УДК 517.958

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Н. Л. Гольдман[1]

Рассматриваются вопросы единственности точного решения в классах Гельдера и построения устойчивых приближенных решений для обратной задачи об определении правой части в квазилинейном параболическом уравнении общего вида по дополнительной информации, заданной в конечный момент времени.

Ключевые слова: обратные задачи, параболические уравнения, коэффициентные обратные задачи, итерационные алгоритмы, финальное переопределение, математическое моделирование.

Введение. Постановки обратных задач для параболических уравнений все более усложняются в связи с современными потребностями моделирования и управления нелинейными процессами в теплофизике и механике сплошной среды. В особенности это относится к высокотемпературным процессам, в которых требуется учитывать зависимость теплофизических характеристик от температуры и, следовательно, рассматривать квазилинейные модели таких процессов. Однако эти задачи в отличие от обратных задач для линейных параболических уравнений еще недостаточно изучены. Наиболее полные исследования проведены для коэффициентных обратных задач, связанных с определением теплофизических коэффициентов (теплопроводности и теплоемкости), см., например, [1 – 4].

Проблема определения тепловых источников по заданному в конечный момент времени распределению температуры приводит к так называемым обратным задачам с финальным переопределением для параболических уравнений с неизвестной правой частью. В [5 – 12] исследование подобных задач проведено для некоторых видов линейных и квазилинейных уравнений. Основное внимание в данной работе уделено вопросам единственности точного решения в классах Гельдера и построения устойчивых приближенных решений обратной задачи об определении правой части для квазилинейного параболического уравнения общего вида с граничными условиями третьего рода. Полученные достаточные условия единственности решения расширяют класс обратных задач с таким свойством не только для квазилинейных (ср. с [12]), но даже для линейных уравнений (ср., например, с [6, 7]).

1. Постановка задачи. Пусть краевая задача для квазилинейного параболического уравнения состоит в определении функции $u(x,t)$ из условий

$$c(x,t,u)u_t - Lu = p_0(x,t)f(x) + p_1(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q = \{0 < x < l, 0 < t \leqslant T\},$$

$$a(x,t,u)u_x - e_0(t,u)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$a(x,t,u)u_x + e_1(t,u)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $Lu \equiv (a(x,t,u)u_x)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)$ — равномерно эллиптический оператор, $a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, d, f, p_i, e_i, q_i $(i = 0,1)$, φ — известные функции своих аргументов, $a_{\min}$, $c_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

Допустим, что функция $f(x)$ в правой части уравнения (1) неизвестна, но в конечный момент времени $t = T$ задана дополнительная информация о решении прямой задачи (1) – (4):

$$u|_{t=T} = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где $g(x)$ — известная при $x \geqslant 0$ функция, $T > 0$ — заданный момент времени. Тогда возникает так называемая

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Обратная задача с финальным переопределением: найти функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q}$ и $f(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, удовлетворяющие условиям (1) – (4) и (5), в которых входные данные $a>0$, b, $c>0$, d, p_i, e_i, q_i $(i=0,1)$, φ и g предполагаются заданными.

Сформулируем требования к входным данным обратной задачи (1) – (5), используя стандартные обозначения классов функций из [13].

1. При $(x,t)\in\overline{Q}$, $|u|<\infty$ функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены, $a\geqslant a_{\min}>0$, $c\geqslant c_{\min}>0$, $e_i\geqslant 0$ $(i=0,1)$.

2. При $(x,t,u)\in\overline{D}=\overline{Q}\times[-M_0,M_0]$ $(M_0\geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}}|u|)$ производные a_{xx}, a_{xu}, a_{uu} и a_t равномерно ограничены, b, c, d, a_x, a_u принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$, функции e_i имеют равномерно ограниченные производные e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} $(i=0,1)$.

3. Функции $p_0(x,t)$ и $p_1(x,t)$ принадлежат $H^{1,\lambda/2}(\overline{Q})$, $|p_0(x,t)|\geqslant p_0>0$ при $(x,t)\in\overline{Q}$, функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ принадлежат $H^{2+\lambda}[0,l]$, $q_i(t)$ имеют равномерно ограниченные производные q_{it} $(i=0,1)$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Выполнены условия согласования при $t=0$:

$$a(x,0,\varphi)\varphi_x - e_0(0,\varphi)\varphi|_{x=0} = q_0(0),$$
$$a(x,0,\varphi)\varphi_x + e_1(0,\varphi)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

Эти требования обеспечивают существование и единственность решения в классе Гельдера $u(x,t)\in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ квазилинейной краевой задачи (1) – (4) при любой функции $f(x)\in C^1[0,l]$ в правой части уравнения (1) [13].

В соответствии с этим дадим следующее

Определение 1. Точным решением обратной задачи (1) – (5) в классах Гельдера назовем пару функций $\{u^0(x,t),f^0(x)\}$:

$$u^0(x,t)\in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}),\quad f^0(x)\in C^1[0,l],$$

удовлетворяющих соотношениям (1) – (5) в обычном смысле.

2. Единственность точного решения в случае его существования. Переходя к исследованию этого вопроса, допустим, что $\{u_1^0,f_1^0\}$ и $\{u_2^0,f_2^0\}$ — два решения обратной задачи с финальным переопределением. Функции u_1^0 и u_2^0 можно рассматривать как решения краевой задачи (1) – (4), соответствующие функциям f_1^0 и f_2^0 в правой части уравнения (1). Следовательно, для них справедливы оценки в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [13]:

$$|u_1^0,u_2^0|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2}\leqslant M,\quad M=\mathrm{const}>0. \tag{6}$$

Для разностей $\Delta u=u_2^0-u_1^0$ и $\Delta f=f_2^0-f_1^0$ в силу (1) – (5) имеют место соотношения

$$c(x,t,u_1^0)\Delta u_t-\mathcal{L}\Delta u=p_0(x,t)\Delta f(x),\quad (x,t)\in Q, \tag{7}$$

$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x-\mathcal{E}_0\Delta u|_{x=0}=0,\quad 0<t\leqslant T, \tag{8}$$

$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x+\mathcal{E}_1\Delta u|_{x=l}=0,\quad 0<t\leqslant T, \tag{9}$$

$$\Delta u|_{t=0}=0,\quad \Delta u|_{t=T}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{10}$$

в которых

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\Delta u\equiv\big(a(x,t,u_1^0)\Delta u_x\big)_x-\mathcal{A}_1\Delta u_x-\mathcal{A}_2\Delta u,\\
&\mathcal{A}_1=b(x,t,u_1^0)-a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0,\\
&\mathcal{A}_2=c_u(x,t,u_1^0)u_{2t}^0+b_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0+d_u(x,t,u_1^0)-\{a_uu_{2xx}^0+a_{uu}(u_{2x}^0)^2+a_{xu}u_{2x}^0\},\\
&\mathcal{E}_0=\{-a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0+e_0(t,u_1^0)+e_{0u}(t,u_1^0)u_2^0\}|_{x=0},\\
&\mathcal{E}_1=\{a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0+e_1(t,u_1^0)+e_{1u}(t,u_1^0)u_2^0\}|_{x=l}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Свойства 1 – 3 входных данных и оценки (6) позволяют заключить, что коэффициенты в уравнении (7) и в граничных условиях (8), (9) непрерывны в $\overline{Q}$ как функции (x,t).

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\psi(x,t)$ — решение сопряженной краевой задачи*

$$\big(c(x,t,u_1^0)\psi\big)_t+\mathcal{L}^*\psi=0,\quad 0<x<l,\quad 0\leqslant t<T, \tag{12}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x-(\mathcal{E}_0-\mathcal{A}_1)\psi|_{x=0}=0,\quad 0\leqslant t<T, \tag{13}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x + (\mathcal{E}_1+\mathcal{A}_1)\psi|_{x=l} = 0, \quad 0\leqslant t<T, \tag{14}$$

$$\psi|_{t=T} = \eta(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{15}$$

в которой $\eta(x)$ *— произвольная функция из* $C^2[0,l]$,

$$\mathcal{L}^*\psi \equiv \big(a(x,t,u_1^0)\psi_x\big)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi.$$

Тогда

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(x)\,dx\,dt = 0 \quad \forall\eta\in C^2[0,l]. \tag{16}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что все коэффициенты в уравнении и в граничных условиях сопряженной задачи (12) – (15), рассматриваемые как функции (x,t), непрерывны в $\overline{Q}$ в силу свойств функций a, b, c, d, e_i и оценок (6) для $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$. Следовательно, задача (12) – (15), являясь линейной краевой задачей относительно функции $\psi(x,t)$, разрешима в классе $\psi(x,t)\in C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ [13, 14].

Рассмотрим выражение

$$I = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi\{c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u\}\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Delta u\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\}\,dx\,dt. \tag{17}$$

С одной стороны, в силу (7) и (12) имеем

$$I = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(x)\,dx\,dt. \tag{18}$$

С другой стороны, проводя в (17) интегрирование по частям с учетом соотношений (7) – (10) и (12) – (15), получим

$$\begin{aligned}
I = &\int\limits_0^l [c\psi\Delta u]_{t=0}^{t=T}\,dx \mp \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Delta u(c\psi)_t\,dx\,dt - \int\limits_0^T [\psi a\Delta u_x]_{x=0}^{x=l}\,dt + \\
&+\int\limits_0^T\int\limits_0^l a\psi_x\Delta u_x\,dx\,dt + \int\limits_0^T [\psi\mathcal{A}_1\Delta u]_{x=0}^{x=l}\,dt \mp \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Delta u(\mathcal{A}_1\psi)_x\,dx\,dt \mp \\
&\mp\int\limits_0^T\int\limits_0^l \Delta u\mathcal{A}_2\psi\,dx\,dt + \int\limits_0^T [\Delta u a\psi_x]_{x=0}^{x=l}\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l a\psi_x\Delta u_x\,dx\,dt = \\
= &\int\limits_0^T \Delta u\big|_{x=l}\{a\psi_x + (\mathcal{E}_1+\mathcal{A}_1)\psi\}\big|_{x=l}\,dt - \int\limits_0^T \Delta u\big|_{x=0}\{a\psi_x - (\mathcal{E}_0-\mathcal{A}_1)\psi\}\big|_{x=0}\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (18) следует утверждение (16). Лемма 1 доказана.

Основная идея дальнейшего доказательства единственности точного решения $\{u^0,f^0\}$ состоит в следующем. Покажем, что если при любой функции $\eta(x)\in C^2[0,l]$ соответствующее решение $\psi(x,t)$ задачи (12) – (15) удовлетворяет при любом значении $\overline{t}\in[0,T]$ соотношению

$$\int\limits_0^l \psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\,w(x)\,dx = 0 \tag{19}$$

для некоторой непрерывной функции $w(x)$, то $w(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant l$.

Для доказательства этого утверждения, означающего, что при пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $C^2[0,l]$ множество значений $\{\psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\}$ является всюду плотным, рассмотрим краевую задачу (сопряженную к (12) – (15), ср. с (7) – (10)):

$$c(x,t,u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad 0<x<l, \quad \overline{t}<t\leqslant T, \tag{20}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x - \mathcal{E}_0 z|_{x=0} = 0, \quad \overline{t} < t \leqslant T, \tag{21}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x + \mathcal{E}_1 z|_{x=l} = 0, \quad \overline{t} < t \leqslant T, \tag{22}$$

$$z|_{t=\overline{t}} = \theta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{23}$$

где $\mathcal{L}z \equiv (a(x,t,u_1^0)z_x)_x - \mathcal{A}_1 z_x - \mathcal{A}_2 z$, коэффициенты $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{E}_i$ определены в (11), $\theta(x)$ — некоторая непрерывная функция.

Имеет место вспомогательная

Лемма 2. *Предположим, что для функции*

$$w(x) = c(x,t,u_1^0)|_{t=\overline{t}}\, \theta(x)$$

выполнено соотношение (19). *Тогда решение* $z(x,t)$ *задачи* (20) – (23) *удовлетворяет условию* $z|_{t=T} = 0$.

Доказательство. Функция $w(x)$ непрерывна в силу непрерывности $\theta(x)$ и свойств коэффициента $c(x,t,u)$ и решения $u_1^0(x,t)$. Непрерывность коэффициентов уравнения и граничных условий в (20) – (22), рассматриваемых как функции (x,t), также очевидным образом следует из требований гладкости входных данных 1 – 3 и оценок (6) для $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$. Это позволяет заключить, что краевая задача (20) – (23), линейная относительно $z(x,t)$, имеет решение в области $\overline{Q_{\overline{t}}} = \{0 \leqslant x \leqslant l, \overline{t} \leqslant t \leqslant T\}$: $z(x,t) \in C(\overline{Q_{\overline{t}}}) \cap C^{2,1}(Q_{\overline{t}})$ [13, 14].

Рассмотрим выражение

$$II = \int_{\overline{t}}^{T}\int_0^l z\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\}\,dx\,dt + \int_{\overline{t}}^{T}\int_0^l \psi\{cz_t - \mathcal{L}z\}\,dx\,dt.$$

С одной стороны, в силу однородности уравнений (12) и (20) имеем $II = 0$. С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (13) – (15) и (21) – (23) дает

$$\begin{aligned}
II = &\int_0^l [c\psi z]_{t=\overline{t}}^{t=T}\,dx \mp \int_{\overline{t}}^{T}\int_0^l \psi c z_t\,dx\,dt + \int_{\overline{t}}^{T} [za\psi_x]_{x=0}^{x=l}\,dt - \\
&- \int_{\overline{t}}^{T}\int_0^l a\psi_x z_x\,dx\,dt + \int_{\overline{t}}^{T} [\psi\mathcal{A}_1 z]_{x=0}^{x=l}\,dt \mp \int_{\overline{t}}^{T}\int_0^l \mathcal{A}_1\psi z_x\,dx\,dt \mp \\
&\mp \int_{\overline{t}}^{T}\int_0^l \mathcal{A}_2\psi z\,dx\,dt - \int_{\overline{t}}^{T} [\psi a z_x]_{x=0}^{x=l}\,dt + \int_{\overline{t}}^{T}\int_0^l a\psi_x z_x\,dx\,dt = \\
= &\int_0^l (cz)\big|_{t=T}\,\eta(x)\,dx - \int_0^l (c\psi)\big|_{t=\overline{t}}\,\theta(x)\,dx - \int_{\overline{t}}^{T} \psi\big|_{x=l}\{az_x + \mathcal{E}_1 z\}\big|_{x=l}\,dt + \int_{\overline{t}}^{T} \psi\big|_{x=0}\{az_x - \mathcal{E}_0 z\}\big|_{x=0}\,dt.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (21), (22) находим

$$II = \int_0^l (cz)\big|_{t=T}\,\eta(x)\,dx - \int_0^l (c\psi)\big|_{t=\overline{t}}\,\theta(x)\,dx = 0.$$

Но по предположению функция $w(x) = c(x,t,u_1^0)|_{t=\overline{t}}\theta(x)$ удовлетворяет при любом значении $\overline{t} \in [0,T]$ соотношению (19). Следовательно,

$$\int_0^l z(x,T)c(x,t,u_1^0)\big|_{t=T}\,\eta(x)\,dx = 0.$$

Отсюда в силу произвольности функции $\eta(x) \in C^2[0,l]$ и неравенства $c(x,t,u) \geqslant c_{\min} > 0$ вытекает, что $z|_{t=T} = 0$. Лемма 2 доказана.

Вопрос о плотности множества $\{\psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\}$ свелся таким образом к вопросу о единственности решения краевой задачи для $z(x,t)$ с обратным направлением времени. А именно, следует ли из (20)–(23) и условия $z|_{t=T}=0$, что $z(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q_{\overline{t}}}$, а тем самым, что и $\theta(x)=0$, $w(x)=0$.

Прежде всего заметим, что все коэффициенты уравнения (20) как функции (x,t) удовлетворяют в силу своей непрерывности и равномерной ограниченности в $\overline{Q_{\overline{t}}}$ (см. выше) тем требованиям регулярности, при которых соответствующая краевая задача для линейных параболических уравнений с обратным направлением времени имеет единственное решение в классе гладких функций (см. [14, с. 222]).

Другое требование, налагаемое в [14] на коэффициенты в граничных условиях, означает применительно к (21), (22), что $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ как функции t должны быть непрерывны вместе со своими производными по t. Непрерывность $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ очевидным образом следует из (11) в силу свойств $a(x,t,u)$ и $e(t,u)$ (см. требования 1, 2 к входным данным) и принадлежности $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$. Но принадлежность к этому классу Гельдера не обеспечивает, вообще говоря, непрерывности приграничных производных u_{2xt}^0 при $x=0$ и $x=l$ (из нее следует только, что $u_{2x}^0|_{x=0}\in H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0,T]$, $u_{2x}^0|_{x=l}\in H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0,T]$, $0<\lambda<1$), которая в силу (11) необходима для непрерывности производных $\mathcal{E}_{it}$ $(i=0,1)$.

2.1. Предположим сначала, что $a=a(x,t)$. В этом случае коэффициенты $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0&=\{e_0(t,u_1^0)+e_{0u}(t,u_1^0)u_2^0\}|_{x=0},\\ \mathcal{E}_1&=\{e_1(t,u_1^0)+e_{1u}(t,u_1^0)u_2^0\}|_{x=l},\end{aligned}\tag{24}$$

в котором отсутствуют приграничные производные u_{2xt}^0 при $x=0$ и $x=l$. Тогда справедлива

Лемма 3 (плотность множества $\{\psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\}$). *Предположим, что входные данные удовлетворяют соответствующим требованиям* 1 – 3 *и, кроме того, коэффициент a есть функция $a=a(x,t)$, ее производная a_t равномерно ограничена в $\overline{Q}$, производная $a_x\in H^{1,\lambda/2}(\overline{Q})$, $0<\lambda<1$, функции e_i имеют непрерывные производные e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} и e_{iut}* $(i=0,1)$.

Тогда из равенства

$$\int\limits_0^l \psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\,w(x)\,dx=0,\quad 0\leqslant\overline{t}\leqslant T,\quad w(x)\in C[0,l],$$

где $\psi(x,t)$ — решение сопряженной задачи (12) – (15) *при произвольной функции $\eta(x)\in C^2[0,l]$ в начальном условии* (15), *следует, что функция $w(x)=0$.*

Доказательство. На основании леммы 2 решение $z(x,t)$ линейной краевой задачи (20)–(23) удовлетворяет условию $z|_{t=T}=0$. Предположения леммы 3, при которых коэффициенты $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ в граничных условиях имеют вид (24), обеспечивают применимость соответствующей теоремы единственности [14, с. 222] к такой краевой задаче с обратным направлением времени. Следовательно, из (20)–(23) и условия $z|_{t=T}=0$ вытекает, что $z(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q_{\overline{t}}}=\{0\leqslant x\leqslant l,\overline{t}\leqslant t\leqslant T\}$. Таким образом, $\theta(x)=0$, т.е., и $w(x)=c(x,t,u_1^0)|_{t=\overline{t}}\theta(x)$ тоже равна 0. Отсюда и следует свойство плотности множества $\{\psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\}$. Лемма 3 доказана.

Леммы 1 и 3 уже позволяют заключить, что обратная задача (1)–(5) не может иметь более одного решения $\{u^0,f^0\}$ в смысле определения 1.

Теорема 1. *Предположим, что входные данные обратной задачи* (1) – (5), *в которой оператор L имеет вид*

$$Lu\equiv\big(a(x,t)u_x\big)_x-b(x,t,u)u_x-d(x,t,u),$$

удовлетворяют требованиям 1 – 3 *для функций b, c, d, p_i, q_i $(i=0,1)$, φ и g. Пусть, кроме того,*

1) *коэффициент $a(x,t)\geqslant a_{\min}>0$ обладает равномерно ограниченными в $\overline{Q}$ производными a_x, a_{xx} и a_t, причем a_x удовлетворяет условию Гельдера по t с показателем $\lambda/2$, $0<\lambda<1$;*

2) *функции e_i имеют непрерывные производные e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} и e_{iut} $(i=0,1)$ при $0\leqslant t\leqslant T$, $|u|\leqslant M_0$ и удовлетворяют условиям согласования при $t=0$:*

$$\begin{aligned}a(x,0)\varphi_x-e_0(0,\varphi)\varphi|_{x=0}&=q_0(0),\\ a(x,0)\varphi_x+e_1(0,\varphi)\varphi|_{x=l}&=q_1(0).\end{aligned}$$

Тогда в случае существования точного решения обратной задачи (1) – (5) $\{u^0(x,t),f^0(x)\}$ *в классах функций $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})\times C^1[0,l]$ оно определяется однозначно.*

Доказательство. Из соотношения (16), установленного в лемме 1, вытекает в силу теоремы о среднем равенство

$$\int_0^l T\psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\, p_0(x,t)|_{t=\overline{t}}\, \Delta f(x)\, dx = 0, \quad 0 \leqslant \overline{t} \leqslant T, \tag{25}$$

справедливое при любой функции $\eta(x) \in C^2[0,l]$ в сопряженной задаче (12)–(15). Но так как множество значений $\{\psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\}$, получаемое при пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $C^2[0,l]$, обладает свойством плотности при любом $\overline{t} \in [0,T]$ (лемма 3), то равенство (25) означает, что

$$p_0(x,t)|_{t=\overline{t}}\, \Delta f(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant \overline{t} \leqslant T.$$

По предположению (см. требование 3 к входным данным) $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. Следовательно, $\Delta f(x) = 0$. Тогда из соотношений (7)–(10), которые представляют собой линейную краевую задачу относительно Δu, вытекает в силу единственности решения такой краевой задачи [13], что $\Delta u \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой и в том случае, когда неравенство $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ имеет место в некоторой области $Q' = \{0 \leqslant x \leqslant l, t_0 < t < t_1\} \subset \overline{Q}$, вне которой $p_0(x,t) = 0$.

2.2. Рассмотрим теперь общий случай $a = a(x,t,u)$, при котором коэффициенты $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ в граничных условиях (21), (22) имеют вид (11). Как уже отмечалось, необходима непрерывность $\mathcal{E}_i$ и их производных $\mathcal{E}_{it}$ $(i = 0,1)$ для возможности применить к задаче (20)–(23) с дополнительным условием $z|_{t=T} = 0$ известные результаты из [14] о единственности решения такой краевой задачи для линейного параболического уравнения с обратным направлением времени. Для того чтобы обеспечить непрерывность $\mathcal{E}_{it}$, входные данные обратной задачи (1)–(5) должны быть более гладкими, чем предполагается в требованиях 1–3 (см. (11)). Соответственно, более гладким будет и точное решение $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ в случае его существования. Единственность $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ в этом более узком классе функций (ср. с определением 1) устанавливает

Теорема 2. *Предположим, что входные данные обратной задачи* (1)–(5) *удовлетворяют требованиям* 1–3 *и пусть, кроме того,*

1) *коэффициент* $a(x,t,u) \geqslant a_{\min} > 0$ *имеет непрерывную в* $\overline{D}$ *производную* a_{ut}, *а ее производные* a_{xx}, a_{xu} *и* a_{uu} *принадлежат* $H^{\lambda,\lambda/2,\lambda}(\overline{D})$, *функции* b, c, d *имеют производные по* x *и по* u *в* $H^{\lambda,\lambda/2,\lambda}(\overline{D})$, *функции* $p_i(x,t)$ *имеют производные по* x *в* $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, $i = 0,1$, $0 < \lambda < 1$;

2) *функции* e_i *имеют непрерывные производные* e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} *и* e_{iut} $(i = 0,1)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|u| \leqslant M_0$;

3) *функции* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *принадлежат* $H^{3+\lambda}[0,l]$, $q_i(t) \in C^1[0,T]$ $(i = 0,1)$.

Тогда обратная задача (1)–(5) *не может иметь двух различных точных решений в классах Гельдера*

$$\begin{aligned}
&u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad u^0(x,t) \in H^{3+\lambda,\frac{3+\lambda}{2}}(\overline{Q}) \quad \textit{кроме} \;\; x = 0, x = l, 0 < t < T,\\
&u^0_{xt} \in H^{\lambda,\lambda/2}(Q), \quad u^0_{xt} \in C[0,T] \quad \textit{при} \;\; x = 0, x = l,\\
&f^0(x) \in H^{1+\lambda}[0,l], \quad 0 < \lambda < 1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2 квазилинейная краевая задача (1)–(4) при любой функции $f(x) \in H^{1+\lambda}[0,l]$ в правой части уравнения (1) имеет единственное решение $u(x,t)$ с указанными в (26) свойствами, в частности, на границах области $\overline{Q}$ $x = 0$ и $x = l$ его производная u_{xt} непрерывна [13]. Поэтому в случае существования точного решения обратной задачи (1)–(5) $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ принадлежит классам Гельдера (26). Следовательно, даже в общем случае, когда коэффициенты $\mathcal{E}_i$ в граничных условиях (21), (22) имеют вид (11), они непрерывны как функции t вместе с производными $\mathcal{E}_{it}$ $(i = 0,1)$.

Дальнейшее доказательство опирается, как уже отмечалось, на возможность применить результаты из [14], которые позволяют заключить из (20)–(23) и условия $z|_{t=T} = 0$ (лемма 2), что $z(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q_{\overline{t}}} = \{0 \leqslant x \leqslant l, \overline{t} \leqslant t \leqslant T\}$. На основе этого тождества, повторяя рассуждения леммы 3, устанавливаем, что из выполнения для некоторой непрерывной функции $w(x)$ равенства

$$\int_0^l \psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\, w(x)\, dx = 0 \quad \forall \eta(x) \in C^2[0,l], \quad \overline{t} \in [0,T]$$

следует, что $w(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Таким образом, условия теоремы 2 обеспечивают и в случае $a = a(x,t,u)$ плотность множества $\{\psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\}$ решений сопряженной задачи (12)–(15) при пробегании функцией $\eta(x)$

пространства $C^2[0,l]$. Но это означает, что из равенства (25), имеющего место в силу леммы 1 и теоремы о среднем, вытекает, что $p_0(x,t)|_{t=\bar{t}}\,\Delta f(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant \bar{t}\leqslant T$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1 и приводят к заключению, что $\Delta f(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant l$, $\Delta u\equiv 0$ в $\overline{Q}$. Теорема 2 доказана.

Очевидно, что замечание 1 справедливо и для этой теоремы.

2.3. Если функция f в правой части уравнения (1) ищется не в виде $f(x)$, а в виде $f(x,t)$, то такая обратная задача с финальным переопределением не обладает, вообще говоря, свойством единственности точного решения. Это показывает следующий

Пример 1. Функции

$$\begin{cases} u_1(x,t)=(1+t\exp(-t))x^2(x-1)^2+t(x+1),\\ f_1(x,t)=(1-t)\exp(-t)x^2(x-1)^2-2(1+t\exp(-t))(6x^2-6x+1)+x+1,\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(x,t)=(1+t\exp(-t^2))x^2(x-1)^2+t(x+1),\\ f_2(x,t)=(1-2t^2)\exp(-t^2)x^2(x-1)^2-2(1+t\exp(-t^2))(6x^2-6x+1)+x+1\end{cases}$$

являются точными решениями обратной задачи с финальным переопределением в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1\}$:

$$\begin{gathered} u_t-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<1,\quad 0<t\leqslant 1,\\ u_x|_{x=0}=t,\quad u_x+u|_{x=1}=3t,\quad 0<t\leqslant 1,\\ u|_{t=0}=x^2(x-1)^2,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\end{gathered}$$

удовлетворяющими в конечный момент времени $t=1$ условию

$$u|_{t=1}=x^2(x-1)^2(1+e^{-1})+x+1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

т.е. для этой задачи единственность решения не имеет места.

3. Построение приближенных решений. Обратные задачи с финальным переопределением для параболических уравнений с неизвестной правой частью являются некорректно поставленными. Их точное решение даже в случае существования не обладает устойчивостью относительно погрешностей входных данных. Это демонстрирует следующий

Пример 2. Функции

$$\begin{aligned} u_n(x,t)&=n^{-1}t\sin(n(x-t-1))\exp n^2(T-t)+n^{-1}x(x-1)^2,\\ f_n(x,t)&=2n^{-1/2}(3x-2)\end{aligned}$$

при любом целом $n>0$ являются точным решением обратной задачи в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant T\}$:

$$\begin{gathered} c^n(t)u_t-a^n(t)u_{xx}=p_0^n(t)f(x)+p_1^n(x,t),\\ 0<x<1,\quad 0<t\leqslant T,\\ a^n(t)u_x|_{x=0}=q_0^n(t),\quad 0<t\leqslant T,\\ a^n(t)u_x+e^n(t)u|_{x=1}=q_1^n(t),\quad 0<t\leqslant T,\\ u|_{t=0}=\varphi^n(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\end{gathered}$$

с финальным переопределением

$$u|_{t=T}=g^n(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

где

$$\begin{gathered} a^n(t)=c^n(t)=\exp n^2(t-T),\quad p_0^n(t)=-n^{-1/2}\exp n^2(t-T),\\ p_1^n(x,t)=n^{-1}\sin(n(x-t-1))-t\cos(n(x-t-1)),\\ q_0^n(t)=n^{-1}\exp n^2(t-T)+t\cos n(t+1),\\ q_1^n(t)=t\cos(n(2-t))+n^{-1}t\sin(n(2-t)),\\ e^n(t)=\exp n^2(t-T),\quad \varphi^n(x)=n^{-1}x(x-1)^2,\\ g^n(x)=n^{-1}T\sin(n(x-T-1))+n^{-1}x(x-1)^2.\end{gathered}$$

Все входные данные этой обратной задачи — ограниченные функции своих аргументов, причем функция $g^n(x)$ сколь угодно мала при достаточно большом $n > 0$. Однако точное решение $u_n(x,t)$ может быть произвольно большим даже при значениях t, близких к T, $t < T$.

Вследствие некорректности этого класса обратных задач необходимо применять регуляризирующие методы для построения устойчивых приближенных решений. Однако некоторые известные методы существенно используют свойства параболических уравнений с постоянными или линейными коэффициентами (например, метод квазиобращения [16] и методы сведения исходной задачи к интегральному уравнению). Это ограничивает область их применения уравнениями указанных типов. Поэтому представляет интерес развитие регуляризирующих методов, позволяющих рассматривать обратные задачи для квазилинейных уравнений. Одним из таких методов является метод квазирешений [17].

3.1. Дадим обоснование применимости метода квазирешений для устойчивого приближенного решения обратной задачи (1) – (5). Ее операторное представление имеет вид

$$Af = g, \quad f \in F \subset L_2[0,l], \quad g \in G \subset L_2[0,l], \tag{27}$$

где $A : F \to G$ — нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $f \in F$ решение краевой задачи (1) – (4) $u|_{t=T}$ в конечный момент времени $t = T$. Точным решением уравнения (27) является такой элемент $f^0 \in F$, для которого $u|_{t=T}$ совпадает с заданным элементом $g \in G$.

Предположим, что входные данные обратной задачи (1) – (5) удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда возможность определения оператора A для любого $f \in F$ и принадлежность $Af \in G$ обеспечиваются выбором F и G в виде

$$F = \{f(x) \in W_2^2[0,l]\}, \quad F \subset C^1[0,l],$$
$$G = \{\omega(x) \in H^{2+\lambda}[0,l]\}.$$

Замечание 2. В силу теорем вложения [18] достаточно в качестве F выбрать пространство $W_2^{\frac{3+\lambda}{2}}[0,l]$ $(0 < \lambda < 1)$ функций $f(x)$ из $W_2^1[0,l]$, для которых обобщенные производные первого порядка удовлетворяют условию Гельдера (в смысле нормы $L_2[0,l]$) с показателем $(1+\lambda)/2$.

Вариационный подход к постановке обратной задачи (1) – (5) основан на том, что решение операторного уравнения (27) эквивалентно минимизации в F функционала

$$\inf_{f\in F} J_g(f), \quad J_g(f) = \|Af - g\|_{L_2[0,l]}.$$

Для регуляризации этой некорректной вариационной задачи воспользуемся методом квазирешений на системе расширяющихся компактных в $C^1[0,l]$ множеств F_R, где

$$F_R = \{f \in F, \ \|f\|_{W_2^2[0,l]} \leqslant R\}, \quad R = \mathrm{const} > 0.$$

Определение 2. Квазирешением уравнения (27) на множестве F_R назовем множество

$$F_R^* = \{f_R \in F_R, \ J_g(f_R) = \inf_{f\in F_R} J_g(f)\}.$$

Корректность задачи минимизации функционала $J_g(f)$ на F_R при любом фиксированном $R > 0$ и возможность построения квазирешения F_R^* (непустота F_R^*) следуют из теоремы Вейерштрасса в силу компактности в $C^1[0,l]$ множества F_R и следующего свойства функционала $J_g(f)$.

Теорема 3. *При выполнении входными данными требований теоремы* 1 *функционал* $J_g(f)$ *является непрерывным в* $C^1[0,l]$ *на множестве* F_R *и слабо непрерывным в* $W_2^2[0,l]$ *на множествах* F_R *и* F.

Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующих утверждений в [15] и основано на оценках принципа максимума для краевой задачи вида (7) – (10), в которой $\Delta f = f^n - f$, $\{f^n\} \subset F_R$ — произвольная последовательность, сходящаяся в $C^1[0,l]$ к некоторой функции $f \in F_R$, и где $\Delta u = u^n - u$, u^n и u — решения квазилинейной краевой задачи (1) – (4), соответствующие функциям $f^n(x)$ и $f(x)$ в правой части уравнения (1).

3.2. Будем предполагать, что операторное уравнение (27) при данном g имеет точное решение $f^0 \in F$, т.е. $g \in AF$, где $AF \subseteq G$ — образ множества F в G. Тогда в случае принадлежности f^0 некоторому компакту $F_{\overline{R}}$ (т.е. если $\inf_{f\in F_{\overline{R}}} J_g(f) = 0$) квазирешение $F_{\overline{R}}^*$ на этом компакте состоит из единственного элемента f^0 в силу единственности точного решения обратной задачи (1) – (5) (теорема 1). Таким образом, исходная задача сведена к вариационной задаче $\inf_{f\in F_{\overline{R}}} J_g(f)$, для которой выполнены все условия корректности в смысле А. Н. Тихонова.

Если же $f^0 \notin F_{\overline{R}}$, то любой элемент из множества квазирешений F_R^* ($\overline{R} < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^2[0,l]}$) сходится в $W_2^2[0,l]$ к f^0 при $R \to R^0$. Это утверждение формулирует следующая теорема, основанная на понятии α-сходимости множеств.

Теорема 4. *Пусть входные данные обратной задачи* (1) – (5) *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и, кроме того, при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *производные* b_u, c_u, d_u *непрерывны в смысле Гельдера по* x, t, u *с показателями* λ, $\lambda/2$, λ *соответственно,* $0 < \lambda < 1$.

Тогда квазирешение F_R^*, *определенное для любого* R, $0 < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^2[0,l]}$, *$\alpha$-сходится к точному решению* f^0 *уравнения* (27) *при* $R \to R^0$:

$$F_R^* \xrightarrow{\alpha} f^0 \ (W_2^2[0,l]). \tag{28}$$

При этом для $R \to R^0$

$$U_R^* \xrightarrow{\alpha} u^0 \ (H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})), \tag{29}$$

где $U_R^* = \{u_R(x,t)\}$ — *множество решений квазилинейной краевой задачи* (1) – (4), *соответствующее множеству* F_R^* *функций* $f_R(x)$ *в правой части уравнения* (1), $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ — *точное решение обратной задачи* (1) – (5) *в смысле определения* 1.

Доказательство утверждений (28) аналогично доказательству соответствующих утверждений в [15]. Вывод (29) основан на (28), теоремах вложения [18] и на оценках устойчивости в классах Гельдера краевой задачи (1) – (4)

$$|\Delta u|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K|\Delta f|_{[0,l]}^{\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad K = \text{const} > 0,$$

вытекающих из [13] и соотношений вида (7) – (10), в которых $\Delta u = u_R - u^0$, $\Delta f = f_R - f^0$. Как следствие теоремы 4, любой элемент из множества квазирешений $f_R \in F_R^*$ и соответствующее ему решение краевой задачи (1) – (4) являются приближениями в соответствующих классах к точному решению $\{u^0, f^0\}$ обратной задачи с финальным переопределением.

3.3. Рассмотрим вопрос устойчивости метода квазирешений при приближенном задании оператора A и правой части g в операторном представлении (27) обратной задачи.

Пусть функции a_h, b_h, c_h, d_h, φ_h, e_{ih}, q_{ih}, p_{ih} ($i = 0,\ 1$) и g_δ — достаточно гладкие приближения входных данных. Тогда вариационная постановка обратной задачи принимает вид

$$\inf_{f \in F_R} J_{g_\delta}^h(f), \quad J_{g_\delta}^h(f) = \|A_h f - g_\delta\|_{L_2[0,l]},$$

где A_h — нелинейный оператор, сопоставляющий каждому элементу $f \in F_R$ решение в конечный момент времени $u_h|_{t=T}$ краевой задачи (1) – (4) с приближенно заданными входными данными. Имеет место

Теорема 5. *Пусть гладкие приближения входных данных обратной задачи* (1) – (5) *удовлетворяют условиям теоремы* 4 *и сходятся при* $h \to 0$ *равномерно в области своего определения к соответствующим точным входным данным:*

$$a_h, a_{hx} \to a, a_x \ (H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})), \quad b_h, c_h, d_h \to b, c, d \ (H^{\lambda,\lambda/2,\lambda}(\overline{D})),$$

$$\varphi_h \to \varphi \ (H^{2+\lambda}(0,l]), \quad p_{ih} \to p_i \ (H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})),$$

$$e_{ih}, q_{ih} \to e_i, q_i \ (H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0,T]), \quad i = 0,1,$$

и пусть $g_\delta \to g$ $(L_2[0,T])$ *при* $\delta \to 0$.

Тогда квазирешение $F_{\delta hR}^*$ *на компакте* F_R, *определяемое как*

$$F_{\delta hR}^* = \{f_{\delta hR} \in F_R,\ J_{g_\delta}^h(f_{\delta hR}) = \inf_{f \in F_R} J_{g_\delta}^h(f)\},$$

при любом $R \geqslant R^0 = \|f^0\|_{W_2^2[0,l]}$ *α-сходится к точному решению* f^0 *операторного уравнения* (27) *при* $(h,\delta) \to 0$:

$$F_{\delta hR}^* \xrightarrow{\alpha} f^0 \ (C^1[0,T]).$$

При этом для $(h,\delta) \to 0$

$$U_{\delta hR}^* \xrightarrow{\alpha} u^0 \ (H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})),$$

где $\{U_{\delta hR}^*\}$ — *множество решений краевой задачи* (1) – (4) *с приближенными входными данными, получаемое при пробегании функцией* $f(x)$ *в правой части уравнения* (1) *множества* $F_{\delta hR}^*$, $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ — *точное решение обратной задачи* (1) – (5) *в смысле определения* 1.

Не останавливаясь на деталях доказательства (оно повторяет схему доказательства соответствующих утверждений в [15]), отметим только, что оно опирается в данном случае на оценки устойчивости в классах Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ для $\Delta u = u - u_h$, где $u = u(x,t)$ и $u_h = u_h(x,t)$ — решения краевой задачи (1)–(4) с точными и приближенными входными данными, соответствующие функциям $f_R(x) \in F_R^*$ и $f_{\delta hR}(x) \in F_{\delta hR}^*$ в правых частях уравнений. Эти оценки следуют из соотношений

$$c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u = p_0(x,t)\Delta f(x) + \mathcal{F}, \quad (x,t) \in Q,$$

$$a\Delta u_x - \mathcal{E}_0 \Delta u|_{x=0} = \Phi_0, \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$a\Delta u_x + \mathcal{E}_1 \Delta u|_{x=l} = \Phi_1, \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$\Delta u|_{t=0} = \varphi - \varphi_h, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

в которых $\Delta f = f_R - f_{\delta hR}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Delta u &\equiv (a\Delta u_x)_x - b\Delta u_x - (c_u u_{ht} + b_u u_{hx} + d_u)\,\Delta u, \\
\mathcal{F} &= p_1 - p_{1h} + (p_0 - p_{0h}) f_{\delta hR} + d_h - d + \\
&\quad + (a_x - a_{hx} + b_h - b)\, u_{hx} + (a - a_h) u_{hxx} + (c_h - c) u_{ht}, \\
\mathcal{E}_0 &= \{e_0 + e_{0u} u_h\}|_{x=0}, \quad \mathcal{E}_1 = \{e_1 + e_{1u} u_h\}|_{x=l}, \\
\Phi_0 &= \{(e_0 - e_{0h}) u_h + (a_h - a) u_{hx}\}\,|_{x=0} + q_0 - q_{0h}, \\
\Phi_1 &= \{(e_{1h} - e_1) u_h + (a_h - a) u_{hx}\}\,|_{x=l} + q_1 - q_{1h},
\end{aligned}$$

b, b_h, c, c_h и d, d_h — значения соответствующих функций в точке (x,t,u). Коэффициенты уравнения и граничных условий этой краевой задачи равномерно ограничены в $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$ как функции (x,t) в силу гладкости входных данных и принадлежности $u(x,t)$ и $u_h(x,t)$ классу $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$. Поэтому искомые оценки устойчивости для $\Delta u(x,t)$ имеют место как следствие известных оценок в классах Гельдера для линейных параболических уравнений [13]

$$|\Delta u|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K\big(|\Delta f|_{[0,l]}^{\lambda} + |\mathcal{F}|_Q^{\lambda,\lambda/2} + |\Phi_i|_{[0,T]}^{\lambda/2} + |\varphi - \varphi_h|_{[0,l]}^{2+\lambda}\big),$$
$$0 < \lambda < 1, \quad K = \mathrm{const} > 0$$

и предположений теоремы 5 относительно приближенных входных данных.

Замечание 3. Если не предполагать существования решения операторного уравнения (27) (что естественно в обратных задачах проектирования и управления), то, как и в [15], можно ввести понятие обобщенного квазирешения уравнения (27) на компакте F_R:

$$F_{\delta R}(\tilde{g}) = \{f \in F_R,\ J_{\tilde{g}}(f) \leqslant 2\delta\},$$

использующее лишь информацию о величинах $\tilde{g}$, δ, $J_{\tilde{g}}^*$, где $\tilde{g} \in G$ — приближенное значение правой части уравнения (27), заданное с точностью $\delta > 0$, $\|g - \tilde{g}\|_{L_2[0,l]} \leqslant \delta$, и где

$$J_{\tilde{g}}^* = \inf_{f \in F} J_{\tilde{g}}(f), \quad 0 \leqslant J_{\tilde{g}}^* \leqslant \delta \quad \forall \tilde{g} \in G, \quad g \in \overline{AF}$$

является мерой состоятельности модели (27). Очевидно, что если точное решение $f^0 \in F$ существует, то при любом $R \geqslant R^0 = \|f^0\|_{W_2^2[0,l]}$ f^0 принадлежит $F_{\delta R}(\tilde{g})$.

4. Обратная задача с финальным переопределением для линейного параболического уравнения. Остановимся кратко на достаточных условиях единственности, которые вытекают из проведенного исследования в том случае, когда обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ из условий

$$c(x,t)u_t - Lu = p_0(x,t)f(x) + p_1(x,t), \tag{30}$$
$$(x,t) \in Q = \{0 < x < l, 0 < t \leqslant T\},$$
$$a(x,t)u_x - e_0(t)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{31}$$
$$a(x,t)u_x + e_1(t)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{32}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{33}$$

и дополнительного условия (5) при $t = T$, где

$$Lu \equiv (a(x,t)u_x)_x - b(x,t)u_x - d(x,t)u,$$

$a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, d, p_i, e_i, q_i $(i = 0,1)$, φ — известные функции своих аргументов.

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности точного решения $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ в классах Гельдера принимает следующий вид.

Теорема 6. *Пусть входные данные краевой задачи* (30) – (33) *удовлетворяют требованиям гладкости и согласования, обеспечивающим существование и единственность* $u(x,t)$ *в* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ *при любой функции* $f(x) \in H^{\lambda}[0,l]$ *в правой части уравнения* (30):

$$a, a_x, b, c, d \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),$$

$$\varphi \in H^{2+\lambda}[0,l], \quad e_i, q_i \in H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0,T], \quad e_i \geqslant 0 \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$a(x,0)\varphi_x \mp e_i(0)\varphi|_{x=0,x=l} = q_i(0), \quad i = 0,1.$$

Пусть, кроме того, производные b_x *и* c_t *непрерывны в* $\overline{Q}$, *производные* e_{it} *непрерывны при* $0 \leqslant t \leqslant T$, *функция* $g(x) \in H^{2+\lambda}[0,l]$, $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ *при* $(x,t) \in \overline{Q}$.

Тогда точное решение $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ *обратной задачи* (30) – (33) *с финальным переопределением* (5) *в случае его существования единственно в классе функций*

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(x) \in H^{\lambda}[0,l].$$

Доказательство повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 1, опираясь на соотношение (16) для решения $\psi(x,t)$ сопряженной задачи, имеющей в данном случае вид

$$\big(c(x,t)\psi\big)_t + \big(a(x,t)\psi_x\big)_x + \big(b(x,t)\psi\big)_x - d(x,t)\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T,$$

$$a(x,t)\psi_x - \big(e_0(t) - b(x,t)\big)\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T,$$

$$a(x,t)\psi_x + \big(e_1(t) + b(x,t)\big)\psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t < T,$$

$$\psi|_{t=T} = \eta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

и на плотность множества $\big\{\psi(x,t)|_{t=\overline{t}}\big\}$ $(0 \leqslant \overline{t} \leqslant T)$ при пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $C^2[0,l]$. Вывод последнего утверждения основан (как и в квазилинейном случае) на теореме единственности для линейных параболических уравнений с обратным направлением времени [14]. Однако здесь в отличие от квазилинейного случая применение результатов из [14] не вызывает затруднений, достаточно лишь потребовать непрерывности производных e_{it}, $i = 0,1$.

Теорема 6 остается в силе и в том случае, когда неравенство $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ выполняется в некоторой области $Q' \subset \overline{Q}$, вне которой $p_0(x,t) = 0$ (см. замечание 1).

Заключение. Получение условий, достаточных для единственности решения, является одной из важнейших проблем в теории обратных задач для параболических уравнений. В данной статье приведены результаты исследования этой проблемы для одной из обратных задач, связанных с определением правой части для квазилинейных параболических уравнений. Исследование обратных задач из этого класса в других постановках (при различных видах граничных условий и способах задания дополнительной информации, а также в многомерном случае) предполагается представить в последующих публикациях автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Искендеров А.Д.* Об обратных краевых задачах с неизвестными коэффициентами для некоторых квазилинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1968. **178**, № 5. 999–1002.
2. *Музылев Н.В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. **20**, № 2. 386–398.
3. *Lorenzi A.* Identification of the thermal conductivity in the nonlinear heat equations // Inverse Problems. 1987. **3**, N 3. 437–451.
4. *Щеглов А.Ю.* Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения теплопроводности // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1987. № 2. 8–11.

5. *Прилепко А.И., Костин А.Б.*О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сборник. 1992. **183**, № 4. 49–68.
6. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York–Basel: Marcel Dekker, 1999.
7. *Соловьев В.В.* Обратная задача для уравнения теплопроводности с переопределением на верхней крышке // Теоретико-функциональные методы в задачах матем. физики. М.: Энергоатомиздат, 1986. 77–81.
8. *Камынин В.Л.* Об одной обратной задаче с финальным переопределением // Обратные и некорректно поставленные задачи. М.: МАКС Пресс, 2001. 36.
9. *Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.* Критерий единственности для обратной задачи с финальным переопределением // Обратные и некорректно поставленные задачи. М.: МАКС Пресс, 2001. 82.
10. *Ткаченко Д.С.* Об одной обратной задаче для параболического уравнения с финальным переопределением // Обратные и некорректно поставленные задачи. М.: МАКС Пресс, 2001. 84.
11. *Cannon J.R., DuChateau P.* Structural identification of an unknown source term in a heat equation // Inverse Problems. 1998. **14**, N 3. 535–551.
12. *Клибанов М.В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1985. **280**, № 3. 533–536.
13. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
15. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во МГУ, 1999.
16. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
17. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Труды МИ АН СССР. 1971. **112**. 232–240.
18. *Никольский М.С.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
11.03.2003