УДК 519.6; 517.958:5 doi 10.26089/NumMet.v16r444

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ТОМОГРАФИИ

А. В. Гончарский[1], С. Ю. Романов[2]

Статья посвящена строгому математическому обоснованию итерационных методов решения обратных задач ультразвуковой томографии. Обратные задачи ультразвуковой томографии рассматриваются в рамках скалярной модели волнового уравнения. Эта модель учитывает такие волновые эффекты, как дифракция, рефракция и др. Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача. На строгом математическом уровне получено представление для производной Фреше функционала невязки по скорости распространения волн $c(r)$, которая характеризует неоднородную структуру объекта. Представление для производной Фреше получено как для двумерных задач, так и в трехмерном случае. Используя полученное представление для производной Фреше, авторы статьи предлагают для решения обратной задачи использовать градиентные методы минимизации функционала невязки. Предложенная в статье итерационная процедура допускает высокий уровень распараллеливания на суперкомпьютере.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, волновое уравнение, ультразвуковая томография, производная Фреше, итерационные методы.

1. Введение. Томографические исследования интенсивно развиваются в течение последних двух десятилетий. Разработаны различные типы томографических методов, включающие в себя магнитно-резонансную, позитронно-эмиссионную, оптическую томографии и др. Наибольшее распространение как в медицине, так и в промышленной диагностике получила рентгеновская томография (РТ). Разрешение современных РТ в медицине составляет 1–2 мм. Для промышленных исследований существуют томографы, разрешение которых составляет 100 мкм. Недостатком РТ в медицине является высокая лучевая нагрузка, в связи с чем РТ нельзя использовать для регулярных обследований. Современной тенденцией в медицине является ограничение использования ионизирующего излучения. В этой связи представляются актуальными работы по разработке томографических методов на основе ультразвуковых источников излучения.

Одной из важнейших проблем в медицине является ранняя диагностика заболеваний рака молочной железы. Разработку ультразвуковых томографов (УТ) для этих целей ведут научные группы США, Германии, России [1–9]. Работы проводятся уже более 10 лет и дошли до стадии макетных установок. Промышленно изготавливаемых УТ пока не существует. Одной из серьезных проблем УТ является разработка методов решения обратных задач. В отличие от РТ обратные задачи УТ являются нелинейными. Наиболее адекватной моделью является трехмерный вариант обратной задачи, когда по данным на детекторах восстанавливается трехмерный скоростной разрез, характеризующий внутреннее строение исследуемого объекта. Существуют два подхода к решению задач волновой томографии. Первый из них базируется на интегральном представлении функции Грина [10, 11]. Используя это представление, можно свести обратную задачу к системе нелинейных интегральных уравнений. Как показывают исследования, численная реализация алгоритмов приближенного решения в трехмерном случае для этого подхода требует слишком большого количества операций сложения-умножения [12–14].

Второй подход к решению обратных задач УТ базируется на дифференциальном представлении задачи. Прорывные результаты в этом подходе связаны с появлением публикаций, в которых для разных постановок дано представление для градиента функционала невязки [15–18]. В работах [13, 19] выражение для градиента функционала невязки получено для случая, когда диагностика осуществляется короткими импульсами. В этих публикациях результаты получены на физическом уровне строгости. В настоящей статье на строго математическом уровне предложено представление для производной Фреше минимизируемого функционала невязки в норме непрерывных функций.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com

Результаты настоящей статьи базируются на фундаментальных работах О. А. Ладыженской [20, 21]. В этих работах получены исчерпывающие теоремы о существовании и единственности решения для гиперболических уравнений в частных производных в соболевских пространствах. Применительно к рассматриваемой в настоящей статье задаче эти теоремы формулируются следующим образом.

Теорема 1.1 [20]. *Пусть в области $Q = \Omega \times (0,T)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N = 2,3)$ и $\partial\Omega \in C^2$, функция $u(r,t)$ удовлетворяет следующим требованиям:*

$$u_{tt}(r,t) - \sum_{i=1}^{N} \partial_i\big(a(r)\partial_i u(r,t)\big) + \left[\sum_{i=1}^{N} \partial_i\big(a(r)\big)\partial_i u(r,t)\right] + b(r)\partial_t u(r,t) = f(r,t),$$
$$u(r,t=0) = \varphi(r), \quad u_t(r,t=0) = \Phi(r), \quad u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0.$$

Пусть $f \in L_{2,1}(Q)$, $f_t \in L_{2,1}(Q)$, $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\Phi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, коэффициент $a(r)$ имеет обобщенные производные и $0 < \nu \leqslant a(r) \leqslant \mu$, $\max\limits_{\Omega}\big|\partial_i a(r), b(r)\big| \leqslant \mu_1$. Тогда существует единственное решение рассматриваемой задачи, принадлежащее $W_2^2(\Omega)$, и выполняются неравенства

$$\|u\|_{2,Q}^{(1)} \leqslant m(T)\left(\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\Phi\|_{2,\Omega} + \|f\|_{2,1,Q}\right), \quad \|u\|_{2,Q}^{(2)} \leqslant m(T)\left(\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(2)} + \|\Phi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,1,Q} + \|f_t\|_{2,1,Q}\right).$$

Здесь $W_2^q(\Omega)$ — соболевское пространство функций, имеющих обобщенные производные до порядка q из пространства $L_2(\Omega)$; $\|\cdot\|_{2,\Omega}^{(q)}$ — норма в пространстве $W_2^q(\Omega)$; $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — пространство функций из пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, имеющих нулевые граничные условия; пространство $L_{q,r}(Q)$ состоит из всех элементов $L_1(Q)$ с конечной нормой $\|u\|_{q,r,Q} = \left(\int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega |u|^q\,dx\right)^{r/q} dt\right)^{1/r}$.

Теорема 1.2 [21]. *Пусть коэффициенты уравнения $u_{tt} - a(r)\Delta u(r,t) + b(r)u_t(r,t) = f(r,t)$ имеют непрерывные производные по r до порядка $k-1$ $(k \geqslant 3)$ в цилиндре $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,T]$, $0 < v \leqslant a(r)$, свободный член $f(r,t)$ принадлежит классу $W_2^{k-1}(Q)$, а граница области Ω непрерывно дифференцируема $k+1$ раз. Пусть, далее, $\left.\dfrac{\partial^s f}{\partial t^s}\right|_{t=0} = 0$ на всей области Ω, $s = 0,\dots,k-2$. Тогда обобщенное решение $u(r,t)$ смешанной задачи для рассматриваемого уравнения при нулевых начальных и граничных условиях существует, единственно и принадлежит пространству $W_2^k(Q)$ и, следовательно, является решением почти всюду. Для решения $u(r,t)$ справедливо неравенство $\|u\|_{2,Q}^{(k)} \leqslant m(T)\Big[\|f\|_{2,Q}^{(k-1)}\Big]$.*

Как отмечено в работах Ладыженской (и это нетрудно проверить), указанные теоремы справедливы, если граничное условие Дирихле заменить условием Неймана $\partial_n u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0$.

2. Постановка прямой и обратной задачи. Рассмотрим прямую задачу Коши в $\mathbb{R}^N$, $N = 2,3$:

$$c(r)\overline{u}_{tt}(r,t) - \Delta\overline{u}(r,t) = f(r,t), \quad \overline{u}(r,t=0) - \overline{u}_t(r,t=0) = 0. \tag{1}$$

Здесь $c^{-0.5}(r) = v(r)$ — скорость волны в среде, $r \in \mathbb{R}^N$ — положение точки в пространстве, Δ — оператор Лапласа по переменной r, $f(r,t)$ — функция плотности внешней силы, возмущающей среду.

Будем считать, что $c(r) \in C^3\big(\mathbb{R}^N\big)$, $0 < \nu \leqslant c(r) \leqslant \mu$, $c(r) = c_0 = \mathrm{const}$, вне области Ω, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — выпуклая ограниченная односвязная область, причем граница области $\partial\Omega \in C^5$. Свободный член $f(r,t)$ в области $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ (для некоторого конечного T) равен 0 вне области носителя $\overline{\Omega}_1 \times (0,T)$, где $\overline{\Omega}_1 \subset \mathbb{R}^N$ — замыкание ограниченной области Ω_1. Область $\overline{\Omega}_1$ не пересекается с областью $\overline{\Omega}$, являющейся замыканием области Ω. Кроме того, пусть $f(r,t) \in W_2^3\big(\Theta_1 \times (0,T)\big)$ для любой содержащей $\overline{\Omega}_1$ ограниченной области Θ_1 с гладкой границей и $f(r,t) \equiv 0$ при $0 < t < \tau$ для некоторого малого $0 < \tau$. Здесь $W_p^q(\Omega)$ — соболевское пространство функций, имеющих обобщенные производные до порядка q из пространства $L_p(\Omega)$, $C^q(\Omega)$ — пространство q раз непрерывно дифференцируемых функций в области Ω.

Используя теорему 1.2, можно в этих предположениях показать, что существует функция $\overline{u}(r,t)$, для которой на $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ выполняются соотношения (1), причем $\overline{u}(r,t) \in W_2^4\big(\Theta_1 \times (0,T)\big)$ для любой достаточно большой ограниченной области $\Theta_1 \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей, такой, что $\Omega \subset \Theta_1$ и $\Omega_1 \subset \Theta_1$. Сказанное следует, например, из существования функции $\overline{u}(r,t) \in W_2^4\big(\Theta_1 \times (0,T)\big)$ из теоремы 1.2 при $k = 4$ для области $\Theta \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей, такой, что $\Omega \subset \Theta$ и $\Omega_1 \subset \Theta$, и настолько большой, что возмущение от источника в области $\overline{\Omega}_1$ за время T не успеет дойти до границы Θ, а в области $\left[\mathbb{R}^N/\Theta\right] \times (0,T)$ продолжаем $\overline{u}(r,t) \equiv 0$. В частности, по теореме о следе [22] существуют функции $U(s,t) = \overline{u}(r,t)\big|_{\Gamma}$ и $p(s,t) = \partial_n \overline{u}(r,t)\big|_{\Gamma}$ из $L_2(\Gamma)$ ($\Gamma = \partial\Omega \times (0,T)$).

Перейдем к постановке обратной задачи. Обратная задача — нахождение описывающей неоднородность функции $c(r)$ в области Ω по экспериментальным данным "измерения" волны $U(s,t) = \overline{u}(r,t)\big|_{\Gamma}$, $(s,t) \in \partial\Omega \times (0,T) = \Gamma$, на границе $\partial\Omega$ области Ω за время $(0,T)$ при различных положениях источника.

Математически обратная задача ставится следующим образом. Рассмотрим волновое уравнение, которое описывает акустическое поле $u(r,t)$ в области $\Omega \times (0,T) = Q$:

$$c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = 0. \tag{2}$$

Кроме того, допустим, что $u(r,t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям

$$u(r,t=0) = u_t(r,t=0) = 0, \quad \partial_n u\big|_{\Gamma} = p(s,t). \tag{3}$$

Здесь $\partial_n u\big|_{\Gamma}$ — производная вдоль нормали к гладкой поверхности $\partial\Omega \in C^5$, $p(s,t)$ — известная функция, заданная на Γ. Предполагается, что неоднородность среды вызвана изменениями скорости $c^{-0.5}(r) = v(r)$, $c(r) \in C^3\left(\mathbb{R}^N\right)$ — гладкая функция, а вне области неоднородности Ω_δ $c(r) \equiv c_0 = \mathrm{const}$, где c_0 — известна. Здесь через Ω_δ обозначены все точки Ω, отстоящие от границы $\partial\Omega$ на расстояние, большее δ, где $\delta > 0$ — фиксированная величина.

Пусть "измеренная" функция $U(s,t) \in L_2\big(\partial\Omega \times (0,T)\big) = L_2(\Gamma)$. Пусть существует обобщенное решение $u(r,t) \in W_2^1(Q)$ задачи (2), (3) для любой функции $c(r) \in Y$ для некоторого множества функций Y. Существование обобщенного решения для любой функции из некоторого множества Y будет доказано. По теореме о следе для функции $u(r,t) \in W_2^1(Q)$ существует ограниченный линейный оператор $Tu \to u\big|_{\Gamma} \in L_2\big(\partial\Omega \times (0,T)\big)$. Введем функционал невязки на Y:

$$\Phi\big(u(c)\big) = \frac{1}{2}\left\| u\big|_{\Gamma} - U \right\|_{2,\Gamma}^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_S \big(u(s,t) - U(s,t)\big)^2\, ds\, dt. \tag{4}$$

Здесь $u(c)$ — решение задачи (2), (3) при некотором $c(r)$, $\|\cdot\|_{2,\Gamma}^2$ — квадрат нормы в пространстве $L_2(\Gamma)$. Обратная задача ставится как задача поиска функции $\overline{c}(r) \in Y$, минимизирующей функционал невязки

$$\overline{c}(r) : \min_{c(r)\in Y} \Phi\big(u(c)\big) = \Phi\Big(u\big(\overline{c}\big)\Big) \tag{5}$$

для множества функций Y.

3. Итерационные алгоритмы решения обратных задач. В качестве приближенного метода решения обратной задачи используются итерационные градиентные методы минимизации функционала невязки. Основными результатами работы являются доказательство дифференцируемости по Фреше функционала невязки (теорема 3.1) и полученное представление для производной по Фреше этого функционала (теорема 3.2).

Рассмотрим вопрос дифференцируемости по Фреше функционала $\Phi : c(r) \in Y \to \mathbb{R}^1$, задаваемого выражением (4), на некотором множестве Y и найдем его производную. Пусть заданная на границе Γ функция $p(s,t)$ такова, что существует функция $F(r,t)$, такая, что

$$F(r,t) \in W_2^4(Q), \quad \partial_n F\big|_{\Gamma} = p(s,t), \quad \partial_t^j F(r,0) = 0 \quad \text{при} \quad r \in \Omega, \quad j = 0,1,2,3. \tag{6}$$

Если $p(s,t) = \partial_n \overline{u}(r,t)\big|_{\Gamma}$, где $\overline{u}(r,t)$ — решение прямой задачи Коши (1), то существование такой функции $F(r,t)$ следует из существования $\overline{u}(r,t) \in W_2^4\big(\Omega \times (0,T)\big)$ — решения прямой задачи Коши (1), где полагаем $F(r,t) = \overline{u}(r,t)$. Условие $\partial_t^j F(r,0) = 0$ при $r \in \Omega$ выполняется, так как носитель $f(r,t)$ не пересекается с областью $\overline{\Omega}$ и возбуждение распространяется с конечной скоростью. Другой вариант построения функции $F(r,t)$ состоит, например, в продолжении достаточно гладкой функции $p(r,t)$ с границы $\partial\Omega$ на всю область Ω методами построения, изложенными в разделе 3.4 [21].

Пусть нормированное пространство Z состоит из таких элементов $dc(r) \in C^3\left(\overline{\Omega}\right)$, что $dc(r) = 0$ в пограничной полосе $\overline{\Omega}/\Omega_\delta$ ширины $\delta > 0$, а норма задается как норма $dc(r)$ в $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Здесь, как и выше, через Ω_δ обозначены все точки области Ω, отстоящие от границы $\partial\Omega$ на расстояние, большее δ, где $\delta > 0$ — фиксированная величина.

Возьмем функцию $c_0(r) = c_0 = \mathrm{const}$ при $r \in \overline{\Omega}$. Определим множество $Y \subset C^3\left(\overline{\Omega}\right)$ на многообразии $c_0(r) + Z$, состоящее из таких $c(r) \in c_0(r) + Z$, для которых $0 < c_1 < c(r)$ в $\overline{\Omega}$ ($c_1 \leqslant 1$). Таким образом, функция $c(r)$ равна константе c_0 в пограничной полосе $\overline{\Omega}/\Omega_\delta$ ширины $\delta > 0$.

Назовем ε-окрестностью $O_\varepsilon\big(c(r)\big)$ функции $c(r) \in Y$ множество таких функций $c_\varepsilon(r)$, для которых $c(r) - c_\varepsilon(r) = dc(r) \in Z$ и $\max\limits_{r\in\Omega}\big|c(r) - c_\varepsilon(r)\big|$ меньше ε. Очевидно, что для любого $c(r) \in Y$ существует ε-окрестность $O_\varepsilon\big(c(r)\big) \subset Y$ для некоторого $0 < \varepsilon$. Это следует из того, что в силу непрерывности $c(r)$ на $\overline{\Omega}$ для выбранной $c(r)$ можно найти значение ε, такое, что $0 < c_1 < c(r) - \varepsilon$, а значит, $c_1 < c_\varepsilon(r)$ и $\big(c_\varepsilon(r)\big) \in Y$.

Прежде чем доказывать основные теоремы, предварительно докажем лемму 1. В работе [23] приведена похожая лемма при отличающихся условиях. Рассмотрим задачу на введенной выше области Q:

$$c(r)v_{tt} - \Delta v = f(r,t), \quad v(r,t=0) = v_t(r,t=0) = 0, \quad \partial_n v\big|_\Gamma = 0. \tag{7}$$

Лемма 1. *На области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ рассмотрим функции $c(r)$, такие, что $c(r) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < c_1 < c(r)$, в Ω ($c_1 \leqslant 1$), и функции $f(r,t) \in L_2(Q)$. Пусть существуют решения задачи (7) $v(r,t) \in W_2^2(Q)$ для этих $c(r)$ и $f(r,t)$. Тогда существует число E_1, не зависящее от $c(r)$ и $f(r,t)$, такое, что для любого $c(r)$ и $f(r,t)$ из условия леммы верна равномерная оценка $\|v\|_{2,Q}^{(1)} \leqslant E_1 \|f\|_{2,Q}$, где $\|\cdot\|_{2,Q}^{(k)}$ — норма в пространстве $W_2^k(Q)$.*

Доказательство. Умножим уравнение задачи (7) на v_t и проинтегрируем по $\Omega \times (0,\tau)$, где $\tau \in (0,T]$. Получим

$$\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau \big(c(r)v_{tt}v_t - v_t\Delta v\big)\,dr\,dt = \int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau (v_t, f)\,dr\,dt. \tag{8}$$

Преобразуем каждое слагаемое левой части уравнения (8) по отдельности. Имеем

$$\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau c(r)v_{tt}v_t\,dr\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau c(r)\partial_t\big((v_t)^2\big)\,dr\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega c(r)\big(v_t(r,\tau)\big)^2 dr, \tag{9}$$

так как $v_t(r,0)$. Кроме того,

$$\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau v_t\Delta v\,dr\,dt = \int\limits_S\int\limits_0^\tau v_t\partial_n v\,dr\,dt - \int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau \nabla v_t\cdot\nabla v\,dr\,dt = -\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau \nabla v_t\cdot\nabla v\,dr\,dt,$$

так как на $\partial\Omega$ $\partial_n v = 0$. Интегрируя в последнем равенстве по t по частям, имеем

$$\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau v_t\Delta v\,dr\,dt = -\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau \nabla v_t\cdot\nabla v\,dr\,dt = -\int\limits_\Omega \nabla v(r,\tau)\cdot\nabla v(r,\tau)\,dr + \int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau \nabla v\cdot\nabla v_t\,dr\,dt.$$

Складывая последние два равенства, получим

$$\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau v_t\Delta v\,dr\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \nabla v(r,\tau)\cdot\nabla v(r,\tau)\,dr. \tag{10}$$

Из неравенства Коши заключаем, что

$$\int\limits_\Omega v^2(r,\tau)\,dr = 2\int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau v(r,\tau)v_t(r,\tau)\,dr\,dt \leqslant 2\int\limits_0^\tau \big\|v(t)\big\|_{2,\Omega}\big\|v_t(t)\big\|_{2,\Omega}\,dt. \tag{11}$$

Подставив (9) и (10) в (8), получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega c(r)\big(v_t(r,\tau)\big)^2 dr + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \nabla v(r,\tau)\cdot\nabla v(r,\tau)\,dr = \int\limits_\Omega\int\limits_0^\tau \big(v_t(r,t)f(r,t)\big)\,dr\,dt.$$

Умножим на 2, добавим (11) и используем неравенство Коши:

$$\int\limits_{\Omega}\big(v(r,\tau)\big)^2\,dr + c_1\int\limits_{\Omega}\big(v_t(r,\tau)\big)^2\,dr + \int\limits_{\Omega}\nabla v(r,\tau)\cdot\nabla v(r,\tau)\,dr \leqslant \\ \leqslant 2\int\limits_0^{\tau}\big\|v_t(t)\big\|_{2,\Omega}\big\|f(t)\big\|_{2,\Omega}\,dt + 2\int\limits_0^{\tau}\big\|v(t)\big\|_{2,\Omega}\big\|v_t(t)\big\|_{2,\Omega}\,dt. \tag{12}$$

Обозначим

$$V(\tau)=\int\limits_{\Omega}\big(v(r,\tau)\big)^2\,dr + \int\limits_{\Omega}\big(v_t(r,\tau)\big)^2\,dr + \int\limits_{\Omega}\nabla v(r,\tau)\cdot\nabla v(r,\tau)\,dr = \big\|v(\tau)\big\|^2_{2,\Omega} + \big\|v_t(\tau)\big\|^2_{2,\Omega} + \big\|\nabla v(\tau)\big\|^2_{2,\Omega},$$

тогда выражение слева в (12) больше, чем $c_1V(\tau)$, а справа, используя неравенство $2xy \leqslant x^2+y^2$ и добавляя $\dfrac{1}{c_1}\displaystyle\int\limits_0^{\tau}\Big(\big\|v(t)\big\|^2_{2,\Omega}+2\big\|\nabla v(\tau)\big\|^2_{2,\Omega}\Big)\,dt \geqslant 0$, сведем к виду

$$V(\tau)=\frac{1}{c_1}\left(\int\limits_0^{\tau}\big\|v_t(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt + \int\limits_0^{\tau}\big\|f(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt + \int\limits_0^{\tau}\big\|v(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt + \int\limits_0^{\tau}\big\|v_t(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{c_1}\int\limits_0^{\tau}\Big\{\big\|f(t)\big\|^2_{2,\Omega}+\big\|v(t)\big\|^2_{2,\Omega}+2\big\|v_t(t)\big\|^2_{2,\Omega}+\big\|v(t)\big\|^2_{2,\Omega}+2\big\|\nabla v(\tau)\big\|^2_{2,\Omega}\Big\}\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{c_1}\int\limits_0^{\tau}\big\|f(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt + \frac{2}{c_1}\int\limits_0^{\tau}V(t)\,dt.$$

Используя лемму Гронуолла [22], получим

$$V(\tau)\leqslant \frac{2}{c_1}\int\limits_0^{\tau}V(t)\,dt + \frac{1}{c_1}\int\limits_0^{\tau}\big\|f(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt \leqslant \frac{1}{c_1}\int\limits_0^{\tau}\big\|f(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt\left(1+\frac{2}{c_1}\,\tau\exp\left\{\frac{2}{c_1}\,\tau\right\}\right).$$

Интегрируя по τ на отрезке $[0,T]$, имеем

$$\Big(\|v\|^{(1)}_{2,Q}\Big)^2 = \|v\|^2_{2,Q}+\|v_t\|^2_{2,Q}+\|\nabla v\|^2_{2,Q} = \int\limits_0^{T}\big\|v(\tau)\big\|^2_{2,\Omega}+\big\|v_t(\tau)\big\|^2_{2,\Omega}+\big\|\nabla v(\tau)\big\|^2_{2,\Omega}\,d\tau \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^{T}\frac{1}{c_1}\int\limits_0^{T}\big\|f(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt\left\{1+\frac{2}{c_1}\,\tau\exp\left(\frac{2}{c_1}\,\tau\right)\right\}d\tau \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^{T}\big\|f(t)\big\|^2_{2,\Omega}\,dt\int\limits_0^{T}\frac{1}{c_1}\left(1+\frac{2}{c_1}\,\tau\exp\left\{\frac{2}{c_1}\,\tau\right\}\right)d\tau \leqslant \big\|f(t)\big\|^2_{2,\Omega}E,$$

или $\|v\|^{(1)}_{2,Q}\leqslant E_1\|f\|_{2,Q}$. Лемма 1 доказана.

Теорема 3.1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $N=2,3$, — выпуклая ограниченная односвязная область, причем граница области $\partial\Omega\in C^5$. Рассмотрим задачу* (2), (3), *где для $p(r,t)$ выполняется условие* (6). *Тогда для любой $c(r)\in Y$ существует единственное обобщенное решение $u(r,t,c)\in W^1_2(Q)$ задачи* (2), (3). *Отображение $D : c(r)\in Y\to u(r,t,c)\in W^1_2(Q)$ дифференцируемо по Фреше для любой $c(r)\in Y$, где производная по Фреше $\widetilde{u}(r,t,c,dc)$ есть линейный оператор из нормированного пространства Z в $W^1_2(Q)$. Кроме того, является дифференцируемым по Фреше и функционал $\Phi : c(r)\in Y\to\mathbb{R}^1$, задаваемый выражением* (4).

Доказательство. Докажем существование отображения $D : c(r)\in Y\to u(r,t,c)\in W^1_2(Q)$. Используя функцию $F(r,t)$ из условия (6), можно свести поиск $u(r,t)$ решения задачи (2), (3) при произвольном фиксированном $c(r)\in Y$ к задаче поиска $v(r,t)$ — решения задачи

$$c(r)v_{tt}(r,t)-\Delta v(r,t)=c(r)F_{tt}(r,t)-\Delta F(r,t),\quad v(r,t=0)=v_t(r,t=0)=0,\quad \partial_n v\big|_{\Gamma}=0. \tag{13}$$

Тогда $u(r,t) = v(r,t) + F(r,t)$ будет решением задачи (2), (3).

Заметим, что поскольку $F(r,t) \in W_2^4(Q)$ и $c(r) \in C^3\left(\overline{\Omega}\right)$, то $c(r)F_{tt}(r,t) - \Delta F(r,t) \in W_2^2(Q)$. Кроме того, $\partial_t^j\big(c(r)F_{tt}(r,0) - \Delta F(r,0)\big) = 0$ $(j = 0, 1)$ в силу (6).

Тогда из теоремы 1.2 (с граничными условиями Неймана) следует, что существует единственное решение задачи (13) $v(r,t) \in W_2^3(Q)$. А значит, $u(r,t) = v(r,t) + F(r,t)$ является единственным решением задачи (2), (3) и $u(r,t) \in W_2^3(Q)$.

Таким образом, в условиях теоремы 3.1 для произвольного $c(r) \in Y$ существует единственное решение задачи (2), (3). Это определяет оператор $D:\ c(r) \in Y \to u(r,t,c) := u(c) \in W_2^3(Q)$.

Определим линейный и ограниченный оператор $\widetilde{D}:\ dc \in Z \to \widetilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^1(Q)$ для произвольного $c(r) \in Y$ следующим образом. Рассмотрим для $c(r)$ и $u(r,t,c)$ следующую задачу

$$c(r)v_{tt} - \Delta v = -u_{tt}(r,t,c)dc(r), \tag{14}$$

$$v(r,t=0) = v(r,t=0) = 0, \quad \partial_n v\big|_\Gamma = 0 \tag{15}$$

для произвольного $dc(r) \in Z$. Преобразуем уравнение (14). Поскольку $0 < c_1 < c(r)$, то можно поделить (14) на $c(r)$:

$$v_{tt}(r,t) - c^{-1}(r)\Delta v(r,t) = -c^{-1}(r)u_{tt}(r,t,c)\,dc(r).$$

Для достаточно гладких функций $c(r)$ и $v(r,t)$, как известно, можно записать $\nabla\cdot\big(c^{-1}\nabla v\big) = \nabla\big(c^{-1}\big)\nabla v + c^{-1}\Delta v$. Перейдем к эквивалентному уравнению для обобщенного решения, где по условию $c(r) \in C^3\left(\overline{\Omega}\right)$:

$$v_{tt}(r,t) - \nabla\cdot\big(c^{-1}(r)\nabla v(r,t)\big) + \nabla\big(c^{-1}(r)\big)\nabla v(r,t) = -c^{-1}(r)u_{tt}(r,t,c)\,dc(r).$$

Заметим, что $c^{-1}(r)u_{tt}(r,t,q)dc(r) \in L_2(Q)$ и $c^{-1}(r)u_{ttt}(r,t,q)dc(r) \in L_2(Q)$. Поскольку $c(r) \in Y \subset C^3\left(\overline{\Omega}\right)$ и $0 < c_1 < c(r)$, то выполнены условия теоремы 1.1 (с граничными условиями Неймана).

Из теоремы 1.1 следует, что существует единственное решение задачи (14), (15) для произвольного $dc \in Z$. Обозначим это решение через $\widetilde{u}(r,t,c,dc)$. Кроме того, $\widetilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^2(Q)$ и выполняется оценка

$$\begin{aligned}\big\|\widetilde{u}(r,t,c,dc)\big\|_{2,Q}^{(2)} &\leqslant E_2\Big(\big\|c^{-1}u_{tt}(q)dc\big\|_{2,Q} + \big\|c^{-1}u_{ttt}(q)dc\big\|_{2,Q}\Big) \leqslant \\ &\leqslant E_2c_1^{-1}\Big(\big\|u_{tt}(c)\big\|_{2,Q} + \big\|u_{ttt}(c)\big\|_{2,Q}\Big)\|dc\|_C \leqslant \\ &\leqslant E_2c_1^{-1}4\big\|u(c)\big\|_{2,Q}^{(3)}\|dc\|_Z \leqslant E_3\big\|u(c)\big\|_{2,Q}^{(3)}\|dc\|_Z,\end{aligned} \tag{16}$$

где константа E_3 не зависит от dc и $\|\cdot\|_{2,Q}^{(k)}$ — норма в пространстве $W_2^k(Q)$.

Кроме того, поскольку $c^{-1}(r)u_{tt}(r,t,q)dc(r)$ линейно зависит от dc, то и $\widetilde{u}(r,t,c,dc)$ линейно зависит от dc. Таким образом, определен линейный и ограниченный оператор $\widetilde{D}:\ dc \in Z \to \widetilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^1(Q)$.

Покажем, что отображение $\widetilde{D}:\ dc \in Z \to \widetilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^1(Q)$ является производной по Фреше для отображения $D:\ c \in Y \to u(r,t,c) \in W_2^1(Q)$ для выбранного $c(r) \in Y$.

Рассмотрим ε-окрестность $O_\varepsilon(c) \subset Y$ элемента $c(r)$. Обозначим через $u(r,t,c+dc) = u(c+dc)$ решение задачи (2), (3) для $c+dc \in O_\varepsilon(c)$. Далее, для $u(q+dq)$, $u(c)$ и $\widetilde{u}(c,dc)$, используя (2), (14), можно записать

$$\begin{aligned}&(c+dc)u_{tt}(c+dc) - cu_{tt}(c) - c\widetilde{u}_{tt}(c,dc) - \Delta u(c+dc) + \Delta u(c) + \Delta\widetilde{u}(c,dc) = dc\,u_{tt}(c),\\ &(c+dc)\partial_{tt}\big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\big) + dcu_{tt}(c) + dc\widetilde{u}_{tt}(c,dc) - \Delta\big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\big) = dc\,u_{tt}(c).\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\big[(c+dc)\partial_{tt} - \Delta\big]\big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\big) = -dc\widetilde{u}_{tt}(c,dc). \tag{17}$$

Из (3), (15) следует, что граничные и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned}&\big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\big)(r,t=0) = 0, \quad \partial_t\big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\big)(r,t=0) = 0,\\ &\partial_n\big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\big)\big|_\Gamma = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, для любого $c+dc \in O_\varepsilon(c) \subset Y$ функция $\big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\big)$ является решением задачи (17), (18).

Поскольку $u(c+dc) \in W_2^3(Q)$, $u(c) \in W_2^3(Q)$ и $\widetilde{u}(c,dc) \in W_2^2(Q)$, то $\big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\big) \in W_2^2(Q)$ и $-dc\widetilde{u}_{tt}(c,dc) \in L_2(Q)$. Тогда согласно лемме 1 выполняется равномерная оценка для всех $c+dc \in O_\varepsilon(c)$:

$$\Big\|\Big(u(c+dc) - u(c) - \widetilde{u}(c,dc)\Big)\Big\|_{2,Q}^{(1)} \leqslant E_1\big\|-dc\widetilde{u}_{tt}(c,dc)\big\|_{2,Q} \leqslant$$

$$\leqslant E_1\|dc\|_C\big\|\widetilde{u}(c,dc)\big\|_{2,Q}^{(2)} \leqslant E_1E_3\|dc\|_C\big\|u(c)\big\|_{2,Q}^{(3)}\|dc\|_Z \leqslant E_4\big\|u(c)\big\|_{2,Q}^{(3)}\|dc\|_Z^2,$$

где использовано неравенство (16), $\|\cdot\|_Z$ — норма в пространстве Z. Поскольку последний член имеет второй порядок малости по dc, то отображение $D\,:\,c \in Y \to u(r,t,c) \in W_2^1(Q)$ дифференцируемо по Фреше для выбранной $c \in Y$, а линейный оператор $\widetilde{D}\,:\,dc \in Z \to \widetilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^1(Q)$ является его производной.

Докажем дифференцируемость функционала $\Phi\big(u(c)\big)$ для выбранного $c \in Y$. По теореме о следе [22] для функции $u(r,t) \in W_2^1(Q)$ существует ограниченный линейный оператор $Tu \to u\big|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$. Тогда, используя теорему о дифференцировании сложной функции, для $U(s,t) \in L_2(\Gamma)$ получим дифференцируемость по Фреше функции $\Phi\big(u(c)\big)$, а производная примет вид

$$\Phi'\big(u(c),dc\big) = \int\limits_\Gamma \Big(u(c)\big|_\Gamma - U\Big)\bigg(\Big(u(c)\big|_\Gamma\Big)', dc\bigg) ds\,dt = \int\limits_\Gamma \Big(u(c)\big|_\Gamma - U\Big)\widetilde{u}(c,dc)\big|_\Gamma\, ds\,dt. \tag{19}$$

Теорема 3.1 доказана.

Рассмотрим задачу, которую назовем “сопряженной” к основной задаче (2), (3):

$$c(r)w_{tt}(r,t) - \Delta w(r,t) = 0, \tag{20}$$

$$w(r,t=T) = w_t(r,t=T) = 0, \quad \partial_n w\big|_\Gamma = u\big|_\Gamma - U. \tag{21}$$

Здесь u — решение основной задачи (2), (3), $U(s,t)$ соответствует экспериментальным данным “измерения” волны $\overline{u}(r,t)\big|_\Gamma$ прямой задачи (1).

Пусть заданная на границе $\partial\Omega$ функция $U(r,t)$ такова, что существует функция $H(r,t)$, такая, что

$$H(r,t) \in W_2^3(Q), \quad \partial_n H\big|_\Gamma = U(r,t). \tag{22}$$

Если $U(s,t) = \overline{u}(r,t)\big|_\Gamma$, где $\overline{u}(r,t)$ — решение прямой задачи Коши (1), то существование такой функции $H(r,t)$ следует из существования $\overline{u}(r,t) \in W_2^4\big(\Omega \times (0,T)\big)$ — решения прямой задачи (1), если положить $H(r,t) = b(r)\overline{u}(r,t)$. Здесь $b(r) \in C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)$ такова, что $b(r)\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\partial_n b(r)\big|_{\partial\Omega} = 1$. (По поводу построения такой функции $b(r)$ смотри, например, [17].) Другой вариант построения функции $H(r,t)$ состоит, например, в продолжении достаточно гладкой функции $U(r,t)$ с границы $\partial\Omega$ на всю область Ω методами построения, изложенными в [21, раздел 3.4].

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и для* $U(r,t)$ *выполняется условие* (22). *Тогда производная по Фреше для функционала* $\Phi\big(u(c)\big)\,:\,c \in Y \to \mathbb{R}^1$, *задаваемого выражением* (4), *имеет вид*

$$\Phi'\big(u(c),dc\big) = \int\limits_\Gamma \Big(u(c)\big|_\Gamma - U\Big)\widetilde{u}(c,dc)\big|_\Gamma ds\,dt = \int\limits_\Omega \left\{\left[\int\limits_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)\,dt\right] dc(r)\right\} dr, \tag{23}$$

где u *— решение основной задачи* (2), (3), *а* w *— решение “сопряженной” задачи* (20), (21). *Здесь производная по Фреше является линейным оператором из нормированного пространства* Z *в* $\mathbb{R}^1$.

Доказательство. В теореме 3.1 доказано, что функционал $\Phi\big(u(c)\big)$ дифференцируем по Фреше и производная имеет вид (19). Докажем существование и единственность решения задачи (20), (21). Используя функцию $H(r,t)$, сведем задачу (20), (21) при фиксированном $c \in Y$ к решению задачи с нулевыми граничными условиями:

$$c(r)v_{tt}(r,t) - \Delta v(r,t) = \big(c(r)\partial_{tt} - \Delta\big)\big(b(r)u(r,t,c) - H(r,t)\big), \quad v(r,t=T) = v_t(r,t=T) = 0, \quad \partial_n v\big|_\Gamma = 0.$$

Здесь $u(r,t,c)$ — решение основной задачи (2), (3). Тогда $w(r,t) = v(r,t) + \big(b(r)u(r,t,q) - H(r,t)\big)$ будет решением задачи (20), (21). Заметим, что $\partial_n w\big|_\Gamma = \partial_n v\big|_\Gamma + (\partial_n bu + b\partial_n u - \partial_n H)\big|_\Gamma = (u-U)\big|_\Gamma$.

Поскольку $H(r,t) \in W_2^3(Q)$ и $u(r,t,q) \in W_2^3(Q)$, то $\big(c(r)\partial_{tt} - \Delta\big)\big(b(r)u(r,t,q) - H(r,t)\big) \in W_2^1(Q)$.

Тогда, согласно теореме 1.2, существует единственное решение $v(r,t) \in W_2^2(Q)$, а значит, и решение $w(r,t) \in W_2^2(Q)$ задачи (20), (21).

Рассмотрим соотношения для $w(r,t) \in W_2^2(Q)$ и $\widetilde{u}(r,t,c,dc)$, где $\widetilde{u}(r,t,c,dc) \in W_2^2(Q)$ по переменным (r,t) является решением задачи (14), (15) для произвольного $dc \in Z$. В этих соотношениях используем формулы (15), (20), (21) и правила дифференцирования по частям для пространств $W_2^2(Q)$, которые следуют, например, из формул (6.21), (6.22) из [20] и теоремы о следе. Обозначив $\widetilde{u}(r,t,c,dc)$ через $\widetilde{u}(r,t)$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\Omega T} \big(c(r)w_{tt}(r,t) - \Delta w(r,t)\big)\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt = \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T c(r)w_{tt}(r,t)\widetilde{u}(r,t)\,dt\,dr - \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \Delta w(r,t)\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt = \\ &= -\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T c(r)w_t(r,t)\widetilde{u}_t(r,t)\,dt\,dr - \int\limits_0^T\int\limits_S \partial_n w(s,t)\widetilde{u}(s,t)\,ds\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt = \\ &= -\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T c(r)w_t(r,t)\widetilde{u}_t(r,t)\,dt\,dr - \int\limits_{\Gamma} \big(u(s,t) - U(s,t)\big)\widetilde{u}(s,t)\,ds\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, из (24) получим

$$\int\limits_{\Gamma} \big(u(s,t) - U(s,t)\big)\widetilde{u}(s,t)\,ds\,dt = -\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T c(r)w_t(r,t)\widetilde{u}_t(r,t)\,dt\,dr + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt. \tag{25}$$

Далее, поскольку $u(r,t) \in W_2^3(Q)$, рассмотрим следующие соотношения, в которых используем формулы (3), (14) и (21):

$$\begin{aligned} \int\limits_Q w(r,t)\big(c(r)\widetilde{u}_{tt}(r,t) - \Delta\widetilde{u}(r,t)\big)\,dr\,dt &= -\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T w(r,t)u_{tt}(r,t)dc(r)\,dt\,dr = \\ &= \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)\,dt\,dr. \end{aligned} \tag{26}$$

С другой стороны, используя соотношения (15) и (21), имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_Q w(r,t)\big(c(r)\widetilde{u}_{tt}(r,t) - \Delta\widetilde{u}(r,t)\big)\,dr\,dt &= \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T w(r,t)c(r)\widetilde{u}_{tt}(r,t)\,dt\,dr - \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} w(r,t)\Delta\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt = \\ = -\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T c(r)w_t(r,t)\widetilde{u}_t(r,t)\,dt\,dr &- \int\limits_0^T\int\limits_S w(s,t)\partial_n\widetilde{u}(s,t)\,ds\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt = \\ = -\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T c(r)w_t(r,t)\widetilde{u}_t(r,t)\,dt\,dr &+ \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt. \end{aligned} \tag{27}$$

Из (26) и (27) получаем

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)\,dt\,dr = -\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T c(r)w_t(r,t)\widetilde{u}_t(r,t)\,dt\,dr + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\widetilde{u}(r,t)\,dr\,dt. \tag{28}$$

Тогда из (19), (25) и (28) имеем

$$\Phi'\big(u(c),dc\big)=\int\limits_{\Gamma}\Big(u(c)\big|_{\Gamma}-U\Big)\widetilde{u}(c,dc)\big|_{\Gamma}\,ds\,dt=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)\,dt\,dr=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\int\limits_{0}^{T}w_t(r,t)u_t(r,t)\,dt\right]dc(r)\right\}dr.$$

Здесь $u(r,t)$ — решение основной задачи (2), (3), а $w(r,t)$ — решение “сопряженной” задачи (20), (21) при заданном c. Таким образом, производная функционала выражается через решения основной и “сопряженной” задач. Теорема 3.2 доказана.

Замечание 1. В приведенной выше постановке обратной задачи (2), (3) использовалось граничное условие (3): $\partial_n u(r,t)\big|_{\Gamma}=p(s,t)$, где $p(s,t)$ — некоторая известная функция. Функцию $p(s,t)$ можно пытаться измерить в эксперименте, а можно вычислить по экспериментальным данным $U(s,t)$ на границе Γ, воспользовавшись следующей процедурой. Для этого, например, решаем задачу (1) для области $\Theta/\Omega\times(0,T)$ (при настолько большом значении Θ, $\Omega\subset\Theta$, что возмущение от источника в области $\overline{\Omega}_1$ за время T не успеет дойти до границы Θ) с граничными значениями $U(s,t)$ на $\partial\Omega\times(0,T)$ и нулевыми граничными значениями на $\partial\Theta\times(0,T)$ для известного свободного члена $f(r,t)$. В результате решения получим $\overline{u}(r,t)$ на $\Theta/\Omega\times(0,T)$, из которой можно найти $p(s,t)=\partial_n\overline{u}(r,t)\big|_{\Gamma}$.

Замечание 2. Дифференцируемость по Фреше и представление для производной функционала невязки получены в настоящей статье в других предположениях на пространства и с другими граничными условиями по сравнению с работами [17, 23, 24]. По мнению авторов, используемая в настоящей статье постановка задачи является наиболее адекватной для ультразвуковой томографической диагностики короткими импульсами от точечных источников.

Замечание 3. Используя полученное представление для производной Фреше функционала невязки, можно построить эффективные алгоритмы решения обратных задач ультразвуковой томографии как в двумерном, так и в трехмерном случае [25–27]. Отметим, что, строго говоря, из полученного выражения для производной Фреше (23) нельзя использовать градиент для минимизации функционала невязки, поскольку $c(r)\in C^3\left(\overline{\Omega}\right)$, а градиент может не принадлежать пространству $C^3\left(\overline{\Omega}\right)$. Однако для численных расчетов в конечномерных пространствах эта проблема не является принципиальной.

Замечание 4. Если в задаче (2), (3) экспериментальные данные известны для N положений источника, то минимизируемый функционал невязки следует положить равным сумме N функционалов невязки для каждого из положений источника, имеющих вид (4). Тогда полная производная Фреше равна сумме производных Фреше для каждого из положений источника, имеющих вид (23).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–07–00078-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duric N., Littrup P., Li C., Roy O., Schmidt S., Janer R., Cheng X., Goll J., Rama O., Bey-Knight L., Greenway W.* Breast ultrasound tomography: bridging the gap to clinical practice // Medical Imaging: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Proc. SPIE. Vol. 8320. 2012. doi: 10.1117/12.910988.
2. *Duric N., Littrup P., Poulo L., Babkin A., Pevzner R., Holsapple E., Rama O., et al.* Detection of breast cancer with ultrasound tomography: first results with the Computed Ultrasound Risk Evaluation (CURE) prototype // Medical Physics. 2007. **34**, N 2. 773–785.
3. *Jirik R., Peterlik I., Ruiter N., Fousek J., Dapp R., Zapf M., Jan J.* Sound-speed image reconstruction in sparse-aperture 3-D ultrasound transmission tomography // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2012. **59**, N 2. 254–264.
4. *Gemmeke H., Berger L., Birk M., Goebel G., Menshikov A., Tcherniakhovski D., Zapf M., Ruiter N.V.* Hardware setup for the next generation of 3D ultrasound computer tomography // IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec. 2010. 2449–2454. doi: 10.1109/NSSMIC.2010.5874228.
5. *Wiskin J., Borup D., Andre M., Johnson S., Greenleaf J., Parisky Y., Klock J.* Three-dimensional nonlinear inverse scattering: quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design, and clinical results // J. Acoust. Soc. Am. 2013. **133**, N 5. 3229. doi: 10.1121/1.4805138.
6. *Wiskin J., Borup D.T., Johnson S.A., Berggren M.* Non-linear inverse scattering: High resolution quantitative breast tissue tomography // J. Acoust. Soc. Am. 2012. **131**, N 5. 3802–3813.

7. *Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в мягких биотканях по модельным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2014. **60**, № 4. 443–456.
8. *Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2015. **61**, № 2. 254–273.
9. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // Wave Motion. 2014. **51**, N 3. 389–404.
10. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer, 1994.
11. *Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Об одной задаче волновой диагностики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2010. № 1. 7–13.
12. *Lavarello R.J., Oelze M.L.* Tomographic reconstruction of three-dimensional volumes using the distorted Born iterative method // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2009. **28**, N 10. 1643–1653.
13. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. **52**, № 2. 263–269.
14. *Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Организация параллельных вычислений при решении обратной задачи волновой диагностики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2008. **9**. 338–345.
15. *Chavent G.* Deux résultats sur le probleme inverse dans les équations aux dérivées partielles du deuxieme ordre en t et sur l'unicité de la solution du probleme inverse de la diffusion // Paris. C.R. Acad. Sc. 1970. **270**. 25–28.
16. *Natterer F.* Sonic imaging // Handbook of Mathematical Methods in Imaging. New York: Springer, 2015. 1253–1278.
17. *Бейлина Л., Клибанов М.В., Кокурин М.Ю.* Адаптивность и релаксация для некорректных задач и глобальная сходимость для коэффициентной обратной задачи // Проблемы математического анализа. 2010. № 46. 3–44.
18. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Problems. 2013. **29**, N 7. 075004. doi: 10.1088/0266-5611/29/7/075004.
19. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // Physics in Medicine and Biology. 2014. **59**, N 8. 1979–2004.
20. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
21. *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953.
22. *Evans L.C.* Partial differential equations. Providence: American Mathematical Society, 1998.
23. *Natterer F., Sielschott H., Dorn O., Dierkes T., Palamodov V.* Fréchet derivatives for some bilinear inverse problems // SIAM J. Appl. Math. 2002. **62**, N 6. 2092–2113.
24. *Natterer F.* Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging // Contemporary Mathematics. Vol. 559. Providence: American Mathematical Society, 2011. 151–162.
25. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Об одной задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2011. **12**. 317–320.
26. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Суперкомпьютерные технологии в разработке методов решения обратных задач в УЗИ-томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. **13**. 235–238.
27. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Сережников С.Ю.* Задачи волновой томографии с неполным диапазоном данных // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2014. **15**. 274–285.

Поступила в редакцию
28.06.2015

Iterative Methods for Solving Inverse Problems of Ultrasonic Tomography

A. V. Goncharsky[1] **and S. Yu. Romanov**[2]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci,, Professor, Head of Laboratory, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: romanov60@gmail.com*

Received June 28, 2015

Abstract: This paper is dedicated to rigorous mathematical substantiation of iterative methods for solving inverse problems of ultrasonic tomography. These inverse problems are considered in the framework of a scalar model for the wave equation. This model takes into account such wave effects as diffraction, refraction, etc. The inverse problem is considered as a coefficient inverse problem. A rigorous mathematical representation is given for the Fréchet derivative of the residual functional with respect to the wave velocity $c(r)$ characterizing a nonuniform structure of the object under study. The representation for the Fréchet derivative is obtained both for the two-dimensional problems and for the three-dimensional case. It is suggested that the inverse problem can be solved using this representation of the Fréchet derivative together with the gradient methods of minimization for the residual functional. The proposed iterative procedure is highly parallelizable and implementable on supercomputers.

Keywords: coefficient inverse problems, wave equation, ultrasonic tomography, Fréchet derivative, iterative methods.

References

1. N. Duric, P. Littrup, C. Li, et al., "Breast Ultrasound Tomography: Bridging the Gap to Clinical Practice," Proc. SPIE, Vol. 8320 (2012). doi: 10.1117/12.910988

2. N. Duric, P. Littrup, L. Poulo, et al., "Detection of Breast Cancer with Ultrasound Tomography: First Results with the Computed Ultrasound Risk Evaluation (CURE) Prototype," Med. Phys. **34** (2), 773–785 (2007).

3. R. Jirik, I. Peterlik, N. Ruiter, et al., "Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography," IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **59** (2), 254–264 (2012).

4. H. Gemmeke, L. Berger, M. Birk, et al., "Hardware Setup for the Next Generation of 3D Ultrasound Computer Tomography," IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec. 2449–2454 (2010). doi: 10.1109/NSSMIC.2010.5874228

5. J. Wiskin, D. Borup, M. Andre, et al., "Three-Dimensional Nonlinear Inverse Scattering: Quantitative Transmission Algorithms, Refraction Corrected Reflection, Scanner Design, and Clinical Results," J. Acoust. Soc. Am. **133** (2013). doi: 10.1121/1.4805138

6. J. Wiskin, D. T. Borup, S. A. Johnson, and M. Berggren, "Non-Linear Inverse Scattering: High Resolution Quantitative Breast Tissue Tomography," J. Acoust. Soc. Am. **131** (5), 3802–3813 (2012).

7. V. A. Burov, D. I. Zotov, and O. D. Rumyantseva, "Reconstruction of Spatial Distributions of Sound Velocity and Absorption in Soft Biological Tissues Using Model Ultrasonic Tomographic Data," Akust. Zh. **60** (4), 443–456 (2014) [Acoust. Phys. **60** (4), 479–491 (2014)].

8. V. A. Burov, D. I. Zotov, and O. D. Rumyantseva, "Reconstruction of the Sound Velocity and Absorption Spatial Distributions in Soft Biological Tissue Phantoms from Experimental Ultrasound Tomography Data," Akust. Zh. **61** (2), 254–273 (2015) [Acoust. Phys. **61** (2), 231–248 (2015)].

9. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, "Inverse Problems of 3D Ultrasonic Tomography with Complete and Incomplete Range Data," Wave Motion **51** (3), 389–404 (2014).

10. A. Bakushinsky and A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems. Theory and Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1994).

11. A. V. Goncharskii, S. L. Ovchinnikov, and S. Yu. Romanov, "On the One Problem of Wave Diagnostic," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15: Vychisl. Mat. Kibern., No. 1, 7–13 (2010) [Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet. **34** (1), 1–7 (2010)].

12. R. J. Lavarello and M. L. Oelze, "Tomographic Reconstruction of Three-Dimensional Volumes Using the Distorted Born Iterative Method," IEEE Trans. Med. Imaging **28** (10), 1643–1653 (2009).

13. A. V. Goncharskii and S. Yu. Romanov, "Two Approaches to the Solution of Coefficient Inverse Problems for Wave Equations," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **52** (2), 263–269 (2012) [Comput. Math. Math. Phys. **52** (2), 245–251 (2012)].

14. S. L. Ovchinnikov and S. Yu. Romanov, "Organization of Parallel Computations When Solving the Inverse Problem of Wave Diagnostics," Vychisl. Metody Programm. **9**, 338–345 (2008).

15. G. Chavent, "Deux Résultats sur le Problème Inverse dans les Équations aux Dérivées Partielles du Deuxième Ordre en t et sur l'Unicité de la Solution du Problème Inverse de la Diffusion," C.R. Acad. Sc. Paris. **270**, 25–28 (1970).

16. F. Natterer, "Sonic Imaging," in *Handbook of Mathematical Methods in Imaging* (Springer, New York, 2015), pp. 1253–1278.

17. L. Beilina, M. V. Klibanov, and M. Yu. Kokurin, "Adaptivity with Relaxation for Ill-Posed Problems and Global Convergence for a Coefficient Inverse Problem," J. Math. Sci. **167** (3), 279–325 (2010).

18. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Supercomputer Technologies in Inverse Problems of Ultrasound Tomography," Inverse Probl. **29** (2013). doi: 10.1088/0266-5611/29/7/075004

19. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, "Inverse Problems of Ultrasound Tomography in Models with Attenuation," Phys. Med. Biol. **59** (8), 1979-2004 (2014).

20. O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973; Springer, New York, 1985).

21. O. A. Ladyzhenskaya, *A Mixed Problem for Hyperbolic Equations* (Gostekhizdat, Moscow, 1953) [in Russian].

22. L. C. Evans, *Partial Differential Equations* (Am. Math. Soc. Press, Providence, 2008).

23. F. Natterer, H. Sielschott, O. Dorn, et al., "Fréchet Derivatives for Some Bilinear Inverse Problems," SIAM J. Appl. Math. **62** (6), 2092–2113 (2002).

24. F. Natterer, "Possibilities and Limitations of Time Domain Wave Equation Imaging," in *Contemporary Mathematics* (Am. Math. Soc. Press, Providence, 2011), Vol. 559, pp. 151–162.

25. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, "On a Problem of Ultrasonic Tomography," Vychisl. Metody Programm. **12**, 317–320 (2011).

26. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, "Supercomputer Technologies in the Development of Methods for Solving Inverse Problems in Ultrasound Tomography," Vychisl. Metody Programm. **13**, 235–238 (2012).

27. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, "Problems of Limited-Data Wave Tomography," Vychisl. Metody Programm. **15**, 274–285 (2014).