УДК 519.853.32; 517.983.54

doi 10.26089/NumMet.v16r443

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЕВЯЗКИ ДЛЯ ЗАДАЧ МИНИМИЗАЦИИ С ПОГРЕШНОСТЯМИ ИЗВЕСТНОГО УРОВНЯ В ОСЛАБЛЕННЫХ НОРМАХ

А. А. Дряженков¹

Предложен алгоритм численного решения задачи квадратичной минимизации на эллипсоиде, заданном в гильбертовом пространстве компактным оператором. Алгоритм представляет собой определенную трансформацию обобщенного метода невязки, предназначенную для применения в неклассических информационных условиях, когда априорная информация об уровне погрешности в операторе, задающем функционал, доступна лишь в нормах, ослабленных по сравнению с исходными. При этом сходимость алгоритма устанавливается в исходных нормах. Приводятся простейшие вычислительные иллюстрации.

Ключевые слова: некорректные задачи, квадратичная минимизация, эллипсоид, приближенные данные, обобщенный метод невязки.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается следующая задача квадратичной минимизации на эллипсоиде:

$$\|Au - f\|_F \rightarrow \min_{u \in U}, \quad U = \{u \in H \mid \|Bu - g\|_G \leq R\}. \quad (1)$$

Здесь H, F, G — гильбертовы пространства, $A: H \rightarrow F, B: H \rightarrow G$ — линейные ограниченные операторы, а элементы $f \in F, g \in G$ и число $R > 0$ фиксированы. Среди всех решений задачи (1) будем искать нормальное решение u_* , т. е. решение, имеющее наименьшую норму:

$$u_* = \arg \min_{u \in U_*} \|u\|_H, \quad U_* = \text{Arg} \min_{u \in U} \|Au - f\|_F.$$

Предположим, что вместо точных данных A, B, f, g, R известны лишь приближения

$$\tilde{A} \in \mathcal{L}(H \rightarrow F), \quad \tilde{B} \in \mathcal{L}(H \rightarrow G), \quad \tilde{f} \in F, \quad \tilde{g} \in G, \quad \tilde{R} > 0$$

к ним, и будем рассматривать задачу поиска приближения $\tilde{u}_*$ к нормальному решению u_* .

В приложениях встречаются ситуации, когда оператор $A: H \rightarrow F$ имеет замкнутый образ и не является компактным. В таком случае его невозможно равномерно приблизить конечномерными операторами $\tilde{A}: H \rightarrow F$ так, чтобы выполнялось условие

$$\|\tilde{A} - A\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F)} \leq h, \quad (2)$$

где $h \rightarrow 0$. Кроме того, далеко не всегда может быть доступна и априорная информация об уровне погрешности $\zeta, \|\tilde{A}u_* - Au_*\|_F \leq \zeta, \zeta \rightarrow 0$, на неизвестном точном решении u_* . При отсутствии информации об уровнях погрешностей h или ζ теряется возможность обоснованного применения к задаче (1) классических методов регуляризации, в частности обобщенного метода невязки [1, 2].

В данной работе предлагается алгоритм типа обобщенного метода невязки, который конструирует устойчивые приближения $\tilde{u}_*$ к искомому нормальному решению u_* по информации об уровнях погрешностей аппроксимации оператора A не в исходных пространствах H и F , а в измененных парах пространств, в которых для оператора A возможны ослабленные варианты оценки (2). А именно, пусть наряду с исходными гильбертовыми пространствами имеется пара вспомогательных гильбертовых пространств H^- и F^+ , связанная с H и F условиями непрерывности и плотности вложений:

$$H^- \subset H, \quad F \subset F^+, \quad (3)$$

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; аспирант, e-mail: andrja@yandex.ru

а также условием обратимости соответствующих операторов вложения. Предполагается, что для приближенных операторов $\mathcal{A}$ имеют место следующие равномерные оценки:

$$\|\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^- \rightarrow F)} \leq h_{\mathcal{A}}^-, \quad \|\tilde{\mathcal{A}} - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F^+)} \leq h_{\mathcal{A}}^+ \quad (4)$$

с известными уровнями погрешностей $h_{\mathcal{A}}^-$ и $h_{\mathcal{A}}^+$.

Заметим, что если имеет место классическое условие (2) с известным h , то имеет место и условие (4), в котором $H^- = H$, $F^+ = F$ и $h_{\mathcal{A}}^- = h_{\mathcal{A}}^+ = h$. Таким образом, условие (4) является обобщением условия (2). Напомним, что обобщенный метод невязки был введен в работе [3] как обобщение метода невязки [4, 5] на случай оператора $\mathcal{A}$, заданного с известным уровнем погрешности вида (2). Методу невязки, обобщенному методу невязки, их модификациям и их применениям к решению операторных уравнений и задач оптимизации посвящено множество работ, например [6–10]. Необходимые условия для сходимости метода невязки получены, например, в работах [11, 12]. Оценкам погрешности метода невязки и обобщенного метода невязки, а также способам их улучшения посвящены работы [13–16]. Предлагаемый в настоящей статье алгоритм является модификацией обобщенного метода невязки на случай, когда погрешности в операторе $\mathcal{A}$ задаются неклассическими условиями (4).

Замечание 1. Если приближения $\tilde{\mathcal{A}}$ сходятся к оператору $\mathcal{A}$ в паре основных пространств H и F лишь поточечно: $\|\tilde{\mathcal{A}}u - \mathcal{A}u\|_F \rightarrow 0$ для всех $u \in H$ и нет равномерной близости вида (2) с $h \rightarrow 0$, то целесообразно выбирать вспомогательные пространства H^- и F^+ так, чтобы оба вложения (3) были компактными.

2. Основные предположения. Перед описанием алгоритма численного решения задачи (1) перечислим требования, предъявляемые к исходным данным:

- A1. Задача с точными данными (1) имеет решение, т.е. множество U_* не пусто.
- A2. Допустимое множество U задачи (1) имеет непустую внутренность, т.е. существует элемент $u_0 \in H$, такой, что $\|\mathcal{B}u_0 - g\|_G < R$.
- A3. Известны гильбертовы пространства H^- и F^+ , такие, что вложения (3) непрерывны, плотны, операторы вложений обратимы, а также выполняется условие (4) с известными значениями $h_{\mathcal{A}}^-$ и $h_{\mathcal{A}}^+$.
- A4. Оператор $\tilde{\mathcal{B}}$ является приближением к $\mathcal{B}$ по норме пространства $\mathcal{L}(H \rightarrow G)$ с известным уровнем погрешности $h_{\mathcal{B}}$:

$$\|\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow G)} \leq h_{\mathcal{B}}. \quad (5)$$

- A5. Известны уровни погрешностей $\sigma_f, \sigma_g, \sigma_R$ для $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{R}$ в основных пространствах, а также уровень погрешности σ_f^+ для $\tilde{f}$ во вспомогательном пространстве F^+ :

$$\|\tilde{f} - f\|_F \leq \sigma_f, \quad \|\tilde{g} - g\|_G \leq \sigma_g, \quad |\tilde{R} - R| \leq \sigma_R, \quad \|\tilde{f} - f\|_{F^+} \leq \sigma_f^+. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение вспомогательный параметр $\varepsilon > 0$, который будет отвечать за точность приближенного решения вспомогательных задач минимизации в процессе реализации алгоритма. Определим вектор погрешностей $\delta = (h_{\mathcal{A}}^-, h_{\mathcal{A}}^+, h_{\mathcal{B}}, \sigma_f, \sigma_f^+, \sigma_g, \sigma_R, \varepsilon)$, причем для удобства изложения включим в него и параметр ε . Далее будем считать, что этот вектор параметризует приближенные данные задачи, т.е. что каждому значению вектора δ соответствует набор $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{R}$, удовлетворяющий предположениям A1–A5.

3. Описание алгоритма. Рассмотрим следующий двухшаговый алгоритм.

Первый шаг. Производится поиск оценки $\tilde{\mu}$ меры несовместности уравнения $\mathcal{A}u = f$ на множестве U [1] по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_* \leq \tilde{\mu} \leq \tilde{\mu}_* + \varepsilon, \quad \tilde{\mu}_* &= \inf_{u \in \tilde{U}^-} \left(\|\tilde{\mathcal{A}}u - \tilde{f}\|_F + h_{\mathcal{A}}^- \|u\|_{H^-} + \sigma_f \right), \\ \tilde{U}^- &= \left\{ u \in H^- \mid \|\tilde{\mathcal{B}}u - \tilde{g}\|_G \leq \tilde{R} - h_{\mathcal{B}} \|u\|_H - \sigma_g - \sigma_R \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $h_{\mathcal{A}}^-, h_{\mathcal{B}}, \sigma_f, \sigma_g, \sigma_R$ взяты из (4)–(6).

Второй шаг. Производится поиск решения $(\tilde{u}_*, \tilde{\psi}_*)$ следующей задачи:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_*\|_H &\leq \inf_{(u, \psi) \in \tilde{M}} \|u\|_H + \varepsilon, \quad (\tilde{u}_*, \tilde{\psi}_*) \in \tilde{M}, \\ \tilde{M} &= \left\{ (u, \psi) \in \tilde{U}^+ \times F \mid \|\psi\|_F \leq \tilde{\mu}, \|\tilde{\mathcal{A}}u - \tilde{f} - \psi\|_{F^+} \leq h_{\mathcal{A}}^+ \|u\|_H + \sigma_f^+ \right\}, \\ \tilde{U}^+ &= \left\{ u \in H \mid \|\tilde{\mathcal{B}}u - \tilde{g}\|_G \leq \tilde{R} + h_{\mathcal{B}} \|u\|_H + \sigma_g + \sigma_R \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь значение $\tilde{\mu}$ берется с первого шага алгоритма и $h_{\mathcal{A}}^-, h_{\mathcal{A}}^+, h_{\mathcal{B}}, \sigma_f, \sigma_g, \sigma_R, \sigma_f^+$ определены в (4)–(6). Первая компонента $\tilde{u}_*$ решения объявляется итоговым приближением к нормальному решению u_* задачи (1), а затем происходит останов.

Замечание 2. Из предположения A2 следует, что допустимое множество $\tilde{U}^-$ задачи (7) не пусто при достаточно малых уровнях погрешностей. Действительно, в силу плотности первого из вложений (3) существует близкий к u_0 элемент $u_0^- \in H^-$, такой, что $\hat{R}_0 \equiv \|\mathcal{B}u_0^- - g\|_G < R$. Для этого элемента справедлива цепочка неравенств

$$\|\tilde{\mathcal{B}}u_0^- - \tilde{g}\|_G \leq \|\mathcal{B}u_0^- - g\|_G + h_{\mathcal{B}} \|u_0^-\|_H + \sigma_g = \hat{R}_0 + h_{\mathcal{B}} \|u_0^-\|_H + \sigma_g.$$

При уровнях погрешностей, настолько малых, что $\hat{R}_0 + 2h_{\mathcal{B}} \|u_0^-\|_H + 2\sigma_g + 2\sigma_R \leq R$, элемент u_0^- заведомо будет принадлежать множеству $\tilde{U}^-$.

Замечание 3. Непустота допустимого множества $\tilde{M}$ задачи (8) следует из неравенства $\tilde{\mu} \geq \|\mathcal{A}u_* - f\|_F$ (см. ниже утверждение (10) теоремы 1).

4. Доказательство сходимости алгоритма. Доказательство сильной сходимости приближенных решений $\tilde{u}_*$ при $\delta \rightarrow 0$ будем проводить поэтапно в аналогии с доказательством сходимости обобщенного метода невязки [3]. Сначала установим связь множеств U и $\tilde{U}^-$.

Лемма 1. Пусть выполнены предположения A3–A5. Тогда справедливо вложение $\tilde{U}^- \subset U$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $u \in \tilde{U}^-$, для которого по определению $\tilde{U}^-$ выполнено $u \in H^- \subset H$, $\|\tilde{\mathcal{B}}u - \tilde{g}\|_G \leq \tilde{R} - h_{\mathcal{B}} \|u\|_H - \sigma_g - \sigma_R$. Справедлива цепочка неравенств

$$\|\mathcal{B}u - g\|_G \leq \|\tilde{\mathcal{B}}u - \tilde{g}\|_G + h_{\mathcal{B}} \|u\|_H + \sigma_g \leq \tilde{R} - \sigma_R \leq R,$$

которая означает включение $u \in U$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены предположения A2–A5. Тогда для любого элемента $u \in U$ при достаточно малых уровнях погрешностей найдется семейство элементов $\tilde{u}^- \in \tilde{U}^- \subset H^-$, параметризованное вектором δ , такое, что $\|\tilde{u}^- - u\|_H \rightarrow 0$, $h_{\mathcal{A}}^- \|\tilde{u}^-\|_{H^-} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. Из предположений A2, A3 вытекает существование элемента $u_0^- \in H^-$, такого, что $\hat{R}_0 = \|\mathcal{B}u_0^- - g\|_G < R$. В силу плотности вложения $H^- \subset H$ для любого $u \in U$ существует семейство элементов $\tilde{u} \in H^-$, параметризованное вектором δ , такое, что $\eta_H \equiv \|\tilde{u} - u\|_H \rightarrow 0$ и $h_{\mathcal{A}}^- \|\tilde{u}\|_{H^-} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Действительно, зафиксируем $u \in U$ и рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$\|v - u\|_H \rightarrow \min, \quad v \in H^-, \quad \|v\|_{H^-} \leq 1 / \sqrt{h_{\mathcal{A}}^-}.$$

Данная задача будет иметь решение в силу непрерывности первого из вложений (3) как задача минимизации слабо полунепрерывного снизу функционала на слабо компактном множестве в пространстве H^- [17].

Ее решение, которое обозначим через $\tilde{u}$, будет обладать заявленным свойством $h_{\mathcal{A}}^- \|\tilde{u}\|_{H^-} \leq \sqrt{h_{\mathcal{A}}^-} \rightarrow 0$, а также сходимостью $\|\tilde{u} - u\|_H \rightarrow 0$ в силу плотности вложения $H^- \subset H$.

Искомое семейство $\tilde{u}^- \in \tilde{U}^-$ будем строить в виде выпуклой комбинации элементов u_0^- и $\tilde{u}$, имеющей вид $\tilde{u}^- = \tilde{\alpha} u_0^- + (1 - \tilde{\alpha}) \tilde{u}$. Для выбора подходящих значений параметра $\tilde{\alpha} \in [0, 1]$ рассмотрим цепочку неравенств

$$\|\tilde{\mathcal{B}}\tilde{u}^- - \tilde{g}\|_G \leq \tilde{\alpha} \|\tilde{\mathcal{B}}u_0^- - \tilde{g}\|_G + (1 - \tilde{\alpha}) \|\tilde{\mathcal{B}}\tilde{u} - \tilde{g}\|_G \leq \tilde{\alpha} \hat{R}_0 + (1 - \tilde{\alpha}) R + \eta, \quad (9)$$

где для краткости через η обозначена бесконечно малая при $\delta \rightarrow 0$ величина, не зависящая от $\tilde{\alpha}$. Выберем $\tilde{\alpha}$ так, чтобы правая часть (9) была равна $\tilde{r} \equiv \tilde{R} - h_{\mathcal{B}} \max(\|u_0^-\|_H, \|u\|_H) - h_{\mathcal{B}} \eta_H - \sigma_g - \sigma_R$:

$$\tilde{\alpha} = \frac{R - \tilde{r} + \eta}{R - \hat{R}_0}.$$

В таком случае $\tilde{\alpha} \geq 0$ и $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, что обеспечивает при $\delta \rightarrow 0$ и включение $\tilde{\alpha} \in [0, 1]$, и сходимость $\tilde{u}^- \rightarrow u$. Заметим, что при $\tilde{\alpha} \in [0, 1]$ выполняется неравенство $\tilde{r} \leq \tilde{R} - h_B \|\tilde{u}^-\|_H - \sigma_g - \sigma_R$, а значит, и нужное нам включение $\tilde{u}^- \in \tilde{U}^-$. Последнее предельное соотношение утверждения леммы следует из неравенства $h_{\mathcal{A}} \|\tilde{u}^-\|_{H^-} \leq h_{\mathcal{A}} \|u_0^-\|_{H^-} + h_{\mathcal{A}} \|\tilde{u}\|_{H^-} \rightarrow 0$. Лемма доказана.

В следующей теореме устанавливаются некоторые свойства оценки меры несовместности $\tilde{\mu}$, полученной на первом шаге алгоритма.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения A1–A5 и допустимое множество $\tilde{U}^-$ задачи (7) не пусто. Тогда справедливы неравенство

$$\tilde{\mu} \geq \|\mathcal{A}u_* - f\|_F \quad (10)$$

и предельное соотношение

$$\tilde{\mu} \rightarrow \|\mathcal{A}u_* - f\|_F \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (11)$$

Доказательство. В силу оптимальности u_* , леммы 1 и предположений A3, A5 имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u_* - f\|_F &= \inf_{u \in U} \|\mathcal{A}u - f\|_F \leq \inf_{u \in \tilde{U}^-} \|\mathcal{A}u - f\|_F \leq \\ &\leq \inf_{u \in \tilde{U}^-} \left(\|\tilde{\mathcal{A}}u - \tilde{f}\|_F + h_{\mathcal{A}} \|u\|_{H^-} + \sigma_f \right) = \tilde{\mu}_* \leq \tilde{\mu}, \end{aligned}$$

которая приводит к (10). Для доказательства (11) рассмотрим семейство элементов $\tilde{u}_*^- \in \tilde{U}^-$ из утверждения леммы 2, приближающее нормальное решение $u_* \in U$. С его помощью, используя предположения A3 и A5, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &\leq \tilde{\mu}_* + \varepsilon \leq \|\tilde{\mathcal{A}}\tilde{u}_*^- - \tilde{f}\|_F + h_{\mathcal{A}} \|\tilde{u}_*^-\|_{H^-} + \sigma_f + \varepsilon \leq \\ &\leq \|\mathcal{A}u_* - f\|_F + 2h_{\mathcal{A}} \|\tilde{u}_*^-\|_{H^-} + 2\sigma_f + \|\mathcal{A}\| \cdot \|\tilde{u}_*^- - u_*\|_H + \varepsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу леммы 2 правая часть (12) при $\delta \rightarrow 0$ сходится к $\|\mathcal{A}u_* - f\|_F$, что вместе с (10) влечет (11). Теорема доказана.

Теперь установим сильную сходимость в пространстве H вырабатываемых алгоритмом приближений $\tilde{u}_*$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения A1–A5 и допустимое множество $\tilde{U}^-$ задачи (7) не пусто. Тогда справедливо предельное соотношение

$$\|\tilde{u}_* - u_*\|_H \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (13)$$

Доказательство. Рассмотрим следующие неравенства, вытекающие из предположений A3–A5:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{A}}u_* - \tilde{f} - (\mathcal{A}u_* - f)\|_{F^+} &\leq h_{\mathcal{A}}^+ \|u_*\|_H + \sigma_f^+, \\ \|\tilde{\mathcal{B}}u_* - \tilde{g}\|_G &\leq \|\mathcal{B}u_* - g\|_G + h_B \|u\|_H + \sigma_g \leq \tilde{R} + h_B \|u\|_H + \sigma_g + \sigma_R. \end{aligned} \quad (14)$$

Неравенства (14) и утверждение (10) теоремы 1 влекут принадлежность $(u_*, \mathcal{A}u_* - f) \in \tilde{M}$. Элементы $\tilde{u}_*$, как ε -оптимальные решения задачи (8), оказываются равномерно ограниченными: $\|\tilde{u}_*\|_H \leq \|u_*\|_H + \varepsilon$. Выделим произвольную слабую в H предельную точку $u_w \in H$ этого семейства [18] при $\delta \rightarrow 0$ и рассмотрим последовательность $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, которой соответствует слабо сходящаяся к u_w при $k \rightarrow \infty$ подпоследовательность $\tilde{u}_*|_{\delta=\delta_k}$. Для краткости будем обозначать эту подпоследовательность через $\tilde{u}_*$. В силу слабой полунепрерывности снизу нормы $\|\cdot\|_H$ [17] имеем следующую цепочку неравенств:

$$\|u_w\|_H \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_*\|_H \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_*\|_H \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\|u_*\|_H + \varepsilon_k) = \|u_*\|_H. \quad (15)$$

Из слабой в H сходимости $\tilde{u}_* \rightarrow u_*$ и (5) следует слабая в G сходимость $\tilde{\mathcal{B}}\tilde{u}_* \rightarrow \mathcal{B}u_w$, что вместе со слабой полунепрерывностью снизу нормы $\|\cdot\|_G$, принадлежностью $\tilde{u}_* \in \tilde{U}^+$ и ограниченностью $\tilde{u}_*$ влечет неравенство

$$\|\mathcal{B}u_w - g\|_G \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathcal{B}}\tilde{u}_* - \tilde{g}\|_G \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\tilde{R} + h_B \|\tilde{u}_*\|_H + \sigma_g + \sigma_R \right) = R,$$

которое означает, что $u_w \in U$. Докажем также, что u_w является решением задачи (1). Для этого из последовательности δ_k выделим подпоследовательность δ_{k_m} , для которой вторая компонента $\tilde{\psi}_*$ решения

задачи (8) слабо сходится в пространстве F к некоторому элементу $\psi_w \in F$. Существование элемента ψ_w следует из ограниченности $\tilde{\psi}_*$, которая имеет место в силу определения множества $\tilde{M}$ и (11). Для ψ_w из теоремы 1 получим следующее неравенство:

$$\|\psi_w\|_F \leq \varliminf_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}_*\|_F \leq \varliminf_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mu} = \|\mathcal{A}u_* - f\|_F. \quad (16)$$

Заметив, что $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{u}_*$ слабо сходится в пространстве F к $\mathcal{A}u_w$ при $m \rightarrow \infty$ и что из слабой сходимости в пространстве F в силу предположения А3 следует слабая сходимость в пространстве F^+ [19], получим другое неравенство

$$\|\mathcal{A}u_w - f - \psi_w\|_{F^+} \leq \varliminf_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathcal{A}}\tilde{u}_* - \tilde{f} - \tilde{\psi}_*\|_{F^+} \stackrel{(8)}{\leq} \varliminf_{m \rightarrow \infty} (h_{\mathcal{A}}^+ \|\tilde{u}_*\|_H + \sigma_f^+) = 0,$$

которое влечет равенство $\mathcal{A}u_w - f = \psi_w$ в пространстве F^+ , откуда в силу обратимости оператора второго вложения из (3) следует это же равенство в пространстве F . Пользуясь (16), получим неравенство $\|\mathcal{A}u_w - f\|_F \leq \|\mathcal{A}u_* - f\|_F$, которое вместе с включением $u_w \in U$ означает, что u_w является решением задачи (1). Поскольку u_* — нормальное решение той же задачи, то с учетом (15) имеем равенство норм

$$\|u_w\|_H = \|u_*\|_H. \quad (17)$$

Из (17) и единственности нормального решения следует равенство элементов $u_w = u_*$, а из (15) — сходимость $\|\tilde{u}_*\|_H \rightarrow \|u_w\|_H$ при $k \rightarrow \infty$, что вместе со слабой сходимостью влечет сильную сходимость $\|\tilde{u}_* - u_w\|_H = \|\tilde{u}_* - u_*\|_H \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу произвольности выбора слабой предельной точки u_w ограниченного семейства $\tilde{u}_*$ получаем заявленную сильную сходимость (13). Теорема доказана.

Замечание 4. Рассматриваемый алгоритм допускает применение и к задачам без ограничений, когда в (1) $U = H$. При этом в случае разрешимости линейного операторного уравнения $\mathcal{A}u = f$ первый шаг может быть опущен.

Замечание 5. Предложенный алгоритм допускает расширение на случай произвольного слабо замкнутого множества U , приближенное множество $\tilde{U}$ к которому известно с известной погрешностью в смысле хаусдорфова расстояния.

5. Численные эксперименты. Для демонстрации возможностей предлагаемого алгоритма рассмотрим задачу квадратичной минимизации в гильбертовом пространстве $H = l^2$ суммируемых с квадратом бесконечных числовых последовательностей $u = (u_1, u_2, \dots)$ со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_{l^2} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k, \quad u, v \in l^2.$$

Положим в исходной задаче (1) $F = l^2$, $G = \mathbb{R}$, $g = 0$ и возьмем в качестве оператора $\mathcal{A}$ единичный оператор $\mathcal{A} = \mathcal{I}$, а в качестве оператора $\mathcal{B}$ — оператор вида $\mathcal{B}u = u_1$. Задача (1) для выбранных данных примет вид

$$\|u - f\|_{l^2} \rightarrow \min, \quad u \in l^2, \quad |u_1| \leq R. \quad (18)$$

Обозначим через e_n базисные элементы пространства l^2 вида $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, где индекс позиции, в которой стоит единица, равен n , $n = 1, 2, \dots$. В качестве конечномерных приближений к оператору $\mathcal{A}$ возьмем операторы $\tilde{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}_N$, $N = 1, 2, \dots$, действующие по правилу

$$\mathcal{A}_N u = \sum_{k=1}^{N-1} u_k e_k + \mu_N u_N e_N, \quad u \in l^2, \quad 0 < \mu_N \leq 1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N = 0, \quad (19)$$

где μ_N — числовой параметр. Как и в примере 1.4.2 из [20, гл. 1], легко проверяется, что для определенных в (19) операторов классическое условие аппроксимации (2) не выполняется, $\|\mathcal{A}_N - \mathcal{A}\| = 1 \not\rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, но есть сильная поточечная сходимость: $\|\mathcal{A}_N u - \mathcal{A}u\|_{l^2} \rightarrow 0$ для всех $u \in l^2$. В качестве приближений к элементу f возьмем элементы $\tilde{f} \equiv f^N \in l^2$, отличающиеся от f добавлением шума известного уровня σ_f : $\|f^N - f\|_{l^2} \leq \sigma_f$. Данные $\mathcal{B}, g, R$, относящиеся к эллипсоидальному ограничению, возмущать не будем. Так же, как и в [20], задача (18) будет неустойчивой по отношению к возмущениям f^N , для которых $f^N/\mu_N \not\rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Теперь перейдем к описанию априорной информации, требуемой алгоритмом. Определим пространства $H^- \equiv l^2_-$ и $F^+ \equiv l^2_+$ как пространства бесконечных последовательностей $f = (f_1, f_2, \dots)$, для которых следующие ряды суммируемы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k f_k)^2 < \infty \quad \forall f \in l^2_-, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k}{k} \right)^2 < \infty \quad \forall f \in l^2_+.$$

Скалярные произведения в этих пространствах введем по следующим правилам:

$$\langle f, g \rangle_{l^2_-} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 f_k g_k, \quad \langle f, g \rangle_{l^2_+} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} f_k g_k.$$

Для такого выбора пространств H^- и F^+ справедливы компактные всюду плотные вложения (3) и равномерные оценки (4) с уровнями погрешностей $h_{\mathcal{A}}^- = h_{\mathcal{A}}^+ = 1/N$. В качестве оценки уровня погрешности σ_f^+ из (6) можно принять $\sigma_f^+ = \sigma_f$. Уровни погрешностей невозмущенных данных полагаем равными нулю: $h_{\mathcal{B}} = \sigma_f = \sigma_R = 0$. Таким образом, предположения А3–А5 выполнены. Предположение А2 выполнено для элемента $u_0 = (0, 0, \dots)$, а условие А1 следует из теоремы о существовании единственной проекции на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве [17].

При проведении расчетов в качестве f был взят элемент $f = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2) e_k$. Приближения f^N к элементу f отличались от f добавлением к N -й компоненте элемента f шума уровня σ_f : $\sigma_f = \|f^N - f\|_{l^2} = f_N^N - f_N$. Параметр μ_N из (19) был взят равным $1/N^2$, а значение R в (18) было взято равным $R = 1/2$. Нормальное решение u_* задачи (18) с точными данными находится явно:

$$u_* = f - \frac{1}{2} e_1 = \frac{1}{2} e_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} e_k.$$

Расчеты для рассматриваемой задачи проводились как предложенным в данной работе алгоритмом, так и “наивным” методом, осуществляющим непосредственное решение приближенной задачи без использования знания уровней погрешностей. В таблице приведены данные об уровнях относительных ошибок нахождения решения в процентах, где через u_*^N и $u_{\diamond}^N$ обозначены приближения к решению, вырабатываемые соответственно предложенным алгоритмом и нерегуляризованным методом. При проведении расчетов по регуляризованному алгоритму использовались квадратичные аналоги задач (7), (8), полученные из исходных невыпуклых задач закруглениями некоторых присутствующих в них малых параметров.

Относительные погрешности алгоритмов

N	$\frac{\ f^N - f\ _{l^2}}{\ f\ _{l^2}}$	$\frac{\ u_*^N - u_*\ _{l^2}}{\ u_*\ _{l^2}}$	$\frac{\ u_{\diamond}^N - u_*\ _{l^2}}{\ u_*\ _{l^2}}$
100	8%	51,39%	144547,14%
200	4%	36,11%	288920,88%
400	2%	29,53%	577668,32%
800	1%	26,67%	1155163,17%
1600	0%	7,84%	173,47%

Представленные в таблице результаты работы предложенного алгоритма не отличаются высокой точностью, но являются приемлемыми с учетом их устойчивости по отношению к возмущениям исходных данных задачи и очевидного преимущества перед абсолютно непригодными результатами применения нерегуляризованного подхода.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Михаилу Михайловичу Потапову за постановку задачи и внимание к работе и Анатолию Григорьевичу Яголе за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
2. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

3. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Об одном регуляризирующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // ЖВМ и МФ. 1972. **12**, № 6. 1592–1594.
4. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind // J. of the ACM. 1962. **9**, N 1. 84–97.
5. Иванов В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода // ЖВМ и МФ. 1966. **6**, № 6. 1089–1094.
6. Антипин А.С., Васильев Ф.П. Метод невязки для решения равновесных задач с неточно заданным множеством // ЖВМ и МФ. 2001. **41**, № 1. 3–8.
7. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю., Морозов В.А. Метод поточечной невязки для решения некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 7. 1140–1152.
8. Скарин В.Д. О применении метода невязки для коррекции противоречивых задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2014. **20**, № 2. 268–276.
9. Григорьева О.В. Метод решения обратных задач, использующий дополнительную априорную информацию // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. 2010. **2**. 9–15.
10. Leonov A.S., Yagola A.G. Special regularizing methods for ill-posed problems with sourcewise represented solutions // Inverse Problems. 1998. **14**, N 6. 1539–1550.
11. Tanana V.P. A convergence criterion for approximations in the residual method for linear ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1997. **5**, N 2. 193–204.
12. Lorenz D., Worliczek N. Necessary conditions for variational regularization schemes // Inverse Problems. 2013. **29**. doi:10.1088/0266-5611/29/7/075016.
13. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю., Морозов В.А. Оценка скорости сходимости метода невязки для задач линейного программирования с приближенными данными // ЖВМ и МФ. 1990. **30**, № 8. 1257–1262.
14. Танана В.П. Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач // ЖВМ и МФ. 1976. **16**, № 2. 503–507.
15. Leonov A.S. Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2012. **20**, N 5–6. 637–665.
16. Leonov A.S. Locally extra-optimal regularizing algorithms // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2014. **22**, N 5. 713–737.
17. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
19. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
20. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010.

Поступила в редакцию
11.07.2015

A Modified Generalized Residual Method for Minimization Problems with Errors of a Known Level in Weakened Norms

A. A. Dryazhenkov¹

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics;
Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Graduate Student, e-mail: andrja@yandex.ru*

Received July 11, 2015

Abstract: An algorithm is proposed for the numerical solution of a quadratic minimization problem on an ellipsoid specified in the Hilbert space by a compact operator. This algorithm is a certain transform of the generalized residual method designed previously for the application in nonclassical information conditions when *a priori* information on the error level in an operator defining the cost functional is available only in the norms being weaker than the original ones. At the same time, the convergence of the algorithm is proved in the original norms. A number of simple numerical examples are discussed.

Keywords: ill-posed problem, quadratic minimization, ellipsoid, approximate data, generalized residual method.

References

1. A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1995; Chapman and Hall, London, 1998).
2. A. B. Bakushinsky and A. V. Goncharsky, *Ill-Posed Problems. Numerical Methods and Applications* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1989) [in Russian].
3. A. V. Goncharsky, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, "A Certain Regularizing Algorithm for Ill-Posed Problems with an Approximately Given Operator," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **12** (6), 1592–1594 (1972) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **12** (6), 286–290 (1972)].
4. D. L. Phillips, "A Technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind," *J. ACM* **9** (1), 84–97 (1962).
5. V. K. Ivanov, "The Approximate Solution of Operator Equations of the First Kind," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **6** (6), 1089–1094 (1966) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **6** (6), 197–205 (1966)].
6. A. S. Antipin and F. P. Vasil'ev, "A Residual Method for Equilibrium Problems with an Inexactly Specified Set," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **41** (1), 3–8 (2001) [*Comput. Math. Math. Phys.* **41** (1), 1–6 (2001)].
7. F. P. Vasil'ev, A. Yu. Ivanitskii, and V. A. Morozov, "Pointwise Residual Method as Applied to Some Problems of Linear Algebra and Linear Programming," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **38** (7), 1140–1152 (1998) [*Comput. Math. Math. Phys.* **38** (7), 1090–1102 (1998)].
8. V. D. Skarin, "On the Application of the Residual Method for the Correction of Inconsistent Problems of Convex Programming," *Tr. Inst. Mat. Mekh., Ross. Akad. Nauk* **20** (2), 268–276 (2014).
9. O. V. Grigorieva, "Method of the Inverse Problem Solution Using an Additional *a priori* Information," *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Fiz.*, No. 2, 9–15 (2010).
10. A. S. Leonov and A. G. Yagola, "Special Regularizing Methods for Ill-Posed Problems with Sourcewise Represented Solutions," *Inverse Probl.* **14** (6), 1539–1550 (1998).
11. V. P. Tanana, "A Convergence Criterion for Approximations in the Residual Method for Linear Ill-Posed Problems," *J. Inv. Ill-Posed Probl.* **5** (2), 193–204 (1997).
12. D. Lorenz and N. Worliczek, "Necessary Conditions for Variational Regularization Schemes," *Inverse Probl.* **29** (2013). doi:10.1088/0266-5611/29/7/075016
13. F. P. Vasil'ev, A. Yu. Ivanitskii, and V. A. Morozov, "An Estimate of the Rate of Convergence of the Discrepancy Method for a Linear Programming Problem with Approximate Data," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **30** (4), 1257–1262 (1990) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **30** (8), 204–208 (1990)].
14. V. P. Tanana, "Optimal Order Methods of Solving Non-Linear Ill-Posed Problems," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **16** (2), 503–507 (1976) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **16** (2), 219–225 (1976)].
15. A. S. Leonov, "Extra-Optimal Methods for Solving Ill-Posed Problems," *J. Inv. Ill-Posed Probl.* **20** (5–6), 637–665 (2012).
16. A. S. Leonov, "Locally Extra-Optimal Regularizing Algorithms," *J. Inv. Ill-Posed Probl.* **22** (5), 713–737 (2014).
17. F. P. Vasil'ev, *Methods of Optimization* (Factorial Press, Moscow, 2002) [in Russian].
18. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1976; Dover, New York, 1999).
19. H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen* (Akademie Verlag, Berlin, 1974; Mir, Moscow, 1978).
20. F. P. Vasil'ev, M. A. Kurzhanskii, M. M. Potapov, and A. V. Razgulin, *Approximate Solution of Dual Control and Observation Problems* (Maks Press, Moscow, 2010) [in Russian].