УДК 523.1 doi 10.26089/NumMet.v17r101

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

А. О. Калинин[1], Д. Д. Соколов[2]

Рассматривается процесс роста поля Якоби на геодезической на двумерном многообразии с псевдослучайной величиной гауссовой кривизны. Исследуются различные “естественные” генераторы псевдослучайных чисел, основанные, в первую очередь, на гипотезе о случайном распределении десятичных знаков иррациональных чисел.

Ключевые слова: перемежаемость, векторное поле, уравнение Якоби, псевдослучайные числа, показатель Ляпунова.

1. Введение. При самовозбуждении векторных полей в случайных средах возникает своеобразное явление, получившее название перемежаемости [7]: почти каждая реализация векторного поля растет экспоненциально, среднее значение модуля поля тоже растет экспоненциально, однако скорость роста среднего больше, чем скорость роста реализаций. Еще быстрее растет стандартное уклонение векторного поля, а скорость роста более высоких моментов растет с ростом номера момента. Подобная картина роста предсказывается, в частности, для магнитного поля, генерирующегося случайным течением проводящей жидкости [8, 9]. Такое необычное поведение статистических моментов объясняется появлением очень редких пространственных областей и/или реализаций, в которых магнитное поле растет аномально быстро по сравнению с типичной скоростью роста.

Воспроизведение перемежаемого роста магнитного поля в рамках численного моделирования является чрезвычайно трудной задачей. Тем не менее следы перемежаемого поведения магнитного поля, генерируемого турбулентными или конвективными потоками, уверенно опознаются в имеющихся трехмерных компьютерных моделях [9]. Однако количественное сравнение теоретических предсказаний и численного эксперимента для трехмерных задач остается пока далеко за пределами возможностей современной вычислительной физики.

Однако еще в 1964 г. академик Я. Б. Зельдович указал одну задачу из области космологии, для которой происходит самовозбуждение векторного поля в случайной среде, так что можно изучать явление перемежаемости [11]. Важно, что этот рост описывается не трехмерными уравнениями в частных производных, а несложным обыкновенным дифференциальным уравнением. В этой задаче речь идет об отклонении друг от друга лучей света в космологической модели, учитывающей флуктуации кривизны пространства. Далее для нас будут несущественны физические выводы, следующие из этой задачи, поэтому мы не стремимся к реалистичности всех деталей задания случайной кривизны.

С математической точки зрения в задаче Зельдовича речь идет о поведении поля Якоби на геодезической со случайной кривизной в римановом пространстве. Для наших целей это пространство достаточно считать двумерным. Рассмотрим две геодезические, исходящие из одной точки под малым углом θ. Расстояние между точками, отстоящими на расстояние x вдоль геодезических от точки их пересечения, для малых θ равно $y(x)\theta$, где $y(x)$ и называется полем Якоби. Будем изучать эволюцию поля Якоби вдоль одной из этих геодезических. Оно подчиняется уравнению Якоби

$$y'' + K(x)y = 0, \tag{1}$$

где кривизна $K(x)$ рассматривается как случайных процесс. Естественные начальные условия для задачи Зельдовича имеют вид $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Задача Зельдовича допускает как изучение методами теории вероятностей [10], так и изучение методами прямого численного моделирования [1–5]. В обоих подходах подтверждается представление о перемежаемом росте поля Якоби — растут как его реализации, так и статистические моменты, причем моменты растут быстрее реализаций, а скорость роста моментов увеличивается с номером момента.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: kalinanton@me.com
[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; профессор, e-mail: sokoloff.dd@gmail.com

2. Проблема генераторов случайных чисел. Для численного моделирования задачи Зельдовича и для задания случайной кривизны $K(x)$ необходимо использовать какой-нибудь генератор случайных чисел. В цитированных выше работах для определенности рассматривался кусочно-постоянный случайный процесс $K(x)$, так что его задание сводилось к заданию последовательности случайных равнораспределенных констант, которые генерировались стандартными генераторами (псевдо)случайных чисел.

Проведенные эксперименты показали, что для выявления прогрессивного роста статистических моментов необходимо усреднить не менее 5×10^5 независимых реализаций поля Якоби. Стандартные генераторы, как оказалось, успешно справляются с этой работой. Можно предполагать, что эта успешная работа стандартных генераторов является результатом работы над ними их авторов.

В то же время в естественных условиях (например, в турбулентном потоке проводящей жидкости) процесс возникновения течений, выглядящих случайными, вовсе не обязательно связан со столь же совершенными последовательностями случайных чисел, как современные генераторы. Представляется, что этот факт заслуживает проверки. Этому и посвящена настоящая статья.

Конечно, задача использования турбулентного потока в качестве генератора случайных чисел является достаточно неопределенной. Поэтому мы использовали гораздо более простой, но, как оказалось, поучительный пример.

Широко распространено представление, что последовательность десятичных знаков иррационального числа, например числа π, моделирует свойства последовательности случайных чисел. Мы использовали это представление для того, чтобы сформировать последовательность случайных кривизн следующим образом. Мы полагали, что при $n\leqslant x<(n+1)$ кривизна имеет вид $K(x)=\sin n$. Поскольку числа 1 и 2π, т.е. расстояние, на котором теряется память процесса $K(x)$, и период синуса, несоизмеримы, то последовательность значений кривизны на каждом последовательном отрезке выглядит хаотической (рис. 1), а эмпирическая функция распределения в среднем диапазоне значений (приблизительно от -0.8 до 0.8) ведет себя как функция распределения равномерно распределенной случайной величины (рис. 2).

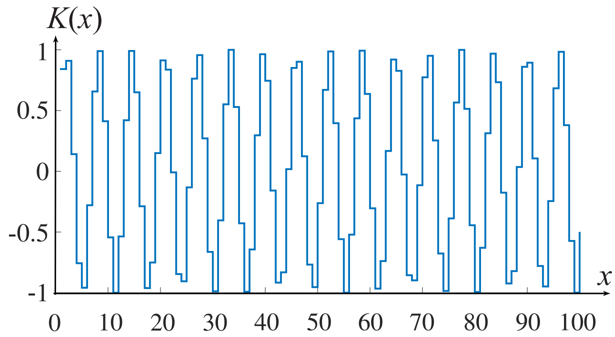


Рис. 1. Кривизна $K(x)$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 100$

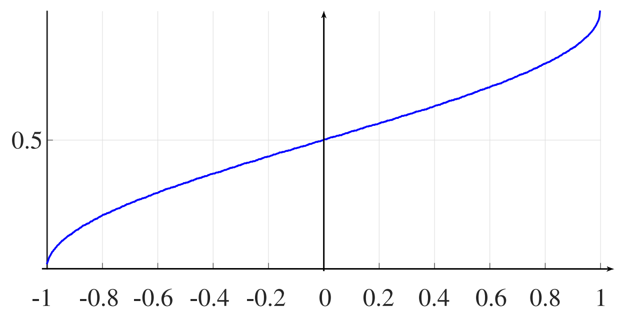


Рис. 2. Эмпирическая функция распределения значений $\sin n$. Видно, что среднее значение приближенно равно нулю

Мы ожидаем, что полученную последовательность можно рассматривать как последовательность случайных кривизн, полученных не с помощью специально сконструированного генератора, а с помощью естественного генератора, в роли которого выступает число π.

Наша задача состоит в том, чтобы попытаться воспроизвести с помощью нашего генератора явление перемежаемости.

3. Численное решение уравнения Якоби. Мы находим численное решение уравнения Якоби следующим образом. Введем вектор-строку $Y=(y,y')$. Тогда уравнение Якоби (1) переписывается в форме

$$Y'(x)=Y(x)\widehat{A},\quad \text{где}\quad \widehat{A}=\begin{pmatrix}0 & -K(x)\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \text{начальные условия:}\quad Y(0)=(0,1). \tag{2}$$

Первое из начальных условий означает, что геодезические пересекаются в начальной точке, а второе — условие нормировки угла θ. Тогда $Y(n)=Y(n-1)B_n$, где фундаментальная матрица $B_n=\exp\Big(\widehat{A}(n)\Big)$.

$$\text{При } K(x)>0\colon\ B_n=\begin{pmatrix}\cos\Big(\sqrt{K}\Big) & -\sin\Big(\sqrt{K}\Big)*\sqrt{K}\\ \sin\Big(\sqrt{K}\Big)\Big/\sqrt{K} & \cos\Big(\sqrt{K}\Big)\end{pmatrix}.$$

При $K(x) < 0$: $B_n = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{-K}\right) & \sinh\left(\sqrt{-K}\right) * \sqrt{-K} \\ \sinh\left(\sqrt{-K}\right) \Big/ \sqrt{-K} & \cosh\left(\sqrt{-K}\right) \end{pmatrix}$.

При $K(x) = 0$: $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Итак, $Y_n = Y_0 \times B_n \times B_{n-1} \times \ldots \times B_2 \times B_1$, т.е. задача сводится к умножению определенного количества матриц и усреднению такого произведения на большом количестве реализаций. При перемножении матриц мы пользовались библиотекой векторных вычислений Eigen, а усреднения проводились с помощью библиотеки для длинной арифметики GNU GMP в C++.

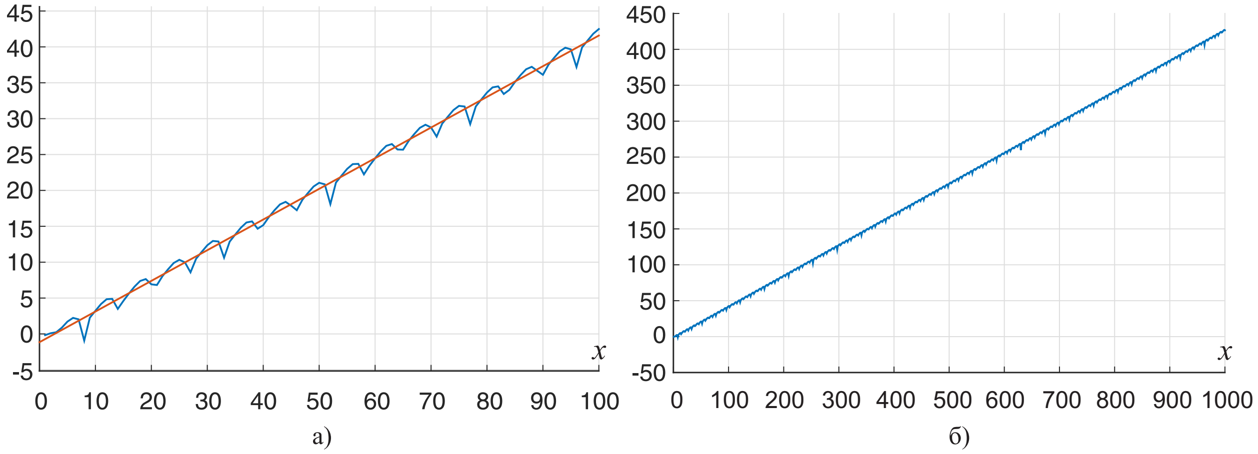


Рис. 3. Отдельная реализация поля Якоби на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 100$ (а) и на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1000$ (б)

4. Рост поля Якоби. Рост случайного поля принято характеризовать показателем Ляпунова λ, который определяется как $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln y(x)}{x}$.

На рис. 3 приведено поведение поля Якоби в нашей задаче на двух отрезках: $0 \leqslant x \leqslant 100$ (а) и $0 \leqslant x \leqslant 1000$ (б). Приведено значение $\ln\big|y(x)\big|$. Прямыми показаны аппроксимации поведения поля Якоби экспонентой. На рисунке справа эта аппроксимация практически совпадает с самой кривой, хотя небольшие отклонения все же видны. Заметные отклонения от аппроксимирующей прямой на рисунке слева связаны с тем, что $y(x)$ время от времени обращается в нуль и на геодезической возникают сопряженные точки. В масштабе рисунка справа эти случаи уже практически незаметны.

Видно, что на обоих рисунках логарифм поля Якоби изменяется практически линейно. Угловые коэффициенты аппроксимирующих прямых позволяют оценить показатель Ляпунова $\lambda_{[0\ldots100]} = 0.42732184$ и $\lambda_{[0\ldots1000]} = 0.42732185$. Обе оценки с хорошей точностью совпадают.

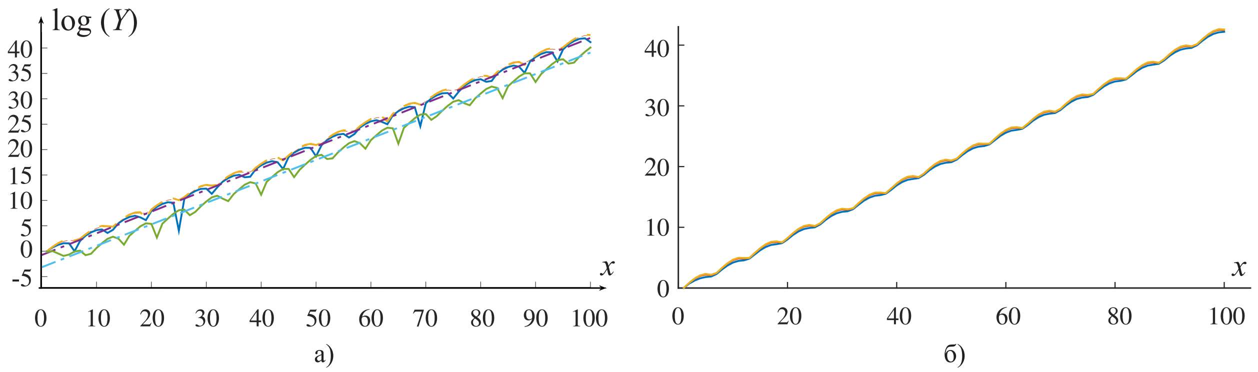
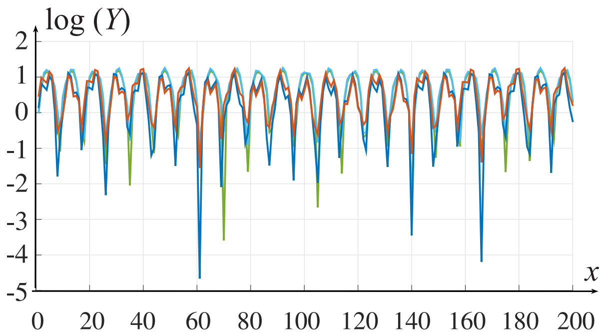


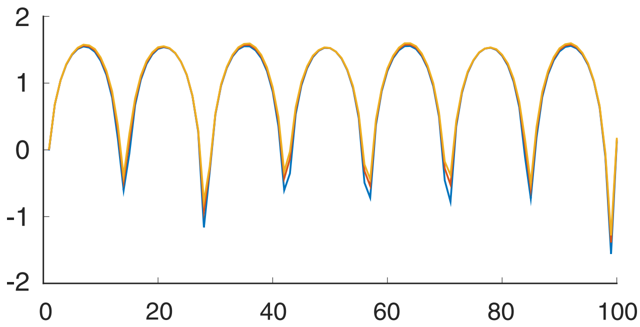
Рис. 4. Рост моментов поля Якоби для количества реализаций, равного $N = 5 \times 10^9$ (а) и $N = 5 \times 10^5$ (б). Слева изображена отдельная реализация (салатовым цветом, она лежит ниже остальных кривых) и пунктиром нанесены аппроксимирующие прямые

Для того чтобы вычислить статистические моменты решения, мы поступаем следующим образом. Мы разбиваем ось x на участки длины N_1: $0 \leqslant x \leqslant N_1 - 1$, $N_1 \leqslant x \leqslant 2N_1 - 1$ и т.д. На каждом из этих отрезков мы рассматриваем решение уравнения Якоби с одним и тем же начальным условием (2). Полученные таким образом N решений мы рассматриваем как N независимых реализаций поля Якоби и производим соответствующее усреднение, получая таким образом численные аналоги скоростей роста статистических моментов p-го порядка $\gamma_p = \dfrac{1}{p} \times \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\langle y^p(x)\rangle}{x}$. В данной работе вычислялись моменты и скорости их роста для $N = 5 \times 10^5$ и $N = 5 \times 10^9$ реализаций на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 100$. Согласно [2], уже при значении $N = 5 \times 10^5$ и при использовании стандартных генераторов случайных чисел на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 100$ хорошо заметно различие в поведении первого и второго статистических моментов

Были получены следующие значения для скоростей роста. Для $N = 10^9$: $\gamma_1 = 0.4274$; $\gamma_2 = 0.4279$; $\gamma_3 = 0.4281$. Для $N = 10^5$: $\gamma_1 = 0.4276$; $\gamma_2 = 0.4279$; $\gamma_3 = 0.4280$.



а)



б)

Рис. 5. Моменты поля Якоби на отрезках $0 \leqslant x \leqslant 100$ (а) и $0 \leqslant x \leqslant 200$ (б), взятые в $N = 10^5$ реализациях: а) в качестве генератора использовано число $\sqrt{2}$, б) в качестве генератора использовано число Лиувилля L. Можно заметить, что в обоих этих случаях показатели Ляпунова равны нулю; также видно образование сопряженных точек. Другими словами, поле Якоби (и его моменты) осциллируют около нуля

Из рис. 4 и из приведенных оценок показателей роста видно, что даже при $N = 5 \times 10^9$ не удается отчетливо зафиксировать различие скоростей роста для средних различных порядков.

5. Другие генераторы. Следующим нашим шагом стало изучение подобных генераторов, но основанных не на числе π, а, например, на числе $\sqrt{2}$ или числе Лиувилля L. Для этого функция $K(x)$ принимается равной $\sin(\sqrt{2}\pi n)$ или $\sin(L\pi n)$ соответственно.

Результаты для этих генераторов приведены на рис. 5, где заметно, что показатели Ляпунова для этих генераторов обращаются в нуль.

6. Заключение. Итак, мы получили, что использованный нами естественный генератор случайных чисел хорошо воспроизводит рост реализаций поля Якоби. Конечно, нет оснований ожидать, что скорость этого роста (показатель Ляпунова) количественно совпадает с показателем Ляпунова для стандартного генератора, поскольку функция распределения $K(x)$, конечно, не воспроизводит функцию распределения генератора. Тем не менее рост реализации хорошо виден на рис. 3.

С другой стороны, наш естественный генератор не воспроизводит прогрессивный рост моментов случайного поля $y(x)$ (рис. 4, фиолетовый штрихпунктир), которые растут с той же скоростью, что и отдельная реализация (рис. 4, голубой штрихпунктир). Подчеркнем, что при использовании усреднения по выборке конечного размера прогрессивный рост высших статистических моментов заметен только на конечном интервале значений независимой переменной. При достаточно больших значениях x данный объем выборки оказывается уже недостаточным для вычисления статистических моментов. Можно сказать, что наш результат состоит в том, что при использовании числа π в качестве генератора случайных чисел исчезает интервал значений x, на котором заметен прогрессивный рост моментов, тогда как при использовании стандартного генератора этот интервал присутствует.

Мы получили также, что различные иррациональные числа существенно по-разному ведут себя как генераторы случайных чисел в смысле воспроизведения свойств показателя Ляпунова и прогрессивного роста статистических моментов решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезиче-

ской со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**. 291–296.
2. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрон. ж. 2005. **82**, № 7. 584–589.
3. *Artyushkova M.E., Sokoloff D.D.* Modelling small-scale dynamo by the Jacobi equation // Magnetohydrodynamics. 2006. **42**, N 1. 3–19.
4. *Грачев Д.А., Соколов Д.Д.* Численное моделирование роста мультипликативных случайных величин // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**. 1–5.
5. *Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Фундаментальная матрица для уравнения Якоби со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 261–268.
6. *Илларионов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 218–225.
7. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // Успехи физических наук. 1987. **152**, № 1. 3–32.
8. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* The almighty chance. Singapore: World Scientific, 1991.
9. *Brandenburg A., Sokoloff D., Subramanian K.* Current status of turbulent dynamo theory: from large-scale to small-scale dynamos // Space Science Reviews. 2012. **169**. 123–157.
10. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Математические заметки. 2003. **74**, № 3. 416–424.
11. *Зельдович Я.Б.* Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Астрон. ж. 1964. **41**, № 1. 19–24.

Поступила в редакцию
01.12.2015

Intermittency of Vector Fields and Natural Random Number Generators

A. O. Kalinin[1] and D. D. Sokoloff[2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Student, e-mail: kalinanton@me.com*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: sokoloff.dd@gmail.com*

Received December 1, 2015

Abstract: Growth of Jacobi fields on geodesic lines over a 2D manifold with Gaussian curvature as a random process is considered. We study various “natural” random number generators on the basis of the hypothesis that the decimals of irrational numbers are randomly distributed.

Keywords: intermittency, vector field, Jacobi equation, random numbers, Lyapunov exponent.

References

1. M. E. Artyushkova and D. D. Sokoloff, “Numerical Modeling of Conjugated Point Distribution along a Geodesic with Random Curvature,” Vychisl. Metody Programm. **5**, 291–296 (2004).

2. M. E. Artyushkova and D. D. Sokolov, “Numerical Modeling of the Solutions of the Jacobi Equation on a Geodesic with Random Curvature,” Astron. Zh. **82** (7), 584–589 (2005) [Astron. Rep. **49** (7), 520–525 (2005)].

3. M. E. Artyushkova and D. D. Sokoloff, “Modelling Small-Scale Dynamo by the Jacobi Equation,” Magnetohydrodynamics **42** (1), 3–19 (2006).

4. D. A. Grachev and D. D. Sokoloff, “Numerical Modeling of Growth of Multiplicative Random Quantities,” Vychisl. Metody Programm. **8**, 1–5 (2007).

5. E. A. Mikhailov, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, “The Fundamental Matrix for the Jacobi Equation with Random Coefficients,” Vychisl. Metody Programm. **11**, 261–268 (2010).

6. E. A. Illarionov, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, “Stationary Distribution of Product of Matrices with Random Coefficients,” Vychisl. Metody Programm. **13**, 218–225 (2012).

7. Ya. B. Zel’dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, “Intermittency in Random Media,” Usp. Phys. Nauk **152** (1), 3–32 (1987) [Soviet Phys. Usp. **30** (5), 353–369 (1987)].

8. Ya. B. Zel’dovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *The Almighty Chance* (World Scientific, Singapore, 1991).

9. A. Brandenburg, D. Sokoloff, and K. Subramanian, “Current Status of Turbulent Dynamo Theory: From Large-Scale to Small-Scale Dynamos,” Space Sci. Rev. **169**, 123–157 (2012).

10. V. G. Lamburt, D. D. Sokolov, and V. N. Tutubalin, “Jacobi Fields along a Geodesic with Random Curvature,” Mat. Zametki **74** (3), 416–424 (2003) [Math. Notes **74** (3), 393–400 (2003)].

11. Ya. B. Zel’dovich, “Observations in a Universe Homogeneous in the Mean,” Astron. Zh. **41** (1), 19–24 (1964) [Soviet Astron. **8** (1), 13–16 (1964)].