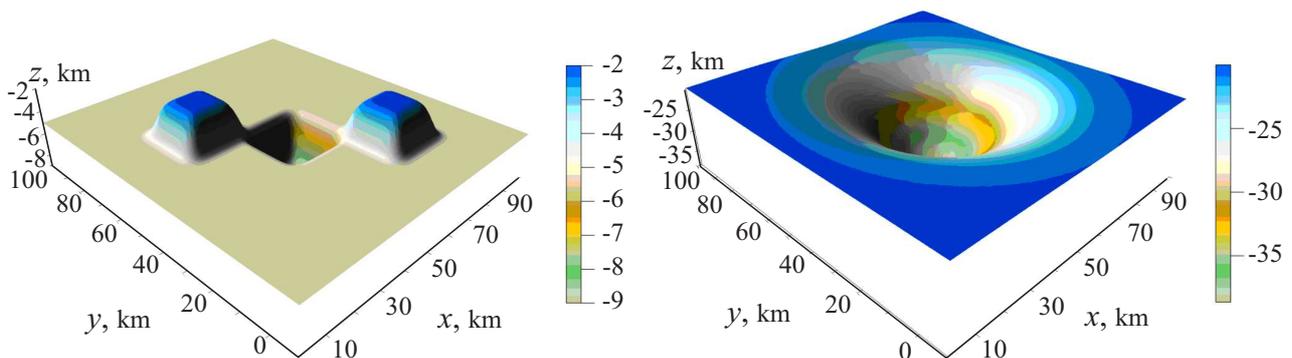


Рис. 3. Модельные границы $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$

Расстояния до асимптотических плоскостей принимались равными $H_1 = 5$ км и $H_2 = 20$ км. Скачки плотностей на границах принимались равными $\Delta\sigma_1 = 0.21$, $\Delta\sigma_2 = 0.07$ г/см³.

После дискретизации уравнения (1) на сетке 256×256 имеем вектор правой части $F(x, y)$ размерности 65 536, результирующий вектор решения $z = [z_1(x, y), z_2(x, y)]$ размерности 131 072, матрицу производной оператора $A'(z^k)^T$ размерности $65\,536 \times 131\,072$ и систему нелинейных уравнений вида (2).

На рис. 3 изображены модельные поверхности “квадратные горка и впадина” и “впадина”. На рис. 4 изображено общее аномальное гравитационное поле, порождаемое этими поверхностями.

Задача решалась тремя методами с весовыми множителями: линейризованным методом наискорейшего спуска (5), модифицированным методом наискорейшего спуска (7) и модифицированным методом сопряженных градиентов (10).

На рис. 5 приводятся приближенные решения структурной задачи гравиметрии в трехслойной среде с модельными данными.

Задача решалась на вычислительных узлах суперкомпьютера “Уран”: на многоядерном процессоре Intel Xeon с применением технологии OpenMP и на графических процессорах NVIDIA Tesla с помощью технологии CUDA. Для многоядерных процессоров проведена оптимизация выполнения векторно-матричных операций опциями компилятора ICC и векторизация циклов с помощью директивы `#pragma simd`. В результате время решения задачи уменьшилось в несколько раз.

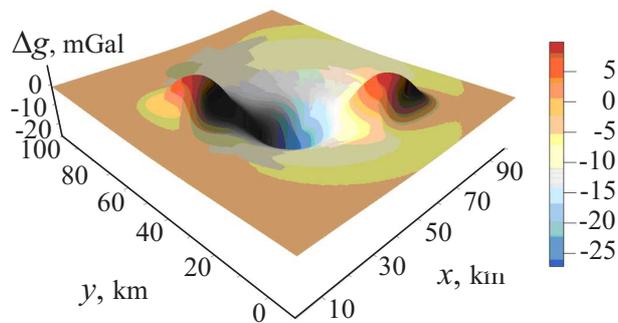


Рис. 4. Общее аномальное гравитационное поле

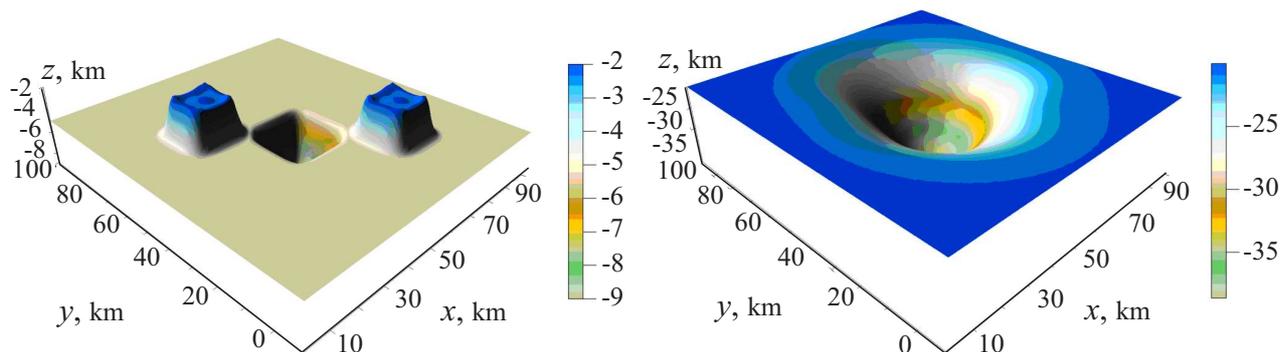


Рис. 5. Восстановленные границы $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$

Для модельной задачи гравиметрии проведено сравнение градиентных методов и параллельных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета.

В таблице представлены результаты решения задачи гравиметрии в трехслойной среде для модельных поверхностей. В первом столбце таблицы приводится метод решения задачи. При решении задачи весовые множители γ_i выбирались из нулевых приближений границ с параметром $\beta = 1.2$.

Демпфирующий параметр для модифицированных методов брался равным $\psi = 0.5$, для немодифицированного метода наискорейшего спуска $\psi = 1$. Условие останова $\varepsilon = 0.01$.

Во втором и третьем столбцах таблицы приводятся наименьшие относительные погрешности восстановленных поверхностей $\delta_i = \frac{\|z_i^T - z_i^{np}\|}{\|z_i^T\|}$, где z^T и z^{np} — точное и приближенное решения, δ_1 — относительная погрешность для $H_1 = 5$ км, δ_2 — относительная погрешность для $H_2 = 20$ км. В четвертом

Относительные погрешности и времена решения модельной задачи

Метод	δ_1	δ_2	N	T_1	T_2	T_3
ЛМНС	0.028	0.032	166	14.5 часов	113 мин.	14.4 мин.
ЛМНС	0.028	0.034	30	2.55 часа	20 мин.	3.3 мин.
ЛМНСГ	0.028	0.032	21	1.9 часа	14 мин.	2.3 мин.

столбце приводится число итераций N .

В остальных столбцах приводятся времена решения задачи: T_1 — время решения на одном ядре процессора Intel Xeon E5-2660 (2.2 ГГц), T_2 — время решения на 8 ядрах Intel Xeon, T_3 — время решения на GPU NVIDIA Tesla M2090.

Численные эксперименты, выполненные для модельной задачи, показали, что использование модифицированных методов градиентного типа по сравнению с их немодифицированными вариантами на порядок уменьшает число итераций при сравнимой относительной погрешности. Линеаризованный модифицированный метод сопряженных градиентов работает быстрее.

Распараллеливание алгоритмов при решении обратных задач гравиметрии на многоядерном процессоре Intel Xeon с оптимизацией и GPU NVIDIA Tesla уменьшает время счета. Решение задачи на 8 ядрах Intel Xeon модифицированными градиентными методами составило менее 20 минут. Решение задачи на GPU модифицированными методами — две-три минуты.

6. Заключение. Для решения трехмерных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела для модели многослойной среды предложен модифицированный метод наискорейшего спуска. Построен линеаризованный метод сопряженных градиентов и его модифицированный вариант для решения задач в многослойной среде. На основе линеаризованных модифицированных методов градиентного типа решения задач гравиметрии и магнитометрии для моделей многослойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерных процессорах и графических процессорах NVIDIA, входящих в состав суперкомпьютера “Уран”. Проведена оптимизация параллельных алгоритмов. Параллельные алгоритмы встроены в разработанную систему удаленных вычислений “Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах”. Решена модельная задача гравиметрии, проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по числу итераций и времени счета. Распараллеливание алгоритмов при решении обратных задач магнитометрии на многоядерном процессоре Intel Xeon с оптимизацией и графических процессорах NVIDIA Tesla уменьшает время счета.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАН В.В. Васину за полезные обсуждения и внимание к работе.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 15–7–1–3) и при частичной поддержке РФФИ (проект № 15–01–00629а).

Статья рекомендована к публикации Программным комитетом Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии 2015” (<http://agora.guru.ru/pavt2015/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нумеров В.В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР. 1930. № 21. 569–574.
2. Малкин Н.Р. О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности (случай пластообразно залегающих масс) // Докл. АН СССР. Сер. А. 1931. № 9. 232–235.
3. Bakushinsky A., Goncharov A. Ill-posed problems: theory and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
4. Мартышко П.С., Ладовский И.В., Цудаев А.Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика земли. 2010. № 11. 23–35.
5. Васин В.В. О сходимости методов градиентного типа для нелинейных уравнений // Докл. АН. 1998. **359**, № 1. 7–9.
6. Акимова Е.Н., Мартышко П.С., Мислов В.Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // Докл. АН. 2013. **453**, № 6. 676–679.
7. Акимова Е.Н., Васин В.В., Мислов В.Е. Алгоритмы решения обратных задач гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. 2014. **18**, № 2. 208–217.
8. Акимова Е.Н., Мислов В.Е., Скурыдина А.Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. 2014. **18**, № 4. 206–215.
9. Поляк Б.Т. Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. **9**, № 4. 807–821.
10. Gilbert J.C., Nocedal J. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization // SIAM Journal on Optimization. 1992. **2**, N 1. 21–42.
11. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.
12. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН. 2005.

13. Мартышко П.С., Пруткин И.Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. **25**, № 3. 159–168.
14. Акимова Е.Н. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000 // Вестник ННГУ. 2009. № 4. 181–189.
15. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. М.: ДМК Пресс, 2010.
16. Акимова Е.Н., Белоусов Д.В., Мисилов В.Е. Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. **16**, № 2. 107–121.

Поступила в редакцию
24.02.2015

Gradient Methods for Solving Inverse Gravimetry and Magnetometry Problems on the Uran Supercomputer

E. N. Akimova¹, V. E. Misilov², A. F. Skurydina³, and A. I. Tret'yakov⁴

¹ *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Sof'i Kovalevskoi 16, Ekaterinburg, 620990, Russia; Leading Scientist, Doctor of Phys. and Math. Sci., e-mail: aen15@yandex.ru*

² *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Sof'i Kovalevskoi 16, Ekaterinburg, 620990, Russia; Graduate Student, e-mail: out.mrscreg@gmail.com*

³ *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Sof'i Kovalevskoi 16, Ekaterinburg, 620990, Russia; Leading Mathematician, e-mail: out.mrscreg@gmail.com*

⁴ *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Sof'i Kovalevskoi 16, Ekaterinburg, 620990, Russia; Programmer, e-mail: fr1z2rt@gmail.com*

Received February 24, 2015

Abstract: A modified linearized steepest descent method with variable weight factors is proposed to solve three-dimensional structural inverse gravimetry and magnetometry problems of finding the interfaces between constant density or magnetization layers in a multilayer medium. A linearized conjugate gradient method and its modified version with weight factors for solving the gravimetry and magnetometry problems in a multilayer medium is constructed. On the basis of the modified gradient-type methods, a number of efficient parallel algorithms are numerically implemented on an Intel multi-core processor and NVIDIA GPUs. The developed parallel iterative algorithms are compared for a model problem in terms of the relative error, the number of iterations, and the execution time.

Keywords: inverse gravimetry and magnetometry problems, parallel algorithms, gradient-type methods, multi-core and graphics processors.

References

1. B. V. Numerov, "Interpretation of Gravitational Observations in the Case of One Contact Surface," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, No. 21, 569–574 (1930).
2. N. R. Malkin, "On the Solution of the Inverse Magnetic Problem for the Case of One Contact Surface (Layered Distribution of Masses)," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, No. 9, 232–235 (1931).
3. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1994).
4. P. S. Martyshko, I. V. Ladovskii, and A. G. Tsidaev, "Construction of Regional Geophysical Models Based on the Joint Interpretation of Gravity and Seismic Data," *Fiz. Zemli*, No. 11, 23–35 (2010) [*Izv. Phys. Solid Earth* **46** (11), 931–942 (2010)].
5. V. V. Vasin, "On the Convergence of Gradient-Type Methods for Nonlinear Equations," *Dokl. Akad. Nauk* **359** (1), 7–9 (1998) [*Dokl. Math.* **57** (2), 173–175 (1998)].

6. E. N. Akimova, P. S. Martyshko, and V. E. Misilov, "Algorithms for Solving the Structural Gravity Problem in a Multilayer Medium," *Dokl. Akad. Nauk* **453** (6), 676–679 (2013) [*Dokl. Earth Sci.* **453** (2), 1278–1281 (2013)].
7. E. N. Akimova, V. V. Vasin, and V. E. Misilov, "Algorithms for Solving Inverse Gravimetry Problems of Finding the Interface between Media on Multiprocessing Computer Systems," *Vestn. Ufa Aviatsion. Tekh. Univ.* **18** (2), 208–217 (2014).
8. E. N. Akimova, V. E. Misilov, and A. F. Skurydina, "Parallel Algorithms for Solving a Structural Inverse Magnetic Problem on Multiprocessing Computer Systems," *Vestn. Ufa Aviatsion. Tekh. Univ.* **18** (4), 206–215 (2014).
9. B. T. Polyak. "The Conjugate Gradient Method in Extremal Problems," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **9** (4), 807–821 (1969) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **9** (4), 94–112 (1969)].
10. J. C. Gilbert and J. Nocedal, "Global Convergence Properties of Conjugate Gradient Methods for Optimization," *SIAM J. Optim.* **2** (1), 21–42 (1992).
11. B. Kaltenbacher, A. Neubauer, and O. Scherzer, *Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems* (De Gruyter, Berlin, 2008).
12. V. V. Vasin and I. I. Eremin, *Operators and Iterative Processes of Fejér Type* (Ural Branch Russ. Acad. Sci., Ekaterinburg, 2005; De Gruyter, Berlin, 2009).
13. P. S. Martyshko and I. L. Prutkin, "Technology of Separation of Gravitational Field Sources in Depth," *Geofiz. Zh.* **25** (3), 159–168 (2003).
14. E. N. Akimova, "Parallel Solution Algorithms of Gravimetry and Magnetometry Inverse Problems on MVS-1000," *Vestn. Univ. Nizhni Novgorod*, No. 4, 181–189 (2009).
15. A. V. Boreskov and A. A. Kharlamov, *Fundamentals of CUDA Technology* (DMK Press, Moscow, 2010) [in Russian].
16. E. N. Akimova, D. V. Belousov, and V. E. Misilov, "Algorithms for Solving Inverse Geophysical Problems on Parallel Computing Systems," *Sib. Zh. Vych. Mat.* **16** (2), 107–121 (2013) [*Numer. Anal. Appl.* **6** (2), 98–110 (2013)].