

УДК 519.632.4

doi 10.26089/NumMet.v16r447

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ И ПРОВОДИМОСТИ ОДНОРОДНОГО ВКРАПЛЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

С. В. Гаврилов<sup>1</sup>

Рассматривается двумерная задача электроимпедансной томографии в случае ограниченной области с кусочно-постоянным коэффициентом электрической проводимости, принимающим два значения. Требуется определить неизвестную кривую, разделяющую области с различной проводимостью, и восстановить значение проводимости внутри одной из этих областей по измерениям характеристик электрического поля на известной внешней границе области. Предлагается итерационный метод численного решения поставленной задачи, приводятся результаты вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** электроимпедансная томография, кусочно-постоянная проводимость, итерационный метод, метод регуляризации Тихонова.

**1. Введение.** Задачи электроимпедансной томографии представляют собой широкий класс задач, в которых требуется восстановить распределение электрической проводимости внутри исследуемого объекта по измерениям характеристик электрического поля на его границе [1–3]. В ряде приложений метода электроимпедансной томографии можно сделать предположение о том, что электрическая проводимость внутри объекта является кусочно-постоянной и принимает конечное число значений. В этом случае задача состоит в определении границы, разделяющей области с различной проводимостью. Исследование единственности решения таких задач проводилось в работах [4–7]. Численные методы решения задач электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости рассматривались в работах [8–12].

В настоящей статье рассматривается двумерная задача электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости, принимающей два значения. Предполагается, что внутри ограниченной области с известными постоянной проводимостью и внешней границей имеется вкрапление с другой постоянной проводимостью. Обратная задача состоит в определении значения проводимости вкрапления и кривой, представляющей собой его границу. Исходной информацией служит пара условий Дирихле и Неймана на внешней границе рассматриваемой области.

Перейдем к математической постановке задачи. Пусть  $\Omega$  ограниченная односвязная область, а кривая  $\Gamma_0$  является ее границей. Пусть  $\Omega_1$  — односвязная область, ограниченная кривой  $\Gamma_1$ , такая, что  $\overline{\Omega_1} \in \Omega$ . Кривые  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  достаточно гладкие. Обозначим через  $\Omega_0$  область  $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ . Пусть функция  $u(M)$  такова, что  $u \in C(\overline{\Omega})$ ,  $u(M) = u_i(M)$ ,  $M \in \Omega_i$ ,  $i = 0, 1$ , где  $u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega_i})$ ,  $i = 0, 1$ , и

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \tag{1.1}$$

$$u_0(M) = u_1(M), \quad M \in \Gamma_1, \tag{1.2}$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \tag{1.3}$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{1.4}$$

Здесь  $\sigma_0, \sigma_1$  — положительные постоянные, а  $f(M)$  — функция, непрерывная и не постоянная на  $\Gamma_0$ .

Сформулируем задачу электроимпедансной томографии, являющуюся обратной к задаче (1.1)–(1.4). Пусть в краевой задаче (1.1)–(1.4) кривая  $\Gamma_0$ , постоянная  $\sigma_0$  и функция  $f(M)$  на  $\Gamma_0$  заданы, а кривая  $\Gamma_1$  и постоянная  $\sigma_1$  неизвестны. Требуется определить  $\Gamma_1$  и  $\sigma_1$ , если для решения  $u(M)$  краевой задачи (1.1)–(1.4) задано условие Неймана:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{1.5}$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: gvr1serg@gmail.com

Здесь  $g(M)$  — известная функция, непрерывная на  $\Gamma_0$ , а  $n$  — внешняя нормаль к  $\Gamma_0$ .

В настоящей статье строится итерационный метод численного решения поставленной задачи. При его построении выводится нелинейное операторное уравнение относительно функции, задающей неизвестную кривую  $\Gamma_1$ , и коэффициента  $\sigma_1$ . Для решения полученного операторного уравнения строится итерационный процесс, в котором попеременно вычисляются значения функции, задающей кривую  $\Gamma_1$ , и коэффициент  $\sigma_1$ .

**2. Численный метод.** Для вывода операторного уравнения относительно функции, задающей кривую  $\Gamma_1$ , и коэффициента  $\sigma_1$  сделаем дополнительное предположение о том, что класс неизвестных кривых  $\Gamma_1$  имеет общий центр звездности  $M_0$ , а кривые из этого класса могут быть параметризованы в полярной системе координат с центром в точке  $M_0$  функциями  $r(\psi)$ , такими, что  $r(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$  и  $\|r\|_{C^2[0, 2\pi]} \leq c_0$ , где  $c_0$  — фиксированное число. Пусть кривая  $\Gamma_0$  такова, что параметризуется в той же полярной системе координат функцией  $R(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$ .

Выведем операторное уравнение относительно неизвестной функции  $r(\psi)$  и коэффициента  $\sigma_1$ , применяя подходы, использованные в работах [13–15].

Представим решение  $u(M)$  краевой задачи (1.1)–(1.4) в виде суммы потенциалов простого слоя

$$u(M) = \int_{\Gamma_0} \mu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \int_{\Gamma_1} \nu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P, \quad M \in \Omega. \quad (2.1)$$

С использованием условий (1.3), (1.4) и (2.1) получим следующую систему интегральных уравнений для плотностей  $\mu(P)$  и  $\nu(P)$ :

$$\int_{\Gamma_0} \mu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \int_{\Gamma_1} \nu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (2.2)$$

$$\pi\nu(M) + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P = 0, \quad M \in \Gamma_1. \quad (2.3)$$

Здесь  $n_m$  — внутренняя нормаль к кривой  $\Gamma_1$  в точке  $M$ .

Переходя в уравнениях (2.2) и (2.3) к полярным координатам, получим

$$\int_0^{2\pi} N(\varphi, \psi) \mu(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} D(\zeta, \psi; r) \nu(\zeta) d\zeta = f(\psi), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (2.4)$$

$$\pi\nu(\psi) + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int_0^{2\pi} W(\varphi, \psi; r) \mu(\varphi) d\varphi + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int_0^{2\pi} Q(\zeta, \psi; r) \nu(\zeta) d\zeta = 0, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (2.5)$$

где представления функций  $N(\varphi, \psi)$ ,  $M(\zeta, \psi; r)$ ,  $Q(\zeta, \psi; r)$  и  $P(\varphi, \psi; r)$  приведены в работе [15]. Здесь и далее для подчеркивания зависимости функций от функции  $r$ , последняя указывается в аргументах после знака “;”.

Используя условие (1.5), представление (2.1), свойства потенциала простого слоя и переходя к полярным координатам, получим

$$-\pi\mu(\psi) + \int_0^{2\pi} S(\varphi, \psi) \mu(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} T(\zeta, \psi; r) \nu(\zeta) d\zeta = g(\psi), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (2.6)$$

где выражения для функций  $S(\varphi, \psi)$  и  $T(\zeta, \psi; r)$  приведены в работе [15].

Уравнения (2.4)–(2.6) образуют нелинейное операторное уравнение относительно неизвестной функции  $r(\psi)$  и коэффициента  $\sigma_1$ :

$$A(r, \sigma_1) = g. \quad (2.7)$$

Для вычисления функции  $A(r, \sigma_1)(\psi)$  при заданных  $r(\psi)$  и  $\sigma_1$  необходимо решить систему интегральных уравнений (2.4), (2.5) и определить  $\mu(\psi)$  и  $\nu(\psi)$ , а затем вычислить значение оператора, стоящего в левой части уравнения (2.6).

Рассмотрим основные принципы построения итерационного решения уравнения (2.7). Пусть  $r^n(\psi)$  и  $\sigma_1^n$  — приближения, полученные на  $n$ -й итерации. Воспользуемся методом, изложенным в работе [15], для

построения линеаризованного уравнения (2.7) в окрестности функции  $r^n(\psi)$  при фиксированном  $\sigma_1 = \sigma_1^n$  и получим операторное уравнение для функции  $\rho^n(\psi)$ :

$$B[r^n, \sigma_1^n] \rho^n = \widehat{g}[r^n, \sigma_1^n]. \tag{2.8}$$

Решим полученное уравнение с использованием метода регуляризации и определим значение функции  $r^{n+1}(\psi)$  на следующей итерации:

$$r^{n+1}(\psi) = r^n(\psi) + \rho^n(\psi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.9}$$

Затем в качестве  $\sigma_1^{n+1}$  возьмем значение, на котором достигается минимум функционала

$$\sigma_1^{n+1} = \arg \inf_{\sigma_1} \|A(r^{n+1}, \sigma_1) - g\|_{L_2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.10}$$

Численная реализация итерационного метода проводится следующим образом.

На отрезке  $\{0 \leq \psi \leq 2\pi\}$  вводится сетка  $(\psi_i)$  и сеточные аналоги  $r_i^n$  функций  $r^n(\psi)$ . Задача решения уравнения (2.8) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для неизвестной сеточной функции  $\rho_i^n$ . Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений применяется метод регуляризации Тихонова. Величина параметра регуляризации согласовывается с точностью задания исходной информации и с номером итерационного процесса  $n$ . Для численного решения задачи минимизации функционала (2.10) используются стандартные методы минимизации функции одной переменной.

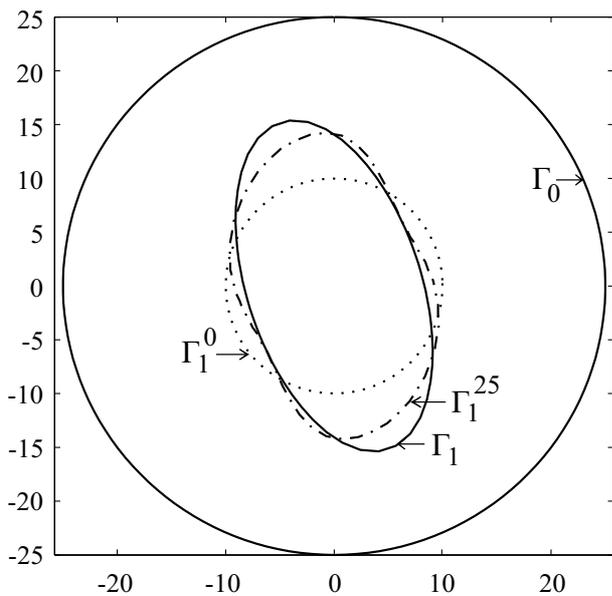


Рис. 1.  $\sigma_1 = 15, \sigma_1^0 = 5, \sigma_1^{25} = 14.41$

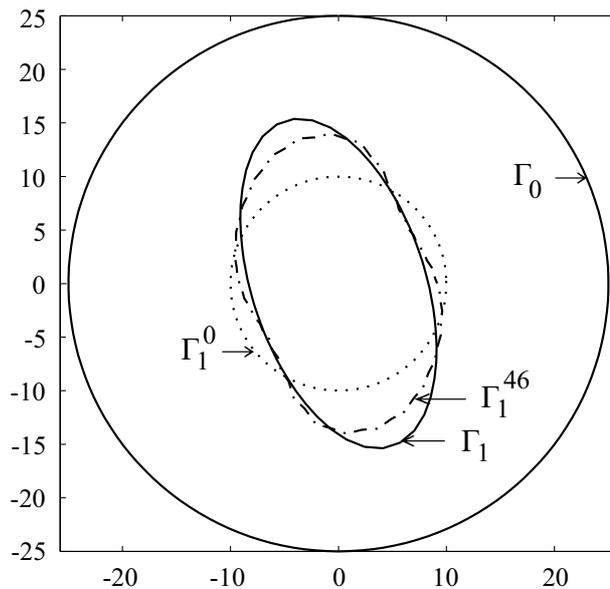


Рис. 2.  $\sigma_1 = 5, \sigma_1^0 = 15, \sigma_1^{46} = 5.02$

**3. Вычислительные эксперименты.** Приведем результаты вычислительных экспериментов по

применению предложенного итерационного метода для решения задачи электроимпедансной томографии. В первом вычислительном эксперименте были выбраны следующие параметры.

Кривая  $\Gamma_0$  представляла собой окружность радиуса 25. Кривая  $\Gamma_1$  представляла собой эллипс (рис. 1), коэффициенты  $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 15$ . Значения функции  $u(M)$  на  $\Gamma_0$  заданы в полярной системе координат:  $f(\psi) = 50(\exp[-4 \sin^2(\psi/2)] - \exp[-4 \cos^2(\psi/2)])$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ .

Схема вычислительного эксперимента была такова. С заданными  $\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma_0, \sigma_1$  и  $f(\psi)$  решалась задача Дирихле (1.1)–(1.4) и находилась функция  $g(\psi)$ , представляющая собой значение нормальной производной  $u(M)$  на контуре  $\Gamma_0$ . В эту функцию вносилась погрешность и получалась функция  $g_\delta(\psi)$ , такая, что  $\frac{\|g(\psi) - g_\delta(\psi)\|_{L_2[0, 2\pi]}}{\|g(\psi)\|_{L_2[0, 2\pi]}} = 0.05$ . Далее с функцией  $g_\delta(\psi)$ , взятой в качестве исходных данных, численно решалась обратная задача.

В качестве начального приближения для итерационного процесса были выбраны  $\sigma_1^0 = 5$  и  $\Gamma_1^0$  в виде окружности радиуса 10. На рис. 1 приведен результат решения обратной задачи  $\Gamma_1^{25}$ , полученный при

выборе равномерных сеток на контуре  $\Gamma_0$  в 150 узлов и на контуре  $\Gamma_1$  в 60 узлов в результате 25 итераций. Восстановленное при этом значение  $\sigma_1^{25}$  равно 14.41. Критерием останова служило достижение уровня погрешности по невязке.

В последующих трех вычислительных экспериментах контуры  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , постоянная  $\sigma_0$  и функция  $f(\psi)$ , а также схема проведения и параметры дискретизации были идентичны первому вычислительному эксперименту. Отличие состояло в значениях коэффициента  $\sigma_1$ . Во втором вычислительном эксперименте точное значение  $\sigma_1 = 5$ , а значение начального приближения  $\sigma_1^0 = 15$ . В третьем вычислительном эксперименте  $\sigma_1 = \frac{1}{5}$  и  $\sigma_1^0 = \frac{1}{15}$ . В четвертом вычислительном эксперименте  $\sigma_1 = \frac{1}{15}$  и  $\sigma_1^0 = \frac{1}{5}$ .

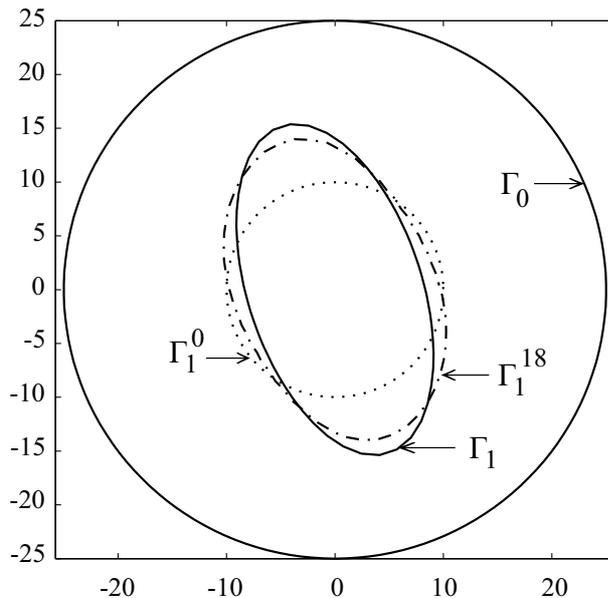


Рис. 3.  $\sigma_1 = \frac{1}{5}$ ,  $\sigma_1^0 = \frac{1}{15}$ ,  $\sigma_1^{18} = \frac{1}{4.88}$

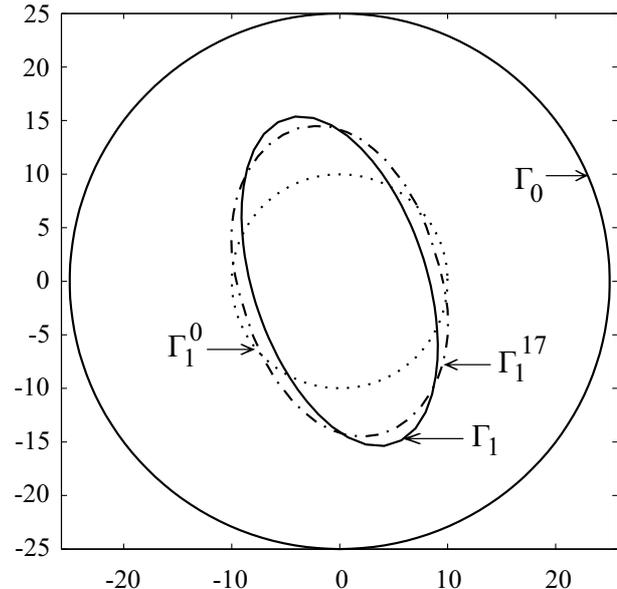


Рис. 4.  $\sigma_1 = \frac{1}{15}$ ,  $\sigma_1^0 = \frac{1}{5}$ ,  $\sigma_1^{17} = \frac{1}{15.93}$

На рис. 2–4 приведены результаты второго, третьего и четвертого вычислительных экспериментов соответственно. Во втором вычислительном эксперименте потребовалось 46 итераций, восстановленное значение  $\sigma_1^{46} = 5.02$ . В третьем вычислительном эксперименте число итераций 18 и  $\sigma_1^{18} = \frac{1}{4.88}$ . В четвертом вычислительном эксперименте число итераций 17 и  $\sigma_1^{17} = \frac{1}{15.53}$ .

Проведенные вычислительные эксперименты свидетельствуют о возможности восстановления неизвестного контура совместно с коэффициентом проводимости в двумерной обратной задаче электроимпедансной томографии. По результатам проведенных вычислительных экспериментов можно сделать вывод о схожей эффективности предложенного итерационного метода в широком диапазоне значений  $\sigma_1$ .

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00244).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borcea L. Electrical impedance tomography // *Inverse Problems*. 2002. **18**, N 6. 99–136.
2. Saulnier G.J., Blue R.S., Newell J.C., Isaacson D., Edic P.M. Electrical impedance tomography // *IEEE Signal Processing Magazine*. 2001. **18**, N 6. 31–43.
3. Hanke M., Brühl M. Recent progress in electrical impedance tomography // *Inverse Problems*. 2003. **19**, N 6. S65–S90.
4. Alessandrini G., Isakov V. Analyticity and uniqueness for the inverse conductivity problem // *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*. 1996. **28**. 351–369.
5. Barceló B., Fabes E., Seo J.K. The inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for convex polyhedra // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1994. **122**, N 1. 183–189.
6. Bellout H., Friedman A., Isakov V. Stability for an inverse problem in potential theory // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1992. **332**, N 1. 271–296.
7. Astala K., Päiväranta L. Calderón's inverse conductivity problem in the plane // *Ann. Math.* 2006. **163**. 265–299.
8. Kang H., Seo J.K., Sheen D. Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients // *Inverse Problems*. 1997. **13**, N 1. 113–123.

9. Brühl M., Hanke M. Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography // *Inverse Problems*. 2000. **16**, N 4. 1029–1042.
10. Eckel H., Kress R. Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem // *Inverse Problems*. 2007. **23**, N 2. 475–491.
11. Knudsen K., Lassas M., Mueller J.L., Siltanen S. Regularized D-bar method for the inverse conductivity problem // *Inverse Problems and Imaging*. 2009. **3**, N 4. 599–624.
12. Ts M.-E., Lee E., Seo J.K., et al. Projective electrical impedance reconstruction with two measurements // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2013. **73**, N 4. 2013. 1659–1675.
13. Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В. Численные методы решения некоторых обратных задач электрофизиологии сердца // *Дифференциальные уравнения*. 2009. **45**, № 7. 1014–1022.
14. Гаврилов С.В. Численный анализ обусловленности двумерной задачи электроимпедансной томографии // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. **15**. 329–336.
15. Гаврилов С.В., Денисов А.М. Численные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2011. **51**, № 8. 1476–1489.

Поступила в редакцию  
31.08.2015

---

## An Iterative Method for Determining the Shape and Conductivity of a Homogeneous Inclusion in the Two-Dimensional Electrical Impedance Tomography Problem

S. V. Gavrilov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Junior Scientist, e-mail: gvr1serg@gmail.com*

Received August 31, 2015

**Abstract:** The problem of electrical impedance tomography in a bounded two-dimensional domain with a piecewise two-valued constant electrical conductivity is considered. It is required to determine an unknown boundary between the regions of different conductivities and to obtain the conductivity in one of these regions using the input information on the electric field measured on the outer boundary of the domain. An iterative method for solving this problem is proposed. The corresponding numerical results are discussed.

**Keywords:** electrical impedance tomography, piecewise constant conductivity, iterative method, Tikhonov regularization method.

### References

1. L. Borcea, “Electrical Impedance Tomography,” *Inverse Probl.* **18** (6), 99–136 (2002).
2. G. J. Saulnier, R. S. Blue, J. C. Newell, et al., “Electrical Impedance Tomography,” *IEEE Sig. Proc. Mag.* **18** (6), 31–43 (2001).
3. M. Hanke and M. Brühl, “Recent Progress in Electrical Impedance Tomography,” *Inverse Probl.* **19** (6), S65–S90 (2003).
4. G. Alessandrini and V. Isakov, “Analyticity and Uniqueness for the Inverse Conductivity Problem,” *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste* **28**, 351–369 (1996).
5. B. Barceló, E. Fabes, and J. K. Seo, “The Inverse Conductivity Problem with one Measurement: Uniqueness for Convex Polyhedra,” *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1), 183–189 (1994).
6. H. Bellout, A. Friedman, and V. Isakov, “Stability for an Inverse Problem in Potential Theory,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1), 271–296 (1992).
7. K. Astala and L. Päivärinta, “Calderón’s Inverse Conductivity Problem in the Plane,” *Ann. Math.* **163**, 265–299 (2006).
8. H. Kang, J. K. Seo, and D. Sheen, “Numerical Identification of Discontinuous Conductivity Coefficients,” *Inverse Probl.* **13** (1), 113–123 (1997).
9. M. Brühl and M. Hanke, “Numerical Implementation of Two Noniterative Methods for Locating Inclusions by Impedance Tomography,” *Inverse Probl.* **16** (4), 1029–1042 (2000).
10. H. Eckel and R. Kress, “Nonlinear Integral Equations for the Inverse Electrical Impedance Problem,” *Inverse Probl.* **23** (2), 475–491 (2007).

11. K. Knudsen, M. Lassas, J. L. Mueller, and S. Siltanen, “Regularized D-Bar Method for the Inverse Conductivity Problem,” *Inverse Probl. Imaging* **3** (4), 599–624 (2009).
12. M.-E. Ts, E. Lee, J. K. Seo, et al., “Projective Electrical Impedance Reconstruction with Two Measurements,” *SIAM J. Appl. Math.* **73** (4), 1659–1675 (2013).
13. A. M. Denisov, E. V. Zakharov, A. V. Kalinin, and V. V. Kalinin, “Numerical Methods for Some Inverse Problems of Heart Electrophysiology,” *Differ. Uravn.* **45** (7), 1014–1022 (2009) [*Differ. Equ.* **45** (7), 1034–1043 (2009)].
14. S. V. Gavrilov, “Numerical Conditioning Analysis of Two-Dimensional Problems in Electrical Impedance Tomography,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 329–336 (2014).
15. S. V. Gavrilov and A. M. Denisov, “Numerical Methods for Determining the Inhomogeneity Boundary in a Boundary Value Problem for Laplace’s Equation in a Piecewise Homogeneous Medium,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **51** (8), 1476–1489 (2011) [*Comput. Math. Math. Phys.* **51** (8), 1377–1390 (2011)].