

УДК 519.62

doi 10.26089/NumMet.v16r220

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА С НАПРАВЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

Г. В. Кривовичев<sup>1</sup>, С. А. Михеев<sup>2</sup>

Исследуется устойчивость трехслойных конечно-разностных решеточных схем Больцмана третьего и четвертого порядков аппроксимации по пространственным переменным. Проводится анализ устойчивости по начальным условиям с использованием линейного приближения. Для исследования используется метод Неймана. Показано, что устойчивость схем можно улучшить за счет аппроксимации конвективных членов во внутренних узлах сеточного шаблона. В этом случае удастся получать большие по площади области устойчивости, чем при аппроксимации в граничных узлах шаблона.

**Ключевые слова:** метод решеточных уравнений Больцмана, решеточные схемы Больцмана, устойчивость по начальным условиям, метод Неймана.

**1. Введение.** В последние годы метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее LBM) все чаще применяется при решении самых различных задач вычислительной физики — задач механики жидкости и газа [1–8], физики пучков [9], квантовой физики [10] и в других областях науки. Популярность метода во многом связана с широкими возможностями для распараллеливания его алгоритма при реализации расчетов на графических ускорителях [11–16].

Один из основных недостатков метода LBM связан с тем, что для реализуемой разностной схемы число Куранта является постоянным и равным единице, что накладывает жесткие условия на соотношение шагов сеток по временной и пространственным переменным. Это ограничение препятствует возможности независимого варьирования значений шагов. Для исправления ситуации были предложены конечно-разностные решеточные схемы Больцмана [17–20] (finite-difference-based lattice Boltzmann schemes), позволяющие независимо варьировать шаги и производить расчеты на вложенных [21] и адаптивных [22] сетках.

Настоящая статья является продолжением исследований, начатых в [23–26]. С помощью метода Неймана исследуется устойчивость по начальным условиям трехслойных схем третьего и четвертого порядков аппроксимации по пространственным переменным.

**2. Конечно-разностные решеточные схемы Больцмана.** В рамках метода LBM движущаяся среда моделируется совокупностью псевдочастиц с заданными скоростями. Пространственная область, в которой происходит течение, разбивается сеткой с ячейками определенной формы, что задает в ней так называемую решетку. За шаг по времени  $\delta t$  частицы без взаимодействия переходят между узлами решетки, в которых осуществляется их абсолютно упругое соударение.

В настоящей работе рассматриваются только плоские изотермические течения вязкой ньютоновской несжимаемой жидкости (которая в рамках метода LBM моделируется слабо сжимаемым газом). Ограничимся рассмотрением равномерной сетки с ячейками квадратной формы, построенной с шагом  $l$  по декартовым координатам. В этом случае удобно использовать набор скоростей D2Q9:  $\mathbf{V}_i = V \mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , где  $V = l/\delta t$ , а безразмерные векторы  $\mathbf{v}_i$  задаются таким образом:  $\mathbf{v}_1 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_5 = (0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_6 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_7 = (-1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_8 = (-1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_9 = (1, -1)$ .

Динамика псевдочастиц описывается системой уравнений, полученной из кинетического уравнения Больцмана с релаксационным членом [27]. Эта система в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{(\text{eq})}), \quad (1)$$

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; доцент, e-mail: geral1983k@bk.ru

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; студент, e-mail: helps2@rambler.ru

где  $t$  — безразмерное время (время, нормированное на  $\delta t$ );  $f_i$  — безразмерные функции распределения псевдочастиц со скоростями  $\mathbf{v}_i$ ;  $f_i^{(eq)}$  — приближенные равновесные функции распределения,  $\tau$  — безразмерное время релаксации ( $\tau = \lambda/\delta t$ , где  $\lambda$  — истинное время релаксации).

Настоящая статья является продолжением статьи [25], в которой рассматривались явные трехслойные конечно-разностные схемы со специальной (модифицированной) аппроксимацией по времени. В ней также сравнивались разностные схемы, построенные посредством раздельной аппроксимации пространственных производных в членах  $\mathbf{v}_i \nabla f_i$ , и схемы с единой аппроксимацией таких членов — когда все скалярное произведение заменяется одной конечной разностью. Было показано, что схемы с такими аппроксимациями имеют большие по площади области устойчивости в пространстве параметров.

В [25] рассматривались схемы с направленными разностями только до третьего порядка аппроксимации по пространственным переменным. В настоящей работе рассматриваются схемы третьего и четвертого порядков, причем исследуются схемы, в которых члены  $\mathbf{v}_i \nabla f_i$  аппроксимируются не только в граничных, но и во внутренних узлах сеточных шаблонов.

Итак, рассматриваются сетка, построенная с шагом  $\Delta t$  по безразмерному времени и с шагом  $h$  по безразмерным пространственным переменным  $x$  и  $y$ , а также следующие разностные выражения, аппроксимирующие  $\mathbf{v}_i \nabla f_i$  в узле  $(t_j, \mathbf{r}_{kl})$ , где  $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ :

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)), \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{2h} (3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h)), \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{6h} (11f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 18f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + 9f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h) - 2f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 3\mathbf{v}_i h)), \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{12h} (25f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 48f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + 36f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h) - 16f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 3\mathbf{v}_i h) + 3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 4\mathbf{v}_i h)). \quad (5)$$

Используя метод дифференциального приближения, можно показать, что конечные разности (2)–(5) аппроксимируют соответствующий член с первым, вторым, третьим и четвертым порядком по  $h$  соответственно.

Рассмотрим еще три типа аппроксимаций  $\mathbf{v}_i \nabla f_i$  конечными разностями с третьим и четвертым порядком. В шаблонах таких сеточных операторов узел  $(t_j, \mathbf{r}_{kl})$  будет являться *внутренним* узлом шаблона, а не граничным, как в (2)–(5).

Конечная разность, аппроксимирующая  $\mathbf{v}_i \nabla f_i$  с третьим порядком, имеет вид

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{6h} (-6f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h) + 3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + 2f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i h)). \quad (6)$$

Конечные разности, аппроксимирующие с четвертым порядком, имеют вид

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{12h} (-18f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + 6f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 3\mathbf{v}_i h) + 10f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + 3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i h)), \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{12h} (-8f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h) + 8f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i h) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} + 2\mathbf{v}_i h)). \quad (8)$$

Заметим, что выражения (6)–(8) являются аналогами известных формул численного дифференцирования. Производная по времени аппроксимируется с использованием подхода, предложенного в [25], в узле  $(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})$ , где  $t_{j+1/2} = t_j + \Delta t/2$ . В этом узле выписываются и приближения вида (2)–(8). В результате получаются трехслойные явные разностные схемы, в которых для расчетов используются значения на временных слоях  $t_{j-1/2}$ ,  $t_{j+1/2}$ , и  $t_{j+1}$ . Выпишем разностную схему такого типа для случая, когда используется аппроксимация вида (6):

$$\begin{aligned} f_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = & \frac{1}{2} (f_i(t_{j-1/2}, \mathbf{r}_{kl}) + f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})) - \\ & - \frac{\Delta t}{6h} (3f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - 6f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h) + \\ & + 2f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i h)) - \frac{\Delta t}{\tau} \left( f_i(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_9)^T$ . В дальнейшем все основные выкладки будем производить именно для схемы (9), для остальных схем они являются аналогичными. Заметим, что разностные схемы с аппроксимациями вида (2)–(4) исследовались в [25].

Путем применения метода Чепмена–Энскога к дифференциальным приближениям построенных схем были получены гидродинамические уравнения и выражения для коэффициентов схемной вязкости. Полученные выражения не зависят от шагов сеток  $h$  и  $\Delta t$  и имеют вид  $\nu = \frac{\tau l^2}{3\delta t}$ . Эти формулы в точности совпадают с выражением для коэффициента кинематической вязкости, полученным для (1) (см. [18]). У построенных схем в выражении для  $\nu$  отсутствует фиктивная нефизическая добавка, характерная для обычного метода LBM, для которого  $\nu = \frac{(\tau - 1/2)l^2}{3\delta t}$ .

В дальнейшем схемы с аппроксимациями вида (4)–(8) будем называть схемами 1–5 соответственно.

**3. Постановка задачи об исследовании устойчивости.** Как и в [23–26], проводится исследование устойчивости только по начальным условиям.

Рассматриваются пространственно однородные режимы течения в неограниченной области, для которых такие безразмерные макроскопические переменные, как плотность  $\rho$  и скорость среды  $\mathbf{u}$  являются постоянными. В этом случае значения равновесных функций распределения тоже постоянны:  $f_i^{(\text{eq})} = \bar{f}_i = \text{const}$ . Их совокупность является невозмущенным решением каждой из схем 1–5. Рассматриваются два режима течения:  $u_x = U = \text{const}$ ,  $u_y = 0$  (режим 1) и  $u_x = u_y = U = \text{const}$  (режим 2) при  $\rho = 1$ .

Исследуется устойчивость по линейному приближению. Нелинейность  $f_i^{(\text{eq})}$  линеаризуется в окрестности невозмущенного решения  $\bar{f}_i$ . В линеаризованной системе в качестве неизвестных функций выступают возмущения — отклонения  $f_i$  от  $\bar{f}_i$ , которые будем обозначать через  $\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})$ . Решение линейной системы, полученное методом Неймана, имеет вид

$$\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = F_i(t_j) \exp(i\Theta \mathbf{r}_{kl}^T),$$

где  $i^2 = -1$ ,  $\Theta = (\theta_x, \theta_y)$ ,  $\theta_x \in [-\pi, \pi]$  и  $\theta_y \in [-\pi, \pi]$ . Функции  $F_i(t_j)$  удовлетворяют следующей системе разностных уравнений вида [25]:

$$F_i(t_{j-1/2} + 3\Delta t/2) = \frac{1}{2} (F_i(t_{j-1/2}) + F_i(t_{j-1/2} + \Delta t)) + \sum_{s=1}^9 G_{is} F_s(t_{j-1/2} + \Delta t), \quad (10)$$

которая для каждой из схем 1–5 различается только выражениями для компонент матрицы перехода  $G_{is}$ . Например, для приведенной выше схемы 3 имеем

$$G_{is} = \begin{cases} -\frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t}{6h} \left( 3 - 6 \exp(-ih(v_{ix}\theta_x + v_{iy}\theta_y)) + \exp(-2ih(v_{ix}\theta_x + v_{iy}\theta_y)) + \right. \\ \quad \left. + 2 \exp(ih(v_{ix}\theta_x + v_{iy}\theta_y)) \right) + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial f_s} \left( \bar{\mathbf{f}}^{(\text{eq})} \right), & i = s, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial f_s} \left( \bar{\mathbf{f}}^{(\text{eq})} \right), & i \neq s. \end{cases}$$

Как и в [25], введем новые переменные  $S_i(t_{j-1/2}) = F_i(t_{j-1/2})$ ,  $i = \overline{1, 9}$ ,  $S_i(t_{j-1/2}) = F_{i-9}(t_{j-1/2} + \Delta t/2)$ ,  $i = \overline{10, 18}$ ,  $S_i(t_{j-1/2}) = F_{i-18}(t_{j-1/2} + \Delta t)$ ,  $i = \overline{19, 27}$ . Сведем (10) к системе

$$S_i(t_{j-1/2} + \Delta t/2) = \sum_{m=1}^{27} A_{im} S_m(t_{j-1/2}). \quad (11)$$

Здесь  $A_{im}$  задают матрицы следующей структуры:

$$A = \begin{pmatrix} O_{9 \times 9} & E_{9 \times 9} & O_{9 \times 9} \\ O_{9 \times 9} & O_{9 \times 9} & E_{9 \times 9} \\ \frac{1}{2} E_{9 \times 9} & O_{9 \times 9} & K_{9 \times 9} \end{pmatrix},$$

где  $K = \frac{1}{2} E + G$ , а  $O$  и  $E$  — нулевая и единичная матрицы соответствующей размерности.

Таким образом, задачи об исследовании невозмущенных решений построенных схем сведутся к задаче исследования устойчивости нулевых решений систем вида (11). Известно, что они будут устойчивыми, если все собственные значения матрицы  $A$  будут лежать в единичном круге [28].

При всех введенных допущениях собственные значения матрицы системы (11) являются функциями следующих параметров:  $\theta_x, \theta_y, U, \Delta t, h, \tau$ . Для упрощения вместо  $\Delta t$  и  $h$  будет рассматриваться параметр Куранта  $\gamma = v\Delta t/h$ , где  $v = 1$  — модуль безразмерной скорости псевдочастиц по основным направлениям решетки, т.е. по направлениям осей декартовой системы координат.

Для численного решения задач на собственные значения применялся  $QR$ -алгоритм, реализованный на языке FORTRAN-90 в пакете EISPACK [29].

Анализ устойчивости проводился путем построения и исследования областей устойчивости на плоскости параметров  $(\tau, U)$  при варьировании значений  $\gamma$ . Область изменения  $\tau$  и  $U$  при расчетах разбивалась сеткой из  $100 \times 100$  узлов. Считалось, что ее узел входит в область устойчивости, если при фиксированных  $\tau$  и  $U$  при всех значениях  $\theta_x$  и  $\theta_y$  все собственные значения по модулю не превосходят единицы. Область изменения  $\theta_x$  и  $\theta_y$  разбивалась равномерной сеткой из  $100 \times 100$  узлов. Параметр  $U$  изменялся в промежутке от 0 до 1, а параметр  $\tau$  — в промежутках  $[0, 2]$  и  $[0, 100]$ . Площадь области устойчивости вычислялась как мера Жордана плоского множества.

Расчеты для обоих режимов проводились при следующих значениях  $\gamma$ : 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.

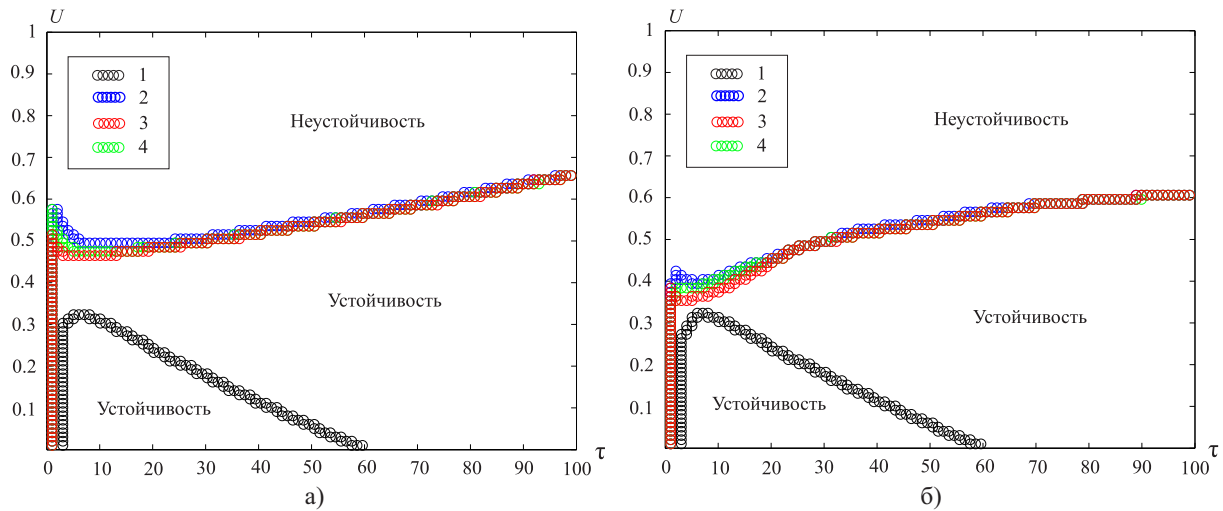


Рис. 1. Границы областей устойчивости схем 1, 3–5 при  $\tau \in [0, 100]$  в случае обоих режимов при  $\gamma = 0.1$ : а) режим 1; б) режим 2. Кривая 1 — схема 1; кривая 2 — схема 3; кривая 3 — схема 4; кривая 4 — схема 5

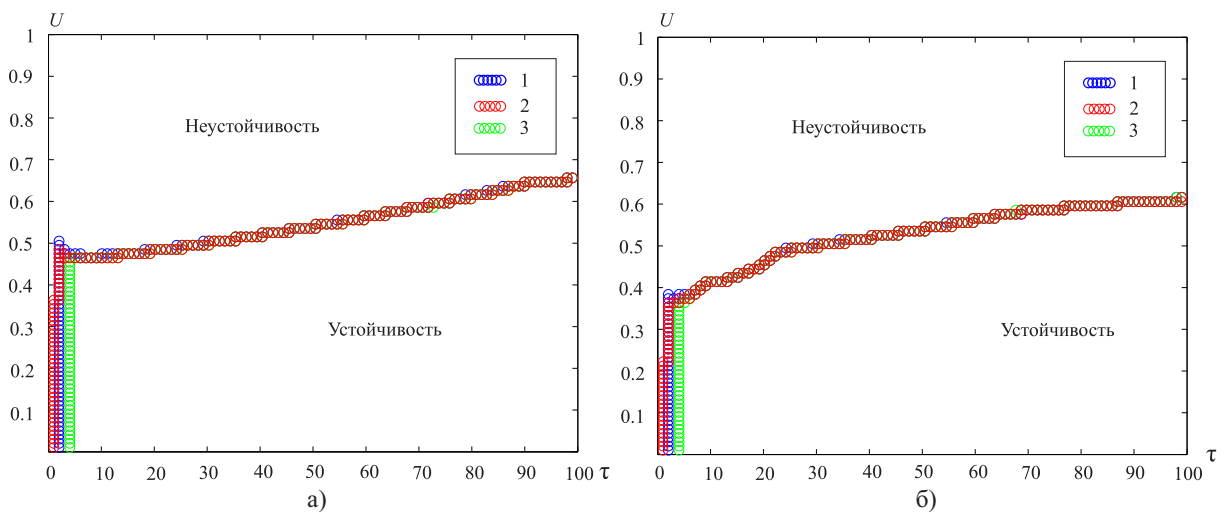


Рис. 2. Границы областей устойчивости схем 3–5 при  $\tau \in [0, 100]$  в случае обоих режимов при  $\gamma = 0.25$ : а) режим 1; б) режим 2. Кривая 1 — схема 3; кривая 2 — схема 4; кривая 3 — схема 5

#### 4. Области устойчивости.

**4.1. Случай промежутка  $\tau \in [0, 100]$ .** В табл. 1 и табл. 2 приведены значения площадей областей устойчивости схем 1–5. На рис. 1 изображены границы областей устойчивости схем при  $\gamma = 0.1$  в случае обоих режимов. На рис. 2 и 3 соответствующие границы представлены для случаев  $\gamma = 0.25$  и  $0.5$ . Заметим, что при  $\gamma = 0.75$  и 1 области устойчивости оказались пустыми. Области устойчивости для схемы 2 при всех значениях параметра  $\gamma$  тоже оказались пустыми.

Таблица 1  
Площади областей устойчивости схем 1–5  
при  $\tau \in [0, 100]$  в случае режима 1

$\gamma$	Сх. 1	Сх. 3	Сх. 4	Сх. 5
0.1	9.9684	55.351	54.423	54.117
0.25	0	53.882	52.740	54.086
0.5	0	42.067	0	53.178

Таблица 2  
Площади областей устойчивости схем 1–5  
при  $\tau \in [0, 100]$  в случае режима 2

$\gamma$	Сх. 1	Сх. 3	Сх. 4	Сх. 5
0.1	9.9071	52.464	51.974	51.627
0.25	0	51.893	51.066	52.015
0.5	0	40.098	0	52.107

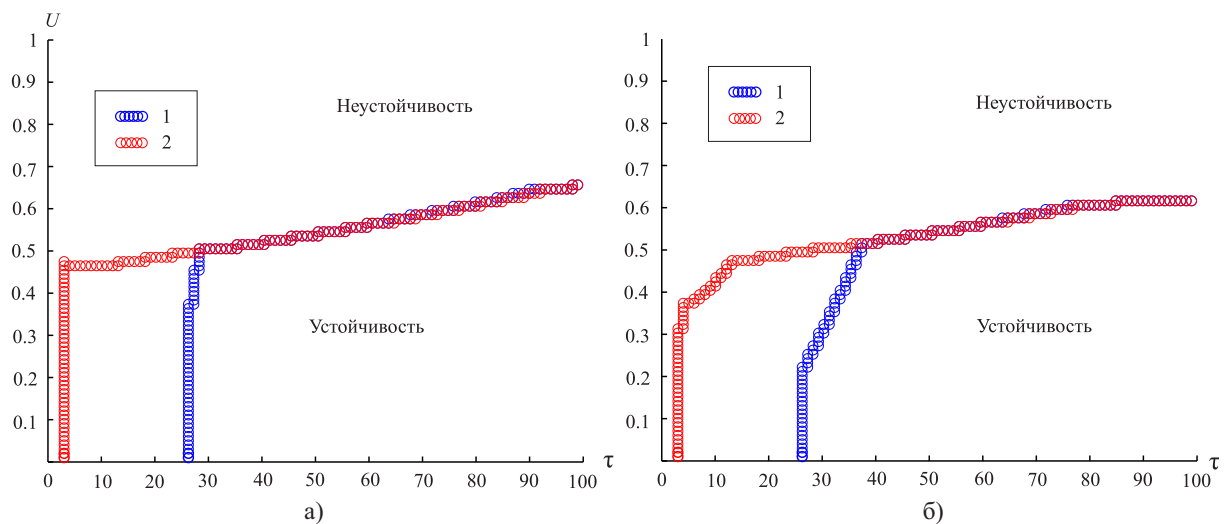


Рис. 3. Границы областей устойчивости схем 3 и 5 при  $\tau \in [0, 100]$  в случае обоих режимов при  $\gamma = 0.5$ : а) режим 1; б) режим 2. Кривая 1 — схема 3; кривая 2 — схема 5

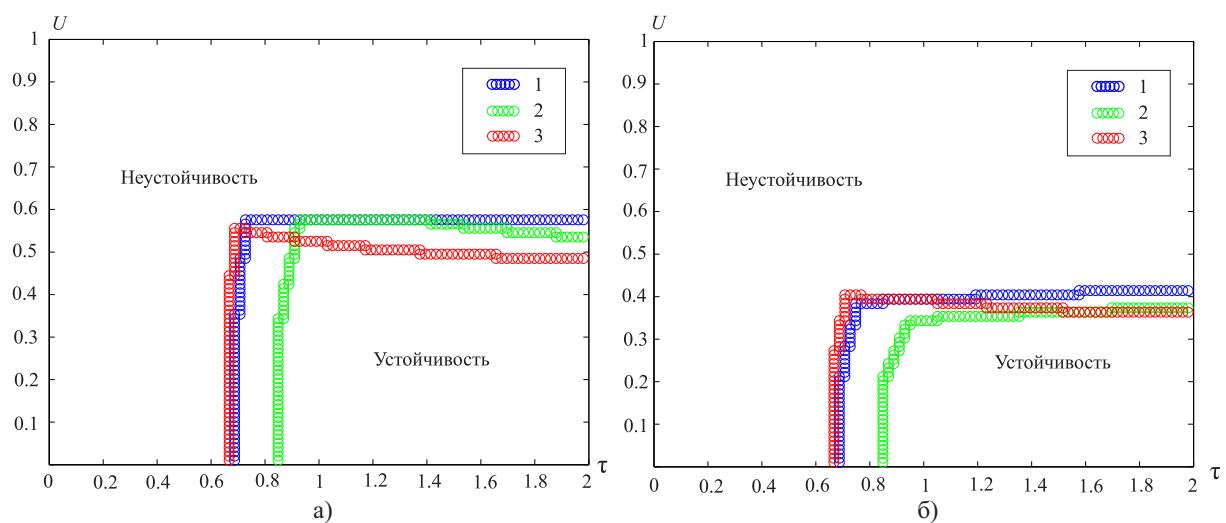


Рис. 4. Границы областей устойчивости схем 3–5 при  $\tau \in [0, 2]$  в случае обоих режимов при  $\gamma = 0.1$ : а) режим 1; б) режим 2. Кривая 1 — схема 3; кривая 2 — схема 4; кривая 3 — схема 5

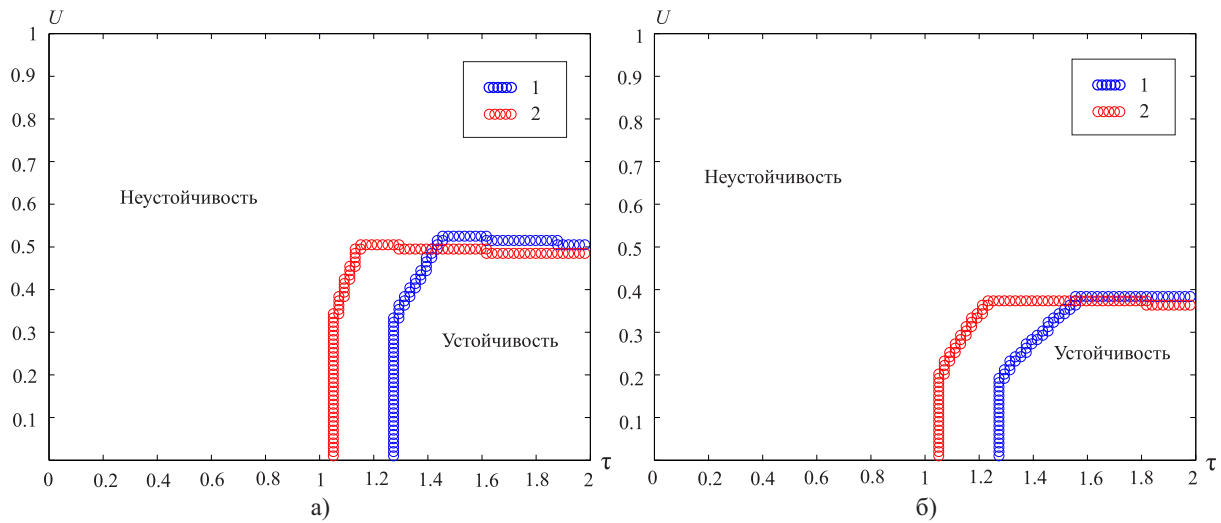


Рис. 5. Границы областей устойчивости схем 3 и 5 при  $\tau \in [0, 100]$  в случае обоих режимов при  $\gamma = 0.25$ : а) режим 1; б) режим 2. Кривая 1 — схема 3; кривая 2 — схема 5

Как можно заметить, при  $\gamma > 0.1$  области устойчивости для схем, в которых  $\mathbf{v}_i \nabla f_i$  аппроксимируется во внутренних узлах шаблонов, оказываются непустыми в отличие от схем 1 и 2. Наибольшие площади при таких  $\gamma$  имеют области устойчивости для схемы 5, которую можно назвать аналогом схемы с центральными разностями четвертого порядка. Из всех рассмотренных здесь и в [25] разностных схем по значению площади области устойчивости эта схема уступает только аналогу модифицированной схемы с центральными разностями (см. [25]). Однако схема из [25] аппроксимирует соответствующие дифференциальные операторы со вторым порядком, а схема 5 — с четвертым.

**4.2. Случай промежутка  $\tau \in [0, 2]$ .** Случай такого диапазона изменения времени релаксации представляет практический интерес в связи с тем, что малые значения  $\tau$  соответствуют случаю малых значений коэффициента кинематической вязкости  $\nu$ , что характерно для течений при больших числах Рейнольдса. Следует заметить, что для схем 1 и 2 области устойчивости в таком диапазоне изменения  $\tau$  оказались пустыми. В табл. 3 представлены значения площадей областей устойчивости для схем 3–5 в случае обоих режимов. На рис. 4 представлены границы областей устойчивости для случая  $\gamma = 0.1$ , на рис. 5 — для случая  $\gamma = 0.25$ . Для случаев остальных значений  $\gamma$  области устойчивости оказались пустыми.

Таблица 3  
Площади областей устойчивости схем 3–5 при  $\tau \in [0, 2]$

$\gamma$	Сх. 3		Сх. 4		Сх. 5	
	Реж. 1	Реж. 2	Реж. 1	Реж. 2	Реж. 1	Реж. 2
0.1	0.750	0.522	0.639	0.408	0.676	0.501
0.25	0.359	0.251	0	0	0.460	0.338

Для этого диапазона изменения  $\tau$  при  $\gamma = 0.1$  наибольшие по площади области устойчивости характерны для схемы 3. При увеличении  $\gamma$  наблюдается та же ситуация, что и для случая  $\tau \in [0, 100]$  — наибольшие площади имеют области устойчивости для схемы 5.

**5. Заключение.** Выполнено исследование устойчивости трехслойных явных конечно-разностных решеточных схем Больцмана повышенного порядка аппроксимации. Показано, что наибольшие по площади области устойчивости имеют место в случае схем, построенных на основе аппроксимации конвективных членов во внутренних узлах сеточных шаблонов.

Представленные результаты могут оказаться полезными при сравнении друг с другом различных конечно-разностных решеточных схем Больцмана, применяемых для расчета плоских течений вязких несжимаемых жидкостей и построенных с использованием набора скоростей D2Q9.

В дальнейшем планируется построить и исследовать многослойные схемы повышенного порядка аппроксимации по времени (типа Рунге–Кутты или Адамса–Башфорта) при использовании единой аппрок-

симуляции конвективных членов системы кинетических уравнений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen S., Doolen G.D.* Lattice Boltzmann method for fluid flows // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1998. **30**. 329–364.
2. *Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction. Berlin: Springer, 2005.
3. *Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С.* Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. **12**. 227–231.
4. *Захаров А.М., Сенин Д.С., Грачев Е.А.* Моделирование течений методом решеточных уравнений Больцмана со многими временами релаксации // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. **15**. 644–657.
5. *Кривовичев Г.В.* О расчете течений вязкой жидкости методом решеточных уравнений Больцмана // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2013. **5**, № 2. 165–178.
6. *Кривовичев Г.В.* Модифицированный вариант метода решеточных уравнений Больцмана для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2014. **6**, № 3. 365–381.
7. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 384–390.
8. *Куперштох А.Л., Медведев Д.А., Грибанов И.И.* Моделирование тепломассопереноса в среде с фазовыми переходами методом решеточных уравнений Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. **15**. 317–328.
9. *Ammer R., Markl M., Ljungblad U., Korner C., Rude U.* Simulating fast electron beam melting with a parallel thermal free surface lattice Boltzmann method // *Computers and Mathematics with Applications*. 2014. **67**, N 2. 318–330.
10. *Mendoza M., Succi S., Herrmann H.J.* Kinetic formulation of the Kohn–Sham equations for *ab initio* electronic structure calculations // *Physical Review Letters*. 2014. **113**, N 9. 096402-1–096402-5.
11. *Бикулов Д.А., Сенин Д.С., Демин Д.С., Дмитриев А.В., Грачев Н.Е.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 13–19.
12. *Бикулов Д.А., Сенин Д.С.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана без хранимых значений функций распределения для GPU // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 370–374.
13. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 130–138.
14. *Li B., Zhou G., Ge W., Wang L., Wang X., Guo L., Li J.* A multi-scale architecture for multi-scale simulation and its application to gas–solid flows // *Particuology*. 2014. **15**. 160–169.
15. *Delbosc N., Summers J.L., Khan A.I., Kapur N., Noakes C.J.* Optimized implementation of the lattice Boltzmann method on a graphics processing unit toward real-time fluid simulation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2014. **67**, N 2. 462–475.
16. *Ripesi P., Biferale L., Schifano S.F., Tripiccone R.* Evolution of a double-front Rayleigh–Taylor system using a graphics-processing-unit-based high-resolution thermal lattice-Boltzmann model // *Physical Review E*. 2014. **89**. 043022-1–043022-9.
17. *Seta T., Takahashi R.* Numerical stability analysis of FDLBM // *Journal of Statistical Physics*. 2002. **7**, N 1/2. 557–572.
18. *Sofonea V., Sekerka R.F.* Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // *Journal of Computational Physics*. 2003. **184**, N 2. 422–434.
19. *He Y.-L., Liu Q., Li Q.* Three-dimensional finite-difference lattice Boltzmann model and its application to inviscid compressible flows with shock waves // *Physica A*. 2013. **392**, N 20. 4884–4896.
20. *Chen S., Liu Z., Shi B., He Z., Zheng C.* A novel incompressible finite-difference lattice Boltzmann equation for particle-laden flow // *Acta Mech. Sinica*. 2005. **21**, N 6. 574–591.
21. *Kandhai D., Soll W., Chen S., Hoekstra A., Sloot P.* Finite-difference lattice-BGK methods on nested grids // *Computer Physics Communications*. 2000. **129**, N 1–3. 100–109.
22. *Fakhari A., Lee T.* Finite-difference lattice Boltzmann method with a block-structured adaptive-mesh-refinement technique // *Physical Review E*. 2014. **89**. 033310-1–033310-12.
23. *Кривовичев Г.В.* Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 332–340.
24. *Кривовичев Г.В.* Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 1–8.
25. *Кривовичев Г.В., Михеев С.А.* Исследование устойчивости трехслойных конечно-разностных решеточных схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. **15**. 211–221.
26. *Mikheev S.A., Krivovichev G.V.* Stability analysis of two-step finite-difference schemes for the system of kinetic

- equations // Proc. 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications. New York: IEEE Press, 2014. 118–119.
27. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Physical Review. 1954. **94**, N 3. 511–525.
28. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.
29. Smith B.T., Boyle J.M., Dongarra J.J., Garbow B.S., Ikebe Y., Klema V.C., Moler C.B. Matrix eigensystem routines: EISPACK guide. Heidelberg: Springer, 1976.

Поступила в редакцию  
12.03.2015

## Stability Study of Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes with Upwind Differences of High Order Approximation

G. V. Krivovichev<sup>1</sup> and S. A. Mikheev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: gera1983k@bk.ru

<sup>2</sup> Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Student, e-mail: helps2@rambler.ru

Received March 12, 2015

**Abstract:** The stability of three-level finite-difference-based lattice Boltzmann schemes of third and fourth orders of approximation with respect to spatial variables is studied. The stability analysis with respect to initial conditions is performed on the basis of a linear approximation. These studies are based on the Neumann method. It is shown that the stability of the schemes can be improved by the approximation convective terms in internal nodes of the grid stencils in use. In this case the stability domains are larger compared to the case of approximation in boundary nodes.

**Keywords:** lattice Boltzmann method, lattice Boltzmann schemes, stability with respect to initial conditions, Neumann method.

## References

1. S. Chen and G. D. Doolen, “Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30**, 329–364 (1998).
2. D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction* (Springer, Berlin, 2005).
3. N. E. Grachev, A. V. Dmitriev, and D. S. Senin, “Simulation of Gas Dynamics with the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Program.* **12**, 227–231 (2011).
4. A. M. Zakharov, D. S. Senin, and E. A. Grachev, “Flow Simulation by the Lattice Boltzmann Method with Multiple-Relaxation Times,” *Vychisl. Metody Program.* **15**, 644–657 (2014).
5. G. V. Krivovichev, “On the Computation of Viscous Fluid Flows by the Lattice Boltzmann Method,” *Kompyut. Issled. Model.* **5** (2), 165–178 (2013).
6. G. V. Krivovichev, “Modification of the Lattice Boltzmann Method for the Computations of Viscid Incompressible Fluid Flows,” *Kompyut. Issled. Model.* **6** (3), 365–381 (2014).
7. A. L. Kupershtokh, “Three-Dimensional LBE Simulations on Hybrid GPU-Clusters for the Decay of a Binary Mixture of Liquid Dielectrics with a Solute Gas to a System of Gas–Vapor Channels,” *Vychisl. Metody Program.* **13**, 384–390 (2012).
8. A. L. Kupershtokh, D. A. Medvedev, and I. I. Griбанov, “Modeling of Thermal Flows in a Medium with Phase Transitions Using the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Program.* **15**, 317–328 (2014).
9. R. Ammer, M. Markl, U. Ljungblad, et al., “Simulating Fast Electron Beam Melting with a Parallel Thermal Free Surface Lattice Boltzmann Method,” *Comput. Math. Appl.* **67** (2), 318–330 (2014).
10. M. Mendoza, S. Succi, and H. J. Herrmann, “Kinetic Formulation of the Kohn–Sham Equations for *ab initio* Electronic Structure Calculations,” *Phys. Rev. Lett.* **113** (9), 096402–1–096402–5 (2014).



11. D. A. Bikulov, D. S. Senin, D. S. Demin, et al., "Implementation of the Lattice Boltzmann Method on GPU Clusters," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 13–19 (2012).
12. D. A. Bikulov and D. S. Senin, "Implementation of the Lattice Boltzmann Method without Stored Distribution Functions on GPU," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 370–374 (2013).
13. A. L. Kupershtokh, "Three-Dimensional Simulations of Two-Phase Liquid–Vapor Systems on GPU Using the Lattice Boltzmann Method," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 130–138 (2012).
14. B. Li, G. Zhou, W. Ge, et al., "A Multi-Scale Architecture for Multi-Scale Simulation and Its Application to Gas–Solid Flows," *Particuology* **15**, 160–169 (2014).
15. N. Delbosc, J. L. Summers, A. I. Khan, et al., "Optimized Implementation of the Lattice Boltzmann Method on a Graphics Processing Unit towards Real-Time Fluid Simulation," *Comput. Math. Appl.* **67** (2), 462–475 (2014).
16. P. Ripesi, L. Biferale, S. F. Schifano, and R. Tripiccion, "Evolution of a Double-Front Rayleigh–Taylor System Using a Graphics-Processing-Unit-Based High-Resolution Thermal Lattice-Boltzmann Model," *Phys. Rev. E* **89**, 043022-1–043022-9 (2014).
17. T. Seta and R. Takahashi, "Numerical Stability Analysis of FDLBM," *J. Stat. Phys.* **107** (1/2), 557–572 (2002).
18. V. Sofonea and R. F. Sekerka, "Viscosity of Finite Difference Lattice Boltzmann Models," *J. Comput. Phys.* **184** (2), 422–434 (2003).
19. Y.-L. He, Q. Liu, and Q. Li, "Three-Dimensional Finite-Difference Lattice Boltzmann Model and Its Application to Inviscid Compressible Flows with Shock Waves," *Physica A* **392** (20), 4884–4896 (2013).
20. S. Chen, Z. Liu, B. Shi, et al., "A Novel Incompressible Finite-Difference Lattice Boltzmann Equation for Particle-Laden Flow," *Acta Mech. Sinica* **21** (6), 574–581 (2005).
21. D. Kandhai, W. Soll, S. Chen, et al., "Finite-Difference Lattice-BGK Methods on Nested Grids," *Comput. Phys. Commun.* **129** (1–3), 100–109 (2000).
22. A. Fakhari and T. Lee, "Finite-Difference Lattice Boltzmann Method with a Block-Structured Adaptive-Mesh-Refinement Technique," *Phys. Rev. E* **89**, 033310-1–033310-12 (2014).
23. G. V. Krivovichev, "Investigation of the Stability of Explicit Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 332–340 (2012).
24. G. V. Krivovichev, "Stability of Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 1–8 (2013).
25. G. V. Krivovichev and S. A. Mikheev, "Stability of Three-Layer Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **15** (2), 211–221 (2014).
26. S. A. Mikheev and G. V. Krivovichev, "Stability Analysis of Two-Step Finite-Difference Schemes for the System of Kinetic Equations," in *Proc. Int. Conf. on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, St. Petersburg, Russia, June 30–July 4, 2014* (IEEE Press, New York, 1974), pp. 118–119.
27. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems," *Phys. Rev.* **94** (3), 511–525 (1954).
28. G. A. Leonov and M. M. Shumafov, *Methods of Stabilization of Linear Controlled Systems* (St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 2005) [in Russian].
29. B. T. Smith, J. M. Boyle, J. J. Dongarra, B. S. Garbow, Y. Ikebe, V. C. Klema, and C. B. Moler, *Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide* (Springer, Heidelberg, 1976).