

УДК 514.174.2

doi 10.26089/NumMet.v17r216

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ УПАКОВКИ КОНГРУЭНТНЫХ КРУГОВ В НЕОДНОСВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО С НЕЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ

А. Л. Казаков¹, А. А. Лемперт², Г. Л. Нгуен³

Рассматривается задача об упаковке конгруэнтных кругов в ограниченное множество (контейнер) в двумерном метрическом пространстве: требуется найти такое расположение кругов в контейнере, при котором они заполняют как можно большую долю последнего. В случае, когда пространство является евклидовым, эта задача достаточно хорошо изучена, однако существует ряд прикладных задач, в частности в области инфраструктурной логистики, которые приводят нас к необходимости использовать специальные неевклидовы метрики. Исследованию таких задач и посвящена данная работа, причем рассматриваются как односвязные, так и многосвязные контейнеры. Разработан и программно реализован алгоритм численного решения указанной задачи, основанный на оптико-геометрическом подходе. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: оптимальная упаковка кругов, оптико-геометрический подход, неевклидово пространство, многосвязная область, численный метод, вычислительный эксперимент.

1. Введение. Настоящая работа представляет собой продолжение выполненных ранее исследований авторов [1] (см. также [2]) и посвящена проблеме построения оптимальных упаковок шаров равного радиуса в ограниченном множестве со сложной конфигурацией в пространстве размерности два. При этом расстояние между точками задается специальным образом и, вообще говоря, не является евклидовым.

Задача о построении оптимальных упаковок [3], безусловно, принадлежит к числу классических математических проблем. Едва ли стоит здесь обсуждать историю вопроса, отметим лишь, что одно из известных утверждений, относящихся к упаковке шаров в трехмерном евклидовом пространстве (о том, что среди всех упаковок шаров равного размера в трехмерном пространстве наибольшую среднюю плотность имеет гранецентрированная кубическая упаковка и упаковки, равные ей по плотности), и было сформулировано Иоганном Кеплером еще в 1611 г. и носит его имя (гипотеза Кеплера).

В литературе встречаются различные постановки данной проблемы: от различных вариантов задачи о рюкзаке [4] до рассмотрения ее в абстрактном n -мерном пространстве [5]. Отметим, что практически всегда (кроме некоторых специальных случаев) задача об упаковке является NP-полной и, соответственно, проблема построения эффективных численных алгоритмов ее решения является чрезвычайно актуальной [6].

По-видимому, наиболее популярной из данного класса проблем является задача об оптимальной упаковке двумерных шаров (кругов) равного радиуса в ограниченное множество с гладкой или кусочно-гладкой границей. Так, в работах [7–9] рассматривалась задача о построении наилучшей упаковки в квадрат при числе кругов от 1 до 200. При этом в случае, когда количество элементов упаковки невелико (до 36 включительно), задача решена аналитически, т.е. строго доказано, что полученные результаты являются наилучшими. В работах [10–12] рассматривалась задача о наилучшей упаковке в круг, получены результаты при числе элементов упаковки до 81. В статье [13] исследована задача упаковки заданного числа кругов единичного радиуса в круг, прямоугольник, треугольник с минимизацией размеров этих фигур (радиуса, площади, периметра, ширины и др.).

Задача об упаковке кругов разных заданных радиусов с максимизацией их числа или веса либо минимизацией пустот исследована в [14, 15], предложена эвристика на основе пространственного поиска для задачи упаковки кругов равного и разного радиусов в различные множества [16, 17]. Наконец, содержательная и оригинальная задача об упаковке кругов разных радиусов, когда меньшие могут располагаться внутри больших (telescoping), была исследована в статье [18].

¹ Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, 664033, г. Иркутск; зав. лабораторией, e-mail: kazakov@icc.ru

² Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, 664033, г. Иркутск; вед. науч. сотр., e-mail: lempert@icc.ru

³ Иркутский национальный исследовательский технический университет, Институт кибернетики им. Е. И. Попова, ул. Лермонтова, 83, 664074, г. Иркутск; аспирант, e-mail: nguyenhuyliem225@gmail.com

Отметим, что авторы при рассмотрении задачи об упаковке не ограничивались случаем, когда элементы последней являются кругами. Так, в работе [19] рассмотрена упаковка прямоугольников (с возможностью их поворота) в треугольники, задача об упаковке эллипсов в прямоугольную область рассмотрена в статье [20].

Завершая обзорную часть нашей статьи, отметим, что библиографию можно было бы продолжить — существует огромное заслуживающих внимания публикаций. При этом, хотя большинство книг и статей посвящены исследованию задачи об упаковке в евклидовом пространстве, тем не менее, существуют и исключения. В работах [21, 22] представлено решение задачи расстановки сфер равных радиусов в двухмерных и трехмерных пространствах постоянной кривизны (гиперболическом и эллиптическом) так, чтобы их плотность была наибольшей. Кроме того, данная проблема исследовалась в цикле работ Дж. Жирмая (J. Szirmai): в [23] описан способ построения оптимальной упаковки шаров для черепицы Кокстера (Coxeter tiling) в гиперболическом трехмерном пространстве, в [24] предложен метод, основанный на проективной интерпретации гиперболической геометрии, в [25] расширена задача нахождения наиболее плотной геодезической упаковки шаров для 3-мерных геометрий Терстона (Thurston geometries). Отметим, что задачи, в которых при определении расстояния между точками приходится рассматривать неевклидовы метрики, возникают и в связи с приложениями [26–28].

В настоящей статье рассматривается задача об оптимальной упаковке кругов в ограниченное множество с непрерывной границей в специальной метрике, которая, вообще говоря, не является евклидовой (но становится ей в одном частном случае). Множество при этом не обязано быть выпуклым и даже односвязным. Разработан и программно реализован алгоритм решения данной задачи, основанный на оптико-геометрическом методе, развиваемом авторами в последние годы [29, 30]. Проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого были решены модельные примеры и показана работоспособность предложенного подхода.

2. Постановка задачи. Пусть имеются метрическое пространство X , конгруэнтные круги C_i , $i = 1, \dots, n$, с центрами $s_i = (x_i, y_i)$ и замкнутое многосвязное множество P , заданное следующим образом: $P = \text{cl} \left(D \setminus \bigcup_{k=1}^m B_k \right) \subset X \subseteq \mathbb{R}^2$. Здесь $D \subset X$ — ограниченное множество, $B_k \subset D$, $k = 1, \dots, m$, — компактные множества с непустой внутренностью.

Необходимо найти такой вектор $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, который обеспечит размещение в области P заданного числа кругов максимального радиуса R .

Расстояние между точками пространства X определим следующим образом:

$$\rho(a, b) = \min_{G \in G(a, b)} \int_G \frac{dG}{f(x, y)}. \quad (1)$$

Здесь $G(a, b)$ — множество всех возможных непрерывных кривых, лежащих в X и соединяющих точки a и b , $0 < \alpha \leq f(x, y) \leq \beta$ — непрерывная функция, задающая мгновенную скорость движения в каждой точке множества P . Иными словами, кратчайшим путем между точками будет кривая, на преодоление которой затрачивается наименьшее время.

Легко убедиться, что все аксиомы метрики выполнены. В частном случае, когда $f(x, y) \equiv 1$, имеем обычную евклидову метрику в пространстве размерности два.

В общем виде получим следующую задачу:

$$R \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq 2R \quad \forall i = \overline{1, n-1}, \quad \forall j = \overline{i+1, n}, \quad (3)$$

$$\rho(s_i, \partial P) \geq R \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$s_i \in P \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Здесь ∂P граница множества P и $\rho(s_i, \partial P)$ — расстояние от точки до замкнутого множества.

Целевая функция (2) максимизирует радиус упаковываемых кругов. Формула (3) обеспечивает непересечение внутренностей кругов. Формулы (4) и (5) гарантируют, что каждый круг полностью лежит внутри множества P .

Для любого вектора s , удовлетворяющего условиям (3)–(5), определим множества

$$P_i = \{p \in P : \rho(p, s_i) \leq \rho(p, s_j), \forall j = 1, \dots, n, i \neq j\}. \quad (6)$$

В литературе такие множества называют областями Дирихле [31] точек s_i во множестве P . Очевидно, что $P = \bigcup_{i=1}^n P_i$.

Решение поставленной задачи сводится к решению следующей последовательности подзадач:

- 1) для каждого множества P_i определим точку $\bar{s}_i \in P_i$, такую, что $\rho(\bar{s}_i, \partial P_i) = \max_{p \in P_i} \rho(p, \partial P_i)$;
- 2) определим гарантированное значение радиуса, удовлетворяющего ограничениям (3)–(5):

$$R = \min_{i=1, \dots, n} \rho(\bar{s}_i, \partial P_i);$$

- 3) для найденного вектора $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ переопределим множества P_i в соответствии с (6).

Выполнение пунктов 1–3 производится до тех пор, пока изменяются координаты вектора \bar{s} .

3. О вычислительных алгоритмах. Для решения описанных выше подзадач авторами предлагаются методы, основанные на физических принципах Ферма и Гюйгенса, применяемых в геометрической оптике. Первый гласит, что свет в своем движении выбирает маршрут, который он преодолевает за минимальное время, второй утверждает, что каждая точка, достигнутая световой волной, становится вторичным источником света.

Таким образом, для решения первой подзадачи необходимо производить для каждой области P_i построение фронта световой волны, выпущенной с границы ∂P_i до момента времени, когда фронт выродится в точку. Координаты последней и будут искомым решением \bar{s}_i . Вторая подзадача решается легко — достаточно выбрать минимальный радиус кругов из всех найденных при решении первой подзадачи. Для решения же третьей подзадачи требуется одновременно выпустить световые волны из точек \bar{s}_i и определить те точки области P , которых две или более волны достигают одновременно. Такой алгоритм был разработан авторами ранее в работе [29]. Перейдем непосредственно к описанию новых алгоритмов.

Алгоритм отыскания центра вписанной окружности (алгоритм BWI)

1. Граница области аппроксимируется замкнутой ломаной с узлами в точках $A_i, i = \overline{0, m}$ (исходные точки).
2. Из каждой пары точек A_i и A_{i+1} вдоль нормали к соединяющему их отрезку откладываются отрезки $A_i B'_i$ и $A_{i+1} B''_i$ длиной $f(A_i)\Delta t$ и $f(A_{i+1})\Delta t$ соответственно. Заметим, что новых точек получается в два раза больше, чем исходных. Пусть B — множество всех таких отрезков.
3. Если найдется пара отрезков $VW \in B, YZ \in B$, таких, что $W = Z$, то все точки начального фронта, лежащие между V и Y , исключаются из рассмотрения.
4. Строятся прямые $B'_i B''_i, i = \overline{0, m-1}$, проходящие через точки B'_i и B''_i .
5. Точки пересечения прямых $B'_i B''_i$ и $B'_{i+1} B''_{i+1}, i = \overline{0, m-2}$, образуют множество точек нового фронта.
6. Если найдется пара пересекающихся отрезков $VW \in B$ и $YZ \in B$, то все точки, лежащие между V и Y на начальном фронте, исключаются из рассмотрения, а точка пересечения принимается за точку нового фронта.
7. Если построенное многообразие является незамкнутой кривой, то решением является “середина”, т.е. точка, расстояния от которой до концов данной линии одинаково. Если остается единственная точка на строящемся фронте, то данная точка является решением. В противном случае построенный фронт принимается за начальный и выполняется Шаг 1.

Отметим, что после определения начального фронта волны вся область вне замкнутой линии считается непроходимой и направление вектора нормали выбирается внутрь области.

Шаги 3 и 6 обеспечивают корректное построение фронта при образовании “ласточкиного хвоста”.

На рис. 1 проиллюстрирована работа алгоритма: слева показан процесс конструирования первого фронта, по центру — момент распада фронта, справа — вписанный круг максимального радиуса.

В случае, когда область P_i не является односвязной, иначе говоря, в ней присутствуют непроходимые для световой волны барьеры, для решения первой подзадачи необходим дополнительный алгоритм конструирования волновых фронтов, распространяющихся с границы барьера во внешнюю область (BorderWaveOutside — BWO). Данный алгоритм отличается от алгоритма BWI выбором направления нормали — здесь она направлена во внешнюю область.

Тогда общий алгоритм решения подзадачи 1 с учетом возможной многосвязности имеет следующий вид.

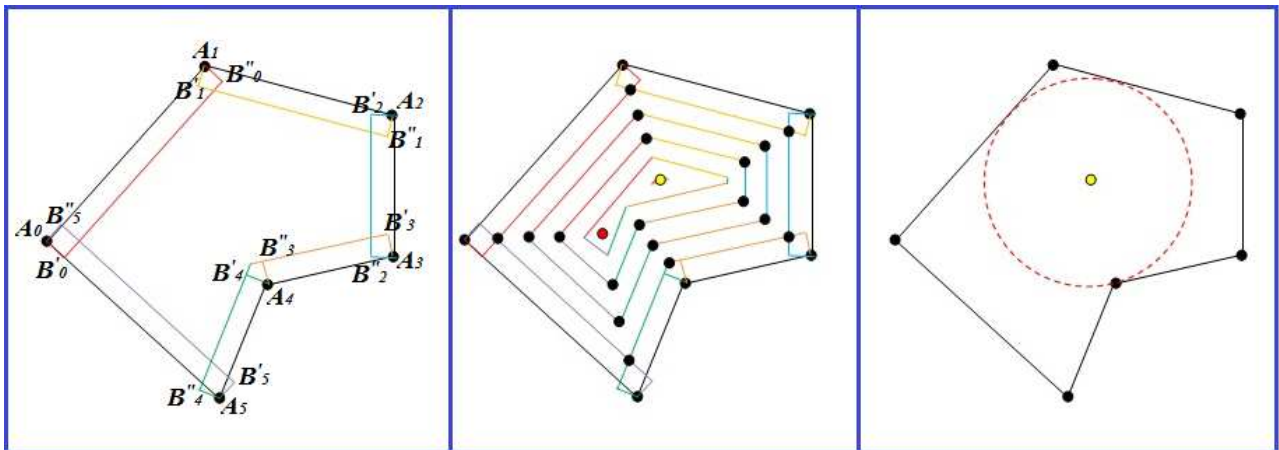


Рис. 1. Иллюстрация работы алгоритма BWI

Алгоритм BWI-MCD

1. С помощью алгоритма BWI строятся фронты световой волны, выпущенной с границы области. С помощью алгоритма BWO строятся фронты световых волн, выпущенных с границ всех барьеров. Работа алгоритмов продолжается до первого соприкосновения BWI-волны с одной из BWO-волн. Построенные фронты сохраняются.
2. Множество точек, которых не достигла ни одна из волн, разбивается на максимальные односвязные подмножества S_j (сегменты), которые сохраняются в списке сегментов S . При этом сегменты, полученные на предыдущей итерации, удаляются.
3. Выполняется одна итерация алгоритмов BWI и BWO, начиная с сохраненных фронтов. Процесс 2–3 продолжается до тех пор, пока множество точек, которых не достигла ни одна из волн, не пусто.
4. Для всех элементов списка сегментов проводится анализ: если сегмент содержит единственную точку, то она является потенциальным решением; если сегмент является незамкнутой кривой, то потенциальным решением является ее “середина”; в остальных случаях потенциальное решение находится с помощью алгоритма BWI, поскольку сегмент является односвязным множеством. Все полученные потенциальные решения q_j заносятся в список Q .
5. Анализируется список потенциальных решений Q :
если он содержит одну точку — такая точка будет искомым решением;
в противном случае для каждой точки $q_j \in Q$ с помощью алгоритма, предложенного авторами ранее в работе [29], вычисляется величина $r_j = \rho(q_j, \partial P_i)$, где ∂P_i — граница рассматриваемого множества P_i . Искомым решением будет такая точка $q^* \in Q$, для которой $r^* = \max_j r_j$.

На рис. 2 представлены некоторые итерации алгоритма BWI-MCD: слева показан процесс конструирования первого фронта с границы множества — внутрь и с границы барьера — наружу, по центру — фронты на последней итерации, справа — вписанный круг максимального радиуса.

Таким образом, алгоритм AGOPEC-MCD численного решения задачи (2)–(5) имеет следующий вид.

Шаг 1. Методом случайной генерации задается вектор $s = (s_1, \dots, s_n)$, удовлетворяющий ограничению (5) и определяющий начальное расположение центров упаковываемых кругов. Радиус R полагается равным нулю.

Шаг 2. Область P разбивается на подмножества $P_i, i = 1, \dots, n$, согласно определению (6) с помощью алгоритма, предложенного авторами в [29].

Шаг 3. Для каждого $P_i, i = 1, \dots, n$, с помощью алгоритма BWI-MCD решается подзадача 1. В результате для каждого $P_i, i = 1, \dots, n$, находятся координаты центра упакованного круга \bar{s}_i и его максимально возможный радиус r_i .

Шаг 4. Вычисляется величина $R = \min_{i=1, \dots, n} \rho(\bar{s}_i, \partial P_i)$.

Шаги 2–4 повторяются до тех пор пока R увеличивается, после чего текущий вектор \bar{s} сохраняется в качестве приближения к глобальному максимуму задачи.

Шаг 5. Значение счетчика количества генерации начальных положений I_{iter} увеличивается на единицу. Если значение I_{iter} достигло наперед заданной величины, то работа алгоритма завершается, в противном случае осуществляется переход к шагу 1.

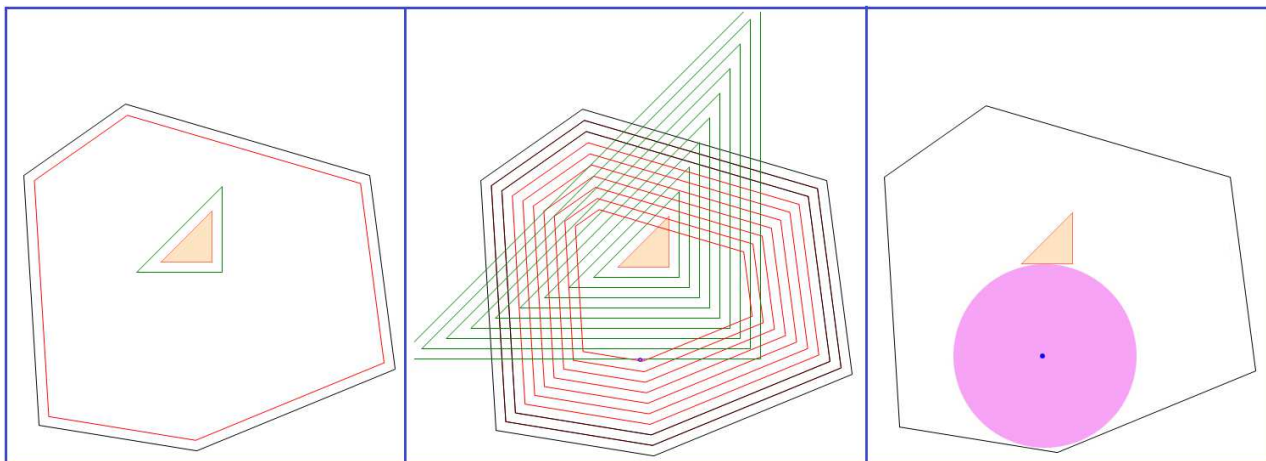


Рис. 2. Иллюстрация работы алгоритма BWI-MCD

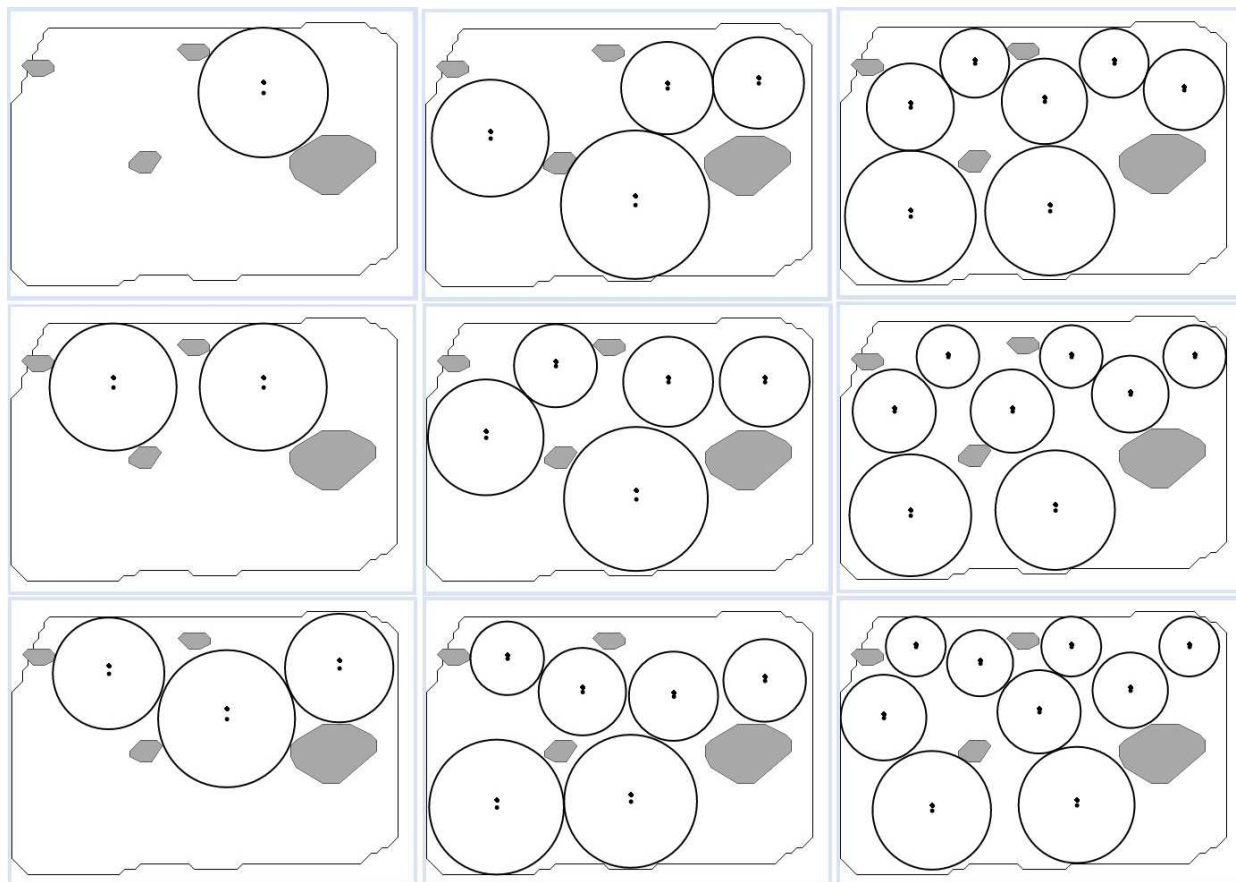


Рис. 3. Результаты работы алгоритма AGOPEC-MCS в метрике с линейной функцией $f(x, y)$

Таблица 1

Сравнение результатов по упаковке равных кругов в единичный квадрат

n	Packomania	FSS-Algorithm			AGOPEC-MCS		
	R_{Known}	R_{max}	ΔR	t	R_{max}	ΔR	t
50	0,071377104	0,071376623	0,000000481	276	0,070578606	0,000798498	88
55	0,068055361	0,068055219	0,000000141	286	0,067326392	0,000728968	105
60	0,065030412	0,065030109	0,000000304	350	0,064219475	0,000810937	154
65	0,063203957	0,063202599	0,000001358	487	0,062336383	0,000867574	178
70	0,060596693	0,060574482	0,000022212	517	0,059924009	0,000672684	196
75	0,058494535	0,058091304	0,000403232	621	0,057954653	0,000539883	217
80	0,057370684	0,057370675	0,000000009	750	0,056284924	0,001085760	264
85	0,055680182	0,055446138	0,000234044	978	0,054740839	0,000939342	290
90	0,053749948	0,053745827	0,000004121	1179	0,052814894	0,000935055	325
95	0,052420366	0,052302778	0,000117588	1423	0,051696657	0,000723709	350
100	0,051401072	0,051272763	0,000128308	1317	0,050269024	0,001132048	376
150	0,042145465	0,041976579	0,000168887	4107	0,041309389	0,000836076	895
200	0,036612799	0,025722283	0,010890516	8790	0,035969127	0,000643672	1457
250	0,032876318	0,030028915	0,002847403	18111	0,032102759	0,000773559	2246
300	0,030219556				0,029447787	0,000771768	3254
500	0,023455498	0,000974943	0,022480556	133443	0,022846434	0,000609065	8725
750	0,019274487				0,018623105	0,000651382	13604
992	0,015873015				0,016255831	- 0,000382816	19709
1000					0,016203402		25452
1500	0,013157896				0,013163195	-0,000005299	31713
1750					0,012198113		56750
2000	0,011725938				0,011516338	0,000209600	94265
2500					0,010224897		144541
3000	0,009674511				0,009243172	0,000431339	217489

4. Вычислительный эксперимент. Тестирование предложенных в предыдущем разделе алгоритмов проведено с использованием ПК следующей конфигурации: Intel(R) Core(TM) i5-3570K (частота 3,4 ГГц, 8 Гб ОЗУ) и операционная система Windows 7. Алгоритм реализован на языке программирования C# с помощью пакета Visual Studio 2008.

4.1. Пример 1. В этом примере приведено сравнение полученных авторами результатов с результатами из [16] и [32] для задачи упаковки равных кругов в единичный квадрат в евклидовой метрике $f(x, y) \equiv 1$ (табл. 1). Здесь n — количество упакованных кругов, R_{Known} — радиус упаковки из [32], R_{max} — наилучшие радиусы упаковки, найденные с помощью алгоритма FSS из [16] и предложенного авторами алгоритма соответственно, $\Delta R = R_{\text{Known}} - R_{\text{max}}$, t — время работы алгоритмов в секундах. Для алгоритма FSS представленные результаты получены с использованием ПК следующей конфигурации: Intel Core 2 (частота 2,26 ГГц, 4 Гб ОЗУ). В алгоритме AGOPEC-MCS число случайных генераций начальных положений $\text{Iter} = 25$ для $n < 1000$ и $\text{Iter} = 10$ для $n \geq 1000$.

Отметим, что результаты, приведенные в [32], периодически обновляются.

Таблица 2

Результаты работы алгоритма AGOPEC-MCS в метрике с линейной функцией $f(x, y)$

n	$R_{\max}(C_i)$	$d_{\max}(C)$	$d(B)$	t
1	16,527346331393	0,1422287390029	0,05923753666	5
2	16,327346331393	0,2568914956012	0,05923753666	24
3	14,727366452638	0,3457478005865	0,05923753666	93
4	12,073910232426	0,4228739002933	0,05923753666	118
5	11,716530187222	0,460410557185	0,05923753666	172
6	10,465709645054	0,5152492668622	0,05923753666	261
7	10,177421863992	0,5229013268547	0,05923753666	366
8	9,277421863992	0,48797653958944	0,05923753666	406
9	9,078237450345	0,50615835777126	0,05923753666	425

Пустые строки в табл. 1 означают отсутствие известных результатов для соответствующих n .

Нетрудно видеть, что, по сравнению с известными, результаты, полученные авторами, в большинстве своем несколько хуже, однако отклонение радиуса упакованных кругов от оптимального не превосходит 0,12% (для $n < 50 - 0,001\%$). Тем не менее, в двух случаях предложенным авторами алгоритмом были найдены решения, улучшающие известные ($n = 992, n = 1500$). При этом общее время решения задачи относительно невелико даже для $n = 3000$ (например, по сравнению с FSS-алгоритмом [16]). Отсюда можно сделать вывод, что предложенный алгоритм, несмотря на то что он, строго говоря, напрямую не предназначен для решения задач об упаковке в евклидовой метрике, показывает и здесь хорошие результаты, особенно при достаточно больших значениях n .

4.2. Пример 2. Данный пример иллюстрирует работу алгоритма AGOPEC-MCS в случае, когда метрика задается формулой (1), где $f(x, y) = v_0(1 + ky)$, v_0, k — заданные константы. Такая метрика означает, что скорость распространения световых волн линейно возрастает с ростом координаты y . В работе [33] показано, что волновые фронты в этом случае так же, как и в евклидовой метрике, имеют форму окружности, однако источник волны (центр круга) оказывается смещен.

Результаты расчетов представлены в табл. 2. Здесь n — количество упакованных кругов; $R_{\max}(C_i)$, $d_{\max}(C)$ — наилучшие радиус и плотность упаковки соответственно, найденные с помощью предложенного авторами алгоритма; $d(B)$ — плотность барьеров; t — время работы алгоритма (в секундах). Число случайных генераций начальных положений $I_{\text{тер}} = 10$. На рис. 3 представлено графическое отображение результатов из табл. 2. Начало координат расположено в верхнем левом углу, ось Oy направлена вниз. Серым цветом показаны барьеры. Для каждого вписанного круга отмечены: центр в заданной метрике (верхняя точка) и центр в евклидовой метрике (нижняя точка). Отметим, что в заданной метрике представленные на рис. 3 круги имеют одинаковый радиус.

4.3. Пример 3. В данном примере метрика определяется по формуле (1) со следующей $f(x, y)$:

$$a(x, y) = \frac{(x - 3.5)^2 + (y - 3.5)^2}{1 + (x - 3.5)^2 + (y - 3.5)^2}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0.3, & a(x, y) \leq 0.3, \\ a(x, y), & \\ 0.8, & a(x, y) \geq 0.8. \end{cases}$$

На рис. 4 показана функция $f(x, y)$, значения которой увеличиваются от желтого к синему.

Подобные метрики используются в инфраструктурной логистике, когда требуется разместить определенное количество однотипных обслуживающих объектов (магазинов, банкоматов и т.п.) на холмистой местности, предполагая, что скорость движения зависит от угла подъема или спуска. Отметим, что форма волнового фронта зависит от расположения источника относительно начала координат и заранее не известна. Барьеры в данном случае являются кругами.

Полученные результаты показаны на рис. 5 в табл. 3.

Из рис. 5 можно видеть, что алгоритм AGOPEC-MCS показывает хорошие результаты даже для достаточно сложных метрик. Заметим, что как и в предыдущем примере, в заданной метрике, представ-

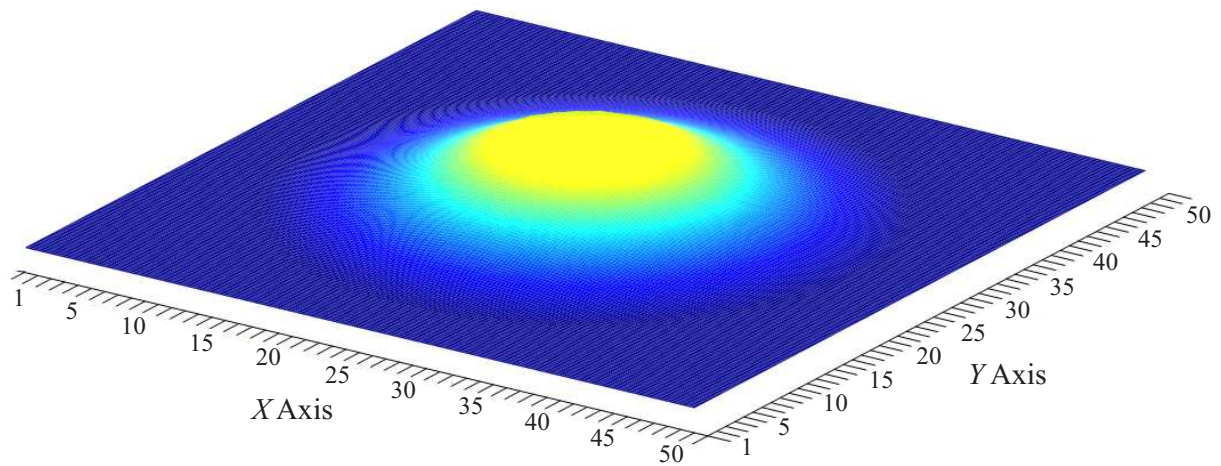
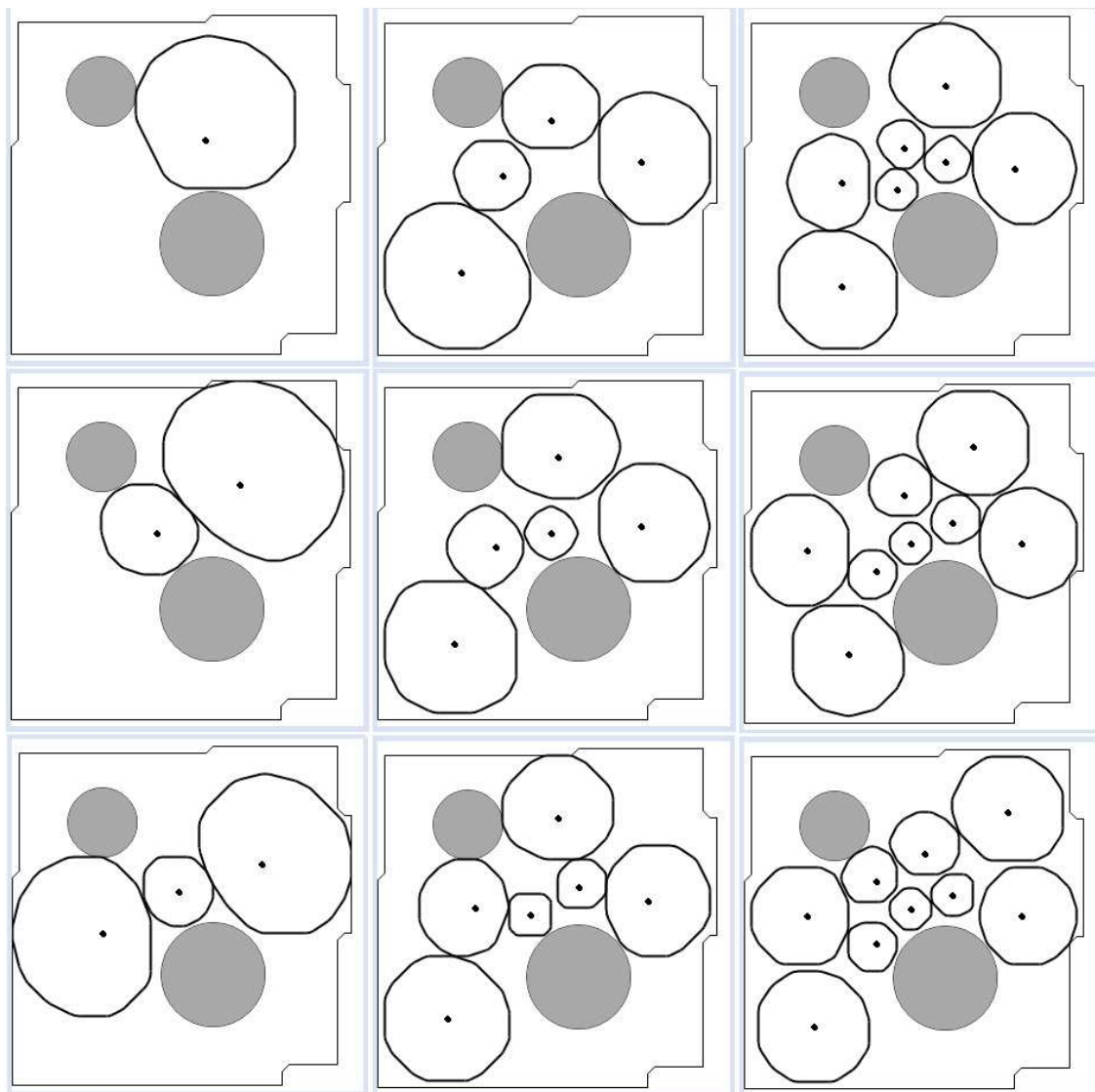
Рис. 4. 3D вид функции $f(x, y)$ 

Рис. 5. Результаты работы алгоритма AGOPES-MCS (пример 3)

ленные на рис. 5 упакованные фигуры являются окружностями с равными радиусами.

Таблица 3
 Результаты работы алгоритма AGOPEC-MCS (пример 3)

n	$R_{\max}(C_i)$	$d_{\max}(C)$	$d(B)$	t
1	26,01653189	0,2841437632135	0,10792998017	3,557
2	20,87023745	0,2968287526427	0,10792998017	35,116
3	17,773532697	0,3830866807611	0,10792998017	41,122
4	14,415223918	0,3826638477801	0,10792998017	53,321
5	13,394001606	0,4025369978858	0,10792998017	60,279
6	12,3281904158	0,4097251585624	0,10792998017	73,866
7	11,9309576301	0,3953488372093	0,10792998017	79,092
8	11,3310576006	0,4452431289641	0,10792998017	98,343
9	10,7652374503	0,4549682875264	0,10792998017	109,435

5. Заключение. Задача об упаковке, которая является одной из известнейших и популярнейших математических проблем, рассматривалась в тысячах публикаций, однако, как правило, объектом рассмотрения являлись выпуклые множества и евклидовы расстояния между точками. Результатов, которые относились бы случаю неевклидовой метрики, известно достаточно мало, особенно если упаковка производится в неодносвязное множество. Именно такой случай в представленной работе и является предметом рассмотрения.

Для решения рассмотренной задачи авторы использовали подход, основанный на двух фундаментальных принципах геометрической оптики: Ферма и Гюйгенса, который позволяет эффективно выполнять разбиение множества на зоны Дирихле для широкого класса метрических пространств, включая, разумеется, и евклидово. На основе данного подхода разработаны численные алгоритмы, позволяющие эффективно решать задачу об упаковке для неодносвязных множеств, в том числе и для неевклидовой метрики.

Алгоритмы программно реализованы, и проведен вычислительный эксперимент, результаты которого позволяют, прежде всего, сделать вывод о работоспособности предложенного подхода. В частности, для рассмотренных примеров, решенных ранее аналитически, получены результаты, совпадающие с теоретическими.

Кроме того, достаточно неожиданно для авторов выяснилось, что созданная программа показывает высокую эффективность при решении классических задач об упаковке в выпуклые множества кругов равного радиуса в евклидовой метрике, когда число кругов велико, при этом прослеживается тенденция повышения результативности с увеличением количества элементов упаковки. Так, в задаче об упаковке в единичный квадрат для случаев $n = 992$ и $n = 1500$ получены результаты лучше представленных на известном сайте www.packomania.com [32]. Наконец, наша программа заметно выигрывает у других аналогичных продуктов по быстрдействию: расчеты выполняются в 1,5–8 раз быстрее.

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ (проекты 14–07–00222 и 16–31–00356).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казаков А.Л., Лебедев П.Д. Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2015. **16**. 307–317.
2. Бугаров Д.С., Казаков А.Л. Программная система “Виголт” для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. **13**. 65–74.
3. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990.
4. Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D. Knapsack problems. Berlin: Springer, 2004.
5. Левенштейн В.И. О границах для упаковок в n -мерном евклидовом пространстве // Доклады АН СССР. 1979. **245**, № 6. 1299–1303.

6. Гэри М.Р., Джонсон Д.С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
7. Casado L.G., Garcia I., Szabó P.G., Csendes T. Packing equal circles in a square II — New results for up to 100 circles using the TAMSASS-PECS algorithm // Optimization Theory. Dordrecht: Kluwer, 2001. 207–224.
8. Markót M.Cs., Csendes T. A new verified optimization technique for the “packing circles in a unit square” problems // SIAM Journal on Optimization. 2005. **16**, № 1. 193–219.
9. Szabó P.G., Specht E. Packing up to 200 equal circles in a square // Global Optimization. NY: Springer, 2007. 141–156.
10. Goldberg M. Packing of 14, 16, 17 and 20 circles in a circle // Mathematics Magazine. 1971. **44**, N 3. 134–139.
11. Graham R.L., Lubachevsky B.D., Nurmela K.J., Östergard P.R.J. Dense packings of congruent circles in a circle // Discrete Mathematics. 1998. **181**, N 1–3. 139–154.
12. Lubachevsky B.D., Graham R.L. Curved hexagonal packings of equal disks in a circle // Discrete Comput. Geom. 1997. **18**, N 2. 179–194.
13. Birgin E.G., Gentil J.M. New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips // Computers and Operations Research. 2010. **37**, N 7. 1318–1327.
14. Litvinchev I., Ozuna E.L. Integer programming formulations for approximate packing circles in a rectangular container // Mathematical Problems in Engineering. 2014. doi: 10.1155/2014/317697.
15. Litvinchev I., Ozuna E.L. Packing circles in a rectangular container // Proceedings of the International Congress on Logistics and Supply Chain. Queretaro: Mexican Inst. of Transportation, 2013. 24–25.
16. López C.O., Beasley J.E. A heuristic for the circle packing problem with a variety of containers // European Journal of Operational Research. 2011. **214**, N 3. 512–525.
17. López C.O., Beasley J.E. Packing unequal circles using formulation space search // Computers and Operations Research. 2013. **40**, N 5. 1276–1288.
18. Pedroso J.P., Cunha S., Tavares J.N. Recursive circle packing problems // International Transactions in Operational Research. 2014. **23**, N 1–2. 355–368.
19. Andrade R., Birgin E.G. Symmetry-breaking constraints for packing identical rectangles within polyhedra // Optimization Letters. 2013. **7**, N 2. 375–405.
20. Галмиев Ш.И., Лисафича М.С. Численные методы оптимизации упаковок равных ортогонально ориентированных эллипсов в прямоугольную область // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. **53**, № 11. 1923–1938.
21. Coxeter H.S.M. Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica. 1954. **5**, N 3. 263–274.
22. Böröczky K. Packing of spheres in spaces of constant curvature // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica. 1978. **32**, N 3. 243–261.
23. Szirmai J. The optimal ball and horoball packings of the Coxeter tilings in the hyperbolic 3-space // Beitr. Algebra Geom. 2005. **46**, N 2. 545–558.
24. Szirmai J. The optimal ball and horoball packings to the Coxeter honeycombs in the hyperbolic d-space // Beitr. Algebra Geom. 2007. **48**, N 1. 35–47.
25. Szirmai J. A candidate for the densest packing with equal balls in Thurston geometries // Beitr. Algebra Geom. 2014. **55**, N 2. 441–452.
26. Казаков А.Л., Журавская М.А., Лемперт А.А. Вопросы сегментации логистических платформ в условиях становления региональной логистики // Транспорт Урала. 2010. № 4. 17–20.
27. Лемперт А.А., Казаков А.Л., Бухаров Д.С. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов // Управление большими системами. 2013. № 41. 270–284.
28. Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. 87–100.
29. Казаков А.Л., Лемперт А.А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. 50–57.
30. Kazakov A.L., Lempert A.A. On mathematical models for optimization problem of logistics infrastructure // International Journal of Artificial Intelligence. 2015. **13**, № 1. 200–210.
31. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.
32. Specht E. Packomania. <http://www.packomania.com>.
33. Москаленский Е.Д. О нахождении точных решений двумерного уравнения эйконала для случая, когда фронт волны, распространяющейся в среде, является окружностью // Сиб. ж. вычислит. математики. 2014. **17**, № 4. 363–372.

Поступила в редакцию
29.04.2016

An Algorithm of Packing Congruent Circles in a Multiply Connected Set with Non-Euclidean Metrics

A. L. Kazakov¹, A. A. Lempert², and H. L. Nguyen³

¹ *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Lermontova 134, Irkutsk, 664033, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: kazakov@icc.ru*

² *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Lermontova 134, Irkutsk, 664033, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: lempert@icc.ru*

³ *Irkutsk National Research Technical University, Faculty of Cybernetics; ulitsa Lermontova 83, Irkutsk, 664074, Russia; Graduate Student, e-mail: nguyenhuyliem225@gmail.com*

Received April 29, 2016

Abstract: The problem of optimal packing of congruent circles in a bounded set (a container) in a two-dimensional metric space is considered. It is required to find an arrangement of circles in the container such that these circles occupy the largest area of the container as possible. In the case when the space is Euclidean, this problem is well known, but the case of non-Euclidean metrics is studied much worse. However, there are some applied problems leading us to the use of special non-Euclidean metrics. For example, such a situation appears in the infrastructure logistics. Here we consider the optimal packing problem in the case when the container is simply or multiply connected. A special algorithm based on the optical-geometric approach is proposed and implemented. The results of numerical experiments are discussed.

Keywords: optimal packing of circles, optical-geometric approach, non-Euclidean space, multiply-connected domain, numerical method, computational experiment.

References

1. A. L. Kazakov and P. D. Lebedev, "Algorithms of Optimal Packing Construction for Planar Compact Sets," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 307–317 (2015).
2. D. S. Bukharov and A. L. Kazakov, "VIGOLT System for Solving Transport Logistics Optimization Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 65–74 (2012).
3. J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups* (Springer, New York, 1988; Mir, Moscow, 1990).
4. H. Kellerer, U. Pferschy, and D. Pisinger, *Knapsack Problems* (Springer, Berlin, 2004).
5. V. I. Levenshtein, "Boundaries for Packings in n -Dimensional Euclidean Space," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **245** (6), 1299–1303 (1979).
6. M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982).
7. L. G. Casado, I. Garcia, P. G. Szabó, and T. Csentes, "Packing Equal Circles in a Square II. — New Results for up to 100 Circles Using the TAMSASS-PECS Algorithm," in *Optimization Theory* (Kluwer, Dordrecht, 2001), pp. 207–224.
8. M. C. Markót and T. Csentes, "A New Verified Optimization Technique for the 'Packing Circles in a Unit Square' Problems," *SIAM J. Optim.* **16** (1), 193–219 (2005).
9. P. G. Szabó and E. Specht, "Packing up to 200 Equal Circles in a Square," in *Models and Algorithms for Global Optimization* (Springer, New York, 2007), pp. 141–156.
10. M. Goldberg, "Packing of 14, 16, 17 and 20 Circles in a Circle," *Math. Mag.* **44** (3), 134–139 (1971).
11. R. L. Graham, B. D. Lubachevsky, K. J. Nurmela, and P. R. J. Östergard, "Dense Packings of Congruent Circles in a Circle," *Discrete Math.* **181** (1–3), 139–154 (1998).
12. B. D. Lubachevsky and R. L. Graham, "Curved Hexagonal Packings of Equal Disks in a Circle," *Discrete Comput. Geom.* **18** (2), 179–194 (1997).
13. E. G. Birgin and J. M. Gentil, "New and Improved Results for Packing Identical Unitary Radius Circles within Triangles, Rectangles and Strips," *Comput. Oper. Res.* **37** (7), 1318–1327 (2010).
14. I. Litvinchev and E. L. Ozuna, "Integer Programming Formulations for Approximate Packing Circles in a Rectangular Container," *Math. Probl. Eng.* **2014** (2014). doi 10.1155/2014/317697
15. I. Litvinchev and E. L. Ozuna, "Packing Circles in a Rectangular Container," in *Proc. Int. Congr. on Logistics and Supply Chain, Queretaro, Mexico, October 24–25, 2013* (Mexican Inst. of Transportation, Queretaro, 2013), pp. 24–25.
16. C. O. López and J. E. Beasley, "A Heuristic for the Circle Packing Problem with a Variety of Containers," *Eur. J. Oper. Res.* **214** (3), 512–525 (2011).

17. C. O. López and J. E. Beasley, "Packing Unequal Circles Using Formulation Space Search," *Comput. Oper. Res.* **40** (5), 1276–1288 (2013).
18. J. P. Pedroso, S. Cunha, and J. N. Tavares, "Recursive Circle Packing Problems," *Int. Trans. Oper. Res.* **23** (1–2), 355–368 (2014).
19. R. Andrade and E. G. Birgin, "Symmetry-Breaking Constraints for Packing Identical Rectangles within Polyhedra," *Optim. Lett.* **7** (2), 375–405 (2013).
20. Sh. I. Galiev and M. S. Lisafina, "Numerical Optimization Methods for Packing Equal Orthogonally Oriented Ellipses in a Rectangular Domain," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (11), 1923–1938 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (11), 1748–1762 (2013)].
21. H. S. M. Coxeter, "Arrangements of Equal Spheres in Non-Euclidean Spaces," *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (3), 263–274 (1954).
22. K. Böröczky, "Packing of Spheres in Spaces of Constant Curvature," *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **32** (3), 243–261 (1978).
23. J. Szirmai, "The Optimal Ball and Horoball Packings of the Coxeter Tilings in the Hyperbolic 3-Space," *Beitr. Algebra Geom.* **46** (2), 545–558 (2005).
24. J. Szirmai, "The Optimal Ball and Horoball Packings to the Coxeter Honeycombs in the Hyperbolic d-Space," *Beitr. Algebra Geom.* **48** (1), 35–47 (2007).
25. J. Szirmai, "A Candidate for the Densest Packing with Equal Balls in Thurston Geometries," *Beitr. Algebra Geom.* **55** (2), 441–452 (2014).
26. A. L. Kazakov, M. A. Zhuravskaya, and A. A. Lempert, "The Problems of Logistic Platforms Segmentation in the Conditions of Regional Logistics Development," *Transport Urala*, No. 4, 17–20 (2010).
27. A. A. Lempert, A. L. Kazakov, and D. S. Bukharov, "Mathematical Model and Program System for Solving a Problem of Logistic Objects Placement," *Upravlenie Bol'shimi Sistemami*, No. 41, 270–284 (2013).
28. A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and D. S. Bukharov, "On Segmenting Logistical Zones for Servicing Continuously Developed Consumers," *Avtom. Telemekh.*, No. 6, 87–100 (2013) [*Autom. Rem. Contr.* **74** (6), 968–977 (2013)].
29. A. L. Kazakov and A. A. Lempert, "An Approach to Optimization in Transport Logistics," *Avtom. Telemekh.*, No. 7, 50–57 (2011) [*Autom. Rem. Contr.* **72** (7), 1398–1404 (2011)].
30. A. L. Kazakov and A. A. Lempert, "On Mathematical Models for Optimization Problem of Logistics Infrastructure," *Int. J. Artif. Intell.* **13** (1), 200–210 (2015).
31. F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction* (Springer, New York, 1985; Mir, Moscow, 1989).
32. E. Specht, "Packomania," <http://www.packomania.com>. Cited May 14, 2016.
33. E. D. Moskalensky, "On Finding Exact Solutions of the Two-Dimensional Eikonal Equation when the Front of the Wave Propagating in a Medium is a Circle," *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **17** (4), 363–372 (2014) [*Numer. Anal. Appl.* **7** (4), 304–313 (2014)].