УДК 519.6 doi 10.26089/NumMet.v17r102

О РАСШИРЕНИИ ПРОМЕЖУТКА СХОДИМОСТИ ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Громов[1]

Рассмотрен подход к построению расширения промежутка сходимости ранее предложенного обобщения метода Ньютона для решения нелинейных уравнений одного переменного. Подход основан на использовании свойства ограниченности непрерывной функции, определенной на отрезке. Доказано, что для поиска действительных корней вещественнозначного многочлена с комплексными корнями предложенный подход дает итерации с нелокальной сходимостью. Результат обобщен на случай трансцендентных уравнений.

Ключевые слова: итерационные процессы, метод Ньютона, логарифмическая производная, непрерывные функции на отрезке, методы высших порядков, промежуток сходимости, трансцендентные уравнения.

Для каждой из многочисленных модификаций и усовершенствований метода Ньютона для решения нелинейных уравнений формулируются свои критерии сходимости [2–5]. В настоящей статье для обобщения метода Ньютона [1] предлагается подход к построению расширения промежутка сходимости, который позволяет сделать промежуток сходимости максимально широким.

В работе [1] показано, что итерационная функция

$$\Phi(x) = x + \Delta_s(x),$$
$$\Delta_s(x) = \big[Lf(x)\big]^{-1/(s+1)}, \tag{1}$$
$$Lf(x) = \frac{1}{(s)!}\left(-\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{(s)} \tag{2}$$

для производных нечетного порядка $s = 2l-1$, $l = 1, 2, \ldots$, определяет итерационный процесс порядка $2l+1$

$$x^{m+1} = \Phi\big(x^m\big), \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

который для многочленов с действительными корнями обладает нелокальной сходимостью.

При $s = 0$ итерационный процесс (3) совпадает с классическим методом Ньютона. Имея в виду неравенство (12) работы [1], далее рассматриваются итерации (3), когда $s = 2l-1$, $l = 1, 2, \ldots$.

Если вещественнозначный многочлен помимо действительных корней имеет и комплексные корни, то свойство нелокальной сходимости может нарушаться. Здесь рассмотрены причины этого и показано, как, используя свойство оператора L, изменить шаг итерации (1), чтобы обеспечить максимально широкую область сходимости (нелокальную сходимость) при вычислении действительных корней.

Рассмотрим многочлен с действительными коэффициентами вещественной переменной x

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = r(x)c(x). \tag{4}$$

Здесь $r(x)$, $c(x)$ — вещественнозначные многочлены, корнями которых являются соответственно действительные и комплексные корни многочлена $f(x)$:

$$r(x) = \prod_{i=1}^{\tau}(x - x_i), \quad c(x) = \prod_{i=\tau+1}^{n}(x - x_i),$$

где корни $x_1, x_2, \ldots, x_\tau$ действительны и $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_\tau$; корни с номерами, бóльшими τ, являются комплексно-сопряженными; коэффициент $a_0 = 1$.

[1] Одинцовский гуманитарный университет, факультет экономики, Ново-Спортивная, д. 3, 143000, Московская обл., г. Одинцово; доцент, e-mail: an_gromov@rambler.ru

Далее используется следующее свойство оператора L. Для функций, представимых в виде произведения $f(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_k(x)$, справедливо равенство

$$L(\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_k) = L\varphi_1 + L\varphi_2 + \ldots + L\varphi_k. \tag{5}$$

Для многочлена (4), принимая во внимание (5), получаем

$$Lf = L(rc) = Lr + Lc. \tag{6}$$

Используя формулу (18) работы [1], слагаемые $Lr(x)$ и $Lc(x)$ запишем в виде

$$Lr(x) = \sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{(x-x_j)^{2l}}\,, \quad Lc(x) = \sum_{j=\tau+1}^{n} \frac{1}{(x-x_j)^{2l}}, \quad l = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Замечание 1. Значения функции $Lc(x)$ являются действительными для действительных значений аргумента x, и функция $Lc(x)$ является непрерывной на всей числовой оси.

Пусть x_s — действительный корень многочлена (4) кратности k, т.е. $x_s = x_{s+1} = \ldots = x_{s+k-1}$. Используя (6) и (7), шаг итерации (1) запишем в виде

$$\Delta_{2l-1}(x) = |x - x_s|\,\alpha(x), \quad \alpha(x) = \big[t_s(x)\big]^{-1/(2l)}, \tag{8}$$

$$t_s(x) = k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s, s+1, \ldots, s+k-1}}^{\tau} \left(\frac{x-x_s}{x-x_j}\right)^{2l} + (x-x_s)^{2l} Lc(x). \tag{9}$$

Если многочлен имеет только действительные корни, то в формуле (9) отсутствует последнее слагаемое и свойства итераций (3) описываются теоремой 1 работы [1]. В общем случае знак последнего слагаемого определяется знаком функции $Lc(x)$. Рассмотрим необходимые условия ее отрицательности.

Используя формулу (7), для пары сопряженных комплексных корней $x_j = a_j + ib_j$, $x_{j+1} = a_j - ib_j$ получим

$$\sum_{m=j,j+1} \frac{1}{(x-x_m)^{2l}} = \frac{(x-a_j+ib_j)^{2l} + (x-a_j-ib_j)^{2l}}{\big[(x-a_j)^2 + {b_j}^2\big]^{2l}} = \frac{1}{b_j^{2l}}\,\frac{H_{2l}(\eta)}{\big(\eta^2+1\big)^{2l}}\,.$$

Здесь $\eta = \dfrac{x-a_j}{b_j}$, $H_{2l}(\eta) = (\eta+i)^{2l} + (\eta-i)^{2l}$.

Необходимое условие отрицательности функции $Lc(x)$ состоит в отрицательности многочлена $H_{2l}(\eta)$ хотя бы для одной пары сопряженных комплексных корней.

Решение неравенства $H_{2l}(\eta) < 0$ является тривиальным для метода третьего порядка ($l = 1$), поскольку тогда $H_2(\eta) = 2\big(\eta^2 - 1\big)$ и $H_2(\eta) < 0$, если $\eta \in (-1, 1)$, т.е. если

$$x \in (a_j - b_j,\, a_j + b_j). \tag{10}$$

Для методов более высокого порядка положительные корни уравнения $H_{2l}(\eta) = 0$ определяются в виде

$$\eta_m = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4l} + \frac{\pi}{2l}m\right), \quad m = 0, 1, \ldots, l-1, \tag{11}$$

причем, $\eta_0 > \eta_1 > \ldots > \eta_{l-1}$. Так как $H_{2l}(\eta) = H_{2l}(-\eta)$, то числа $-\eta_m$ дают остальные l корней. Для метода пятого порядка ($l = 2$) из формулы (11) находим $\eta_0 = 1+\sqrt{2}$, $\eta_1 = -1+\sqrt{2}$. Так как $H_4(0) = 2 > 0$, то имеем два промежутка отрицательности $H_4(\eta)$: $-\eta_0 < \eta < -\eta_1$ и $\eta_1 < \eta < \eta_0$, или

$$x \in (a_j + \eta_1 b_j,\, a_j + \eta_0 b_j), \quad x \in (a_j - \eta_0 b_j,\, a_j - \eta_1 b_j). \tag{12}$$

Итак, для каждого комплексного корня существует свой набор промежутков отрицательности для $H_{2l}(\eta)$. Количество этих промежутков определяется порядком метода и совпадает со значением величины l. Границы промежутков определяются положением корней (11) и знаком величины $H_{2l}(0) = 2(-1)^l$.

Анализ промежутков отрицательности позволяет объяснить наблюдаемое в численных экспериментах поведение итераций (3) (соответствующий пример приведен далее), а также указывает возможное направление улучшения метода, изложенное ниже.

Предварительно докажем лемму, которая предполагает представление (8) для шага итерации и используется далее при доказательстве теорем. Введем обозначения

$$\delta = \operatorname{sign}\bigl(x^* - x^0\bigr), \quad \omega = \begin{cases} \bigl[x^0,\, x^*\bigr], & \text{если} \quad x^0 < x^*, \\ \bigl[x^*,\, x^0\bigr], & \text{если} \quad x^0 > x^*. \end{cases} \tag{13}$$

Лемма. *Пусть функция $\alpha(x)$, $x \in \omega$, является действительной, непрерывной и удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \alpha(x) \leqslant 1. \tag{14}$$

Тогда можно определить последовательность $\bigl\{x^m\bigr\}$, $m = 0, 1, \ldots$ рекуррентной формулой

$$x^{m+1} = x^m + \delta\bigl|x^m - x^*\bigr|\alpha\bigl(x^m\bigr), \tag{15}$$

которая, монотонно возрастая (*убывая при $\delta = -1$*)*, сходится к точке x^* со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $1 - \alpha^*$. Здесь $\alpha^* = \inf\limits_{x\in\omega}\bigl\{\alpha(x)\bigr\}$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $x^0 < x^*$, т.е. $\delta = 1$. Если $x^m \in \omega$, то в силу (14) и (15) имеем $x^{m+1} > x^m$, $x^{m+1} \in \omega$, и формула (15) определяет последовательность $\bigl\{x^m\bigr\}$, которая является монотонно возрастающей и ограничена сверху значением x^*. Из (15) следует, что

$$\bigl|x^{m+1} - x^*\bigr| = \bigl|x^m - x^*\bigr|\Bigl(1 - \alpha\bigl(x^m\bigr)\Bigr). \tag{16}$$

Исключая x^m из правых частей (16), получаем

$$\bigl|x^{m+1} - x^*\bigr| = \bigl|x^0 - x^*\bigr|\prod_{j=0}^{m}\Bigl(1 - \alpha\bigl(x^j\bigr)\Bigr). \tag{17}$$

Функция $\alpha(x)$ в силу непрерывности достигает на отрезке ω своей точной нижней грани $\alpha^* = \inf\limits_{x\in\omega}\bigl\{\alpha(x)\bigr\}$. Учитывая (14), имеем

$$0 < \alpha^* \leqslant \alpha\bigl(x^j\bigr) \leqslant 1, \quad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{18}$$

Объединив (17), (18), находим оценку

$$\bigl|x^{m+1} - x^*\bigr| \leqslant \bigl|x^0 - x^*\bigr|\bigl(1 - \alpha^*\bigr)^{m+1}, \tag{19}$$

которая и указывает на сходимость $\bigl\{x^m\bigr\}$ со скоростью геометрической прогрессии.

Случай $x^0 > x^*$ ($\delta = -1$) отличается только тем, что последовательность $\bigl\{x^m\bigr\}$ является монотонно убывающей и ограничена снизу значением x^*. Формулы (16)–(19) сохраняют силу, что и доказывает лемму.

Рассмотрим способ устранения влияния отрицательности функции $Lc(x)$ на сходимость итераций (3), т.е. способ расширения промежутка сходимости метода. Перейдем от функции $f(x)$, корни которой требуется найти, к произведению $f(x)\varphi(x)$. В силу (5), шаг итерации (1) для произведения функций запишется в форме

$$\Delta_{2l-1}(x) = \bigl[Lf(x) + L\varphi(x)\bigr]^{-1/(2l)}. \tag{20}$$

Распорядившись выбором функции $\varphi(x)$, можно “исправить” поведение функции $t_s(x)$ (см. (9)).

Положим $\varphi(x) = e^{-Mx^{2l}/(2l)!}$, $M = \text{const} > 0$. Произведение $f(x)\varphi(x)$ имеет те же действительные корни, что и многочлен (4). Так как $L\varphi(x) = M$, то шаг итерации (20) примет вид

$$\Delta_{2l-1}(x) = \bigl[Lf(x) + M\bigr]^{-1/(2l)}. \tag{21}$$

Определим итерационную функцию формулой

$$\Phi(x) = x + \delta\,\Delta_{2l-1}(x), \tag{22}$$

где δ — определяется формулой (13), а $\Delta_{2l-1}(x)$ — шаг итерации (21).

Теорема 1. *Пусть начальное приближение x^0 таково, что $x^0 \neq x_j$, $j = 1, \ldots, \tau$, и правее* (*левее*) *точки x^0 лежит хотя бы один действительный корень многочлена* (4)*. Тогда существует такая* *постоянная $M \geqslant 0$, что последовательность $\{x^m\}$, вычисляемая по формулам (3) и (22), сходится к ближайшему справа (слева) от x^0 действительному корню многочлена $f(x)$, т.е. обладает нелокальной сходимостью. Для однократного корня сходимость имеет порядок $2l+1$.*

Доказательство. Пусть $x^* = x_s$ ближайшей справа (слева) от x^0 действительный корень многочлена (4) кратности k, т.е. отрезок ω (см. (13)) не содержит других корней многочлена. Для шага итерации и функции $\alpha(x)$ сохраняется формула (8), но в силу (6), (7) и (21) функция $t_s(x)$ (см. (9)) принимает вид

$$t_s(x) = k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s, s+1, \ldots, s+k-1}}^{\tau} \left(\frac{x-x_s}{x-x_j}\right)^{2l} + (x-x_s)^{2l}\big[L_c(x)+M\big]. \tag{23}$$

Так как функция $Lc(x)$ непрерывна на вещественной оси (см. замечание 1), то она ограничена на отрезке ω. Поэтому существует постоянная $M \geqslant 0$, такая, что

$$Lc(x) + M > 0, \quad x \in \omega. \tag{24}$$

Из (23) следует, что условие (24) гарантирует выполнение неравенства $t_s(x) \geqslant 1$ и, как следствие, вещественнозначность и непрерывность функции $\alpha(x)$ (см. (8)), а также выполнение неравенств (14) для $x \in \omega$.

Таким образом, выполнены условия леммы; следовательно, итерации (3) сходятся к корню x_s. Если его кратность равна единице, то согласно теореме 3 из работы [1] сходимость имеет порядок $2l+1$. Теорема доказана.

Замечание 2. Выбор постоянной M (см. (24)) определяется только расположением на плоскости комплексных корней многочлена и не связан с действительными корнями и точкой начального приближения x^0. Поэтому условие (24) нужно рассматривать как достаточное условие, гарантирующее нелокальную сходимость при вычислении действительных корней многочленов с действительными коэффициентами. Если выполнено условие (24), то выбор начального приближения x^0 ограничен только расположением полюсов логарифмической производной, соответствующих действительным корням. Это означает, что при вычислении действительных корней выбор точки x^0 ограничен только расположением ближайшего справа (или слева) от x_s корня. Поэтому можно сказать, что выполнение условия (24) обеспечивает максимально широкий промежуток сходимости.

Метод расширения промежутка сходимости итераций (3), примененный к многочленам, переносится на трансцендентные уравнения.

Теорема 2. *Пусть интервал Ω содержит точку x^* — простой нуль функции $f(x)$; интервал Ω не содержит других нулей и особых точек функции $f(x)$, для которой в Ω*

1) *существует логарифмическая производная $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$,*

2) *справедливо представление $-\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{1}{x-x^*} + g(x)$,*

3) *функция $g(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $4l-1$ $(l = 1, 2, \ldots)$ включительно,*

4) *точка начального приближения $x^0 \in \Omega$, т.е. $\omega \subset \Omega$ (см. (13)).*

Тогда существует такая постоянная $M \geqslant 0$, что последовательность $\{x^m\}$, вычисляемая по формулам (3) и (22), сходится к корню x^*. Сходимость имеет порядок $2l+1$.

Доказательство. Из формулы (2) и условий 1 и 2 теоремы имеем

$$Lf(x) = \frac{1}{\left(x-x^*\right)^{2l}} + h(x), \tag{25}$$

где $h(x) = \dfrac{g^{(2l-1)}(x)}{(2l-1)!}$ — функция, непрерывная для $x \in \omega$ в силу условия 3 теоремы.

Переходим от функции $f(x)$ к произведению $f(x)\varphi(x)$ подобно тому, как это было сделано для многочленов. Так как $L\varphi(x) = M$ и верна формула (21), то из (21) и (25) находим $\Delta_{2l-1}(x) = |x-x^*|\alpha(x)$. Здесь

$$\alpha(x) = \left[\Big(1 + \left(x-x^*\right)^{2l}\big(h(x)+M\big)\Big)\right]^{-1/(2l)}. \tag{26}$$

Функция $h(x)$ ограничена на отрезке ω, поскольку по условию теоремы она непрерывна на этом отрезке. Следовательно, существует постоянная величина $M \geqslant 0$, такая, что для любого $x \in \omega$ выполняется неравенство

$$h(x) + M > 0. \tag{27}$$

Если выполнено неравенство (27), то функция (26) удовлетворяет условиям леммы, что и доказывает сходимость. Порядок сходимости из малой окрестности корня следует из теоремы 3 работы [1].

Проведенные численные эксперименты согласуются с теоретическими выводами.

В работе [6] сравниваются методы Ньютона и Мюллера (метод парабол) на примере вычисления корней многочлена 7-й степени

$$\begin{aligned} f(x) = 0.001x^7 - 0.028x^6 + 0.322x^5 - 1.960x^4 + \\ + 6.769x^3 - 13.133x^2 + 13.068x - 5.040. \end{aligned} \tag{28}$$

Численные эксперименты с многочленом (28), выполненные с использованием формул (40) и (41) работы [1], показали нелокальную сходимость итераций (3) при вычислении корней

$$x_1 = 1.0013976, \quad x_2 = 1.9689208, \quad x_3 = 3.3183233, \quad x_4 = 3.5050604.$$

С корнем $x_5 = 7.0599281$ ситуация иная. Для метода третьего порядка ($l = 1$, формула (41)) сходимость к корню x_5 наблюдается от значения $x^0 = 5.9$, а для метода пятого порядка ($l = 2$, формула (40)) — от $x^0 = 6.3$. Объясняется это тем, что многочлен (28) имеет пару сопряженных комплексных корней $x_{6,7} = a \pm ib = 5.5731849 \pm i0.2641298$ и у функции $Lc(x)$ (см. (7)) существуют промежутки отрицательности, расположенные между бóльшими корнями x_4 и x_5. Для метода третьего порядка ($l = 1$), согласно (10), это промежуток $(a - b, a + b) \approx (5.309, 5.837)$, а для метода пятого порядка, в силу (12), — промежутки $(4.935, 5.464)$ и $(5.683, 6.211)$. Именно это является причиной отсутствия нелокальной сходимости при вычислении большего корня.

Для многочлена (28) функция $Lc(x)$ при $l = 1$ (метод третьего порядка) имеет вид

$$Lc = \frac{1}{b^2}\,\frac{\eta^2 - 1}{\left(\eta^2 + 1\right)^2}\,, \quad \eta = \frac{x - a}{b}\,.$$

Очевидно, что $\min Lc(x) = Lc\,(a) = -2/b^2$.

Поскольку $Lc(a) \approx -29.6$, то согласно теореме 1 выбор $M > 29.6$ гарантирует выполнение неравенства (24) и нелокальную сходимость при вычислении корня x_5. Численные эксперименты показывают, что итерации (3) обладают этим свойством уже при $M = 27$.

Примером, иллюстрирующим использование теоремы 2, может служить задача вычисления корней функции $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. Известно [7], что $\operatorname{tg} z$ — трансцендентная мероморфная функция с полюсами в точках $\pi/2 + k\pi$. Поэтому $Lf(x)$ так же мероморфна, и к полюсам тангенса добавляются полюса в точках, которые являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x - x = 0$. Если вычисляется наименьший положительный корень x_1 этого уравнения, то расширение промежутка сходимости влево от корня x_1 (выбор начального приближения) ограничен полюсом тангенса в точке $\pi/2$, а вправо — полюсом тангенса в точке $3\pi/2$. Так как $h(x) \to -\infty$ при $x \to \pi/2$ $(3\pi/2)$, то чем ближе к полюсу выбрана точка x^0, тем большее значение постоянной M приходится выбирать, чтобы удовлетворить условию (27) теоремы 2. Например, если $x^0 = 1.7$, то

$$\min_{x \in \left[x^0, x_1\right]} h(x) = h(1.7) \approx -60.$$

Неравенство (27) выполняется при $M = 62$, а итерационная функция (22) при $\delta = 1$ обеспечивает сходимость к корню $x_1 = 4.493409$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов А.Н.* Об одном подходе к построению одноточечных итерационных методов для решения нелинейных уравнений одного переменного // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 298–306.
2. *Жанлав Т., Чулуунбаатар О.* Сходимость непрерывного аналога метода Ньютона для решения нелинейных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**. 402–407.
3. *Zafar F., Mir N.A.* A generalized family of quadrature based iterative methods // General Mathematics, 2010. **18**, N 4. 43–51.

4. *Baghmisheh M., Mahmoudi Y., Jahangirirad M.* A new modification of Newton's method by Gauss integration formula // Life Science Journal. 2013. **10**. 288–291.
5. *Omran H.H.* Modified third order iterative method for solving nonlinear equations // Journal of AI-Nahrain University. 2013. **16**, N 3. 239–245.
6. *Conte S.D., De Boor C.W.* Elementary numerical analysis: an algorithmic approach. New York: McGraw-Hill, 1980.
7. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
13.10.2015

Increasing the Interval of Convergence for a Generalized Newton's Method of Solving Nonlinear Equations

A. N. Gromov [1]

[1] *Odintsovo Humanitarian University, Faculty of Economics; ulitsa Novo-Sportivnaya 3, Odintsovo, Moscow Region, 143000, Russia; Associate Professor, e-mail: an_gromov@rambler.ru*

Received October 13, 2014

Abstract: An approach to the construction of an extended interval of convergence for a previously proposed generalization of Newton's method to solve nonlinear equations of one variable. This approach is based on the boundedness of a continuous function defined on a segment. It is proved that, for the search for the real roots of a real-valued polynomial with complex roots, the proposed approach provides iterations with nonlocal convergence. This result is generalized to the case transcendental equations.

Keywords: iterative processes, Newton's method, logarithmic derivative, continuous functions defined on a segment, higher order methods, interval of convergence, transcendental equations.

References

1. A. N. Gromov, "An Approach for Constructing One-Point Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations of One Variable," Vychisl. Metody Programm. **16**, 298–306 (2015).

2. T. Zhanlav and O. Chuluunbaatar, "Convergence of a Continuous Analog of Newton's Method for Solving Nonlinear Equations," Vychisl. Metody Programm. **10**, 402–407 (2009).

3. F. Zafar and N. A. Mir, "A Generalized Family of Quadrature Based Iterative Methods," General Math. **18** (4), 43–51 (2010).

4. M. Baghmisheh, Y. Mahmoudi, and M. Jahangirirad, "A New Modification of Newton's Method by Gauss Integration Formula," Life Sci. J. **10**, 288–291 (2013).

5. H. H. Omran, "Modified Third Order Iterative Method for Solving Nonlinear Equations," J. AI-Nahrain Univ. **16** (3), 239–245 (2013).

6. S. D. Conte and C. W. De Boor, *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach* (McGraw-Hill, New York, 1980).

7. A. I. Markushevich, *The Theory of Analytic Functions* (Nauka, Moscow, 1967; Chelsea, New York, 1977).