

УДК 533.6:628.5

doi 10.26089/NumMet.v17r217

О МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОТРЫВА ПОТОКА НА ВХОДЕ В КРУГЛЫЙ ТОНКОСТЕННЫЙ ПАТРУБОК

К. И. Логачев¹, О. А. Аверкова², А. К. Логачев³, Е. И. Толмачева⁴, А. С. Горлов⁵

Разработан метод математического моделирования, вычислительный алгоритм и программа для расчета отрывного течения на входе в круглый всасывающий патрубок с тонкими стенками при наличии как высокоскоростного, так и низкоскоростного набегающего потока. Для построения дискретной модели используются стационарные дискретные вихревые кольца. Адекватность разработанного метода подтверждается удовлетворительным качественным и количественным согласованием с результатами расчетов других авторов.

Ключевые слова: метод дискретных вихрей, отрывные течения, течения в спектре действия всасывающих каналов, местная вытяжная вентиляция.

Введение. Моделирование отрывных течений на входе во всасывающие каналы необходимо для определения области эффективного всасывания, коэффициента сжатия струи и поля скоростей в спектре их действия. Наиболее простым и хорошо изученным является отрывное течение на входе в круглый всасывающий тонкостенный патрубок, который является элементом многих технологических устройств; моделированию течений в спектре его действия посвящено множество научных трудов. Для численного моделирования таких течений использовались метод граничных элементов [1], численное решение уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости [1, 2], метод дискретных вихрей [3–7]. В работе [6] разработан метод математического моделирования отрыва потока на входе во всасывающие каналы с использованием стационарных дискретных вихрей. На свободной поверхности тока задавалась циркуляция свободных вихрей, после чего приближенно определялась средняя скорость во всасывающем патрубке и поле скоростей. Набегающий поток можно учитывать только в случае, если его скорость меньше скорости всасывания в патрубке. Представляет интерес модернизация этого метода, что позволит рассчитывать характеристики отрывного течения как для низкоскоростного, так и высокоскоростного набегающего потока. Очевидно, это можно сделать, если задавать скорость всасывания в патрубке, а циркуляцию на свободной вихревой пелене определять в процессе численного решения задачи.

Целью настоящей работы является развитие метода математического моделирования отрывного течения на входе в тонкостенный всасывающий патрубок при наличии набегающего потока с использованием стационарных дискретных вихрей и его верификация.

1. Основные расчетные соотношения и построение вычислительного алгоритма. Дискретная математическая модель (рис. 1) строится следующим образом. По границе течения размещены присоединенные бесконечно тонкие вихревые кольца (черные кружочки на рис. 1) и контрольные точки (крестики на рис. 1) — произвольные точки на окружности, охватывающей патрубок, либо лежащие во всасывающем сечении. Заметим, что во всасывающем сечении на оси симметрии размещен вихрь нулевого радиуса, поэтому он не учитывается. Число дискретных вихревых колец равно числу контрольных точек. В контрольных точках, лежащих на стенках патрубка, выполняется условие непроницаемости — скорость вдоль направления нормали равна нулю. Во всасывающем сечении скорость в направлении внешней нормали одинакова и равна v_0 . Разбиение на дискретные вихревые кольца и контрольные точки равномерно, контрольные точки находятся по центру между вихревыми кольцами. Расстояние между двумя соседними вихревыми кольцами равно шагу дискретности r_h . Свободная поверхность тока состоит из свободных

¹ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; профессор, e-mail: kilogachev@mail.ru

² Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; профессор, e-mail: olga_19572004@mail.ru

³ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; аспирант, e-mail: artlogachev@mail.ru

⁴ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; аспирант, e-mail: lenka_110290@mail.ru

⁵ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; зав. кафедрой, e-mail: belgoras@mail.ru

вихревых колец (полые кружочки на рис. 1) и образуется на острой кромке A патрубка. Она определяется итерационным путем, описанным далее. Параллельно оси патрубка набегают поток со скоростью v_∞ .

Пусть N — количество присоединенных вихревых колец; N_s — количество свободных вихревых колец; x^p — контрольная точка, $p = 1, 2, \dots, N$.

Скорость в произвольной точке x вдоль направления \mathbf{n} вычисляется с помощью формулы

$$v_n(x) = \sum_{q=1}^N \Gamma(\xi^q) G(x, \xi^q) + \gamma \sum_{q=1}^N G(x, \zeta^q) + n_1 v_\infty, \quad (1)$$

где ξ^q — точка расположения q -го присоединенного вихревого кольца с циркуляцией $\Gamma(\xi^q)$, $\gamma = \text{const}$ — циркуляция свободного вихревого кольца, ζ^q — точка расположения q -го свободного вихревого кольца.

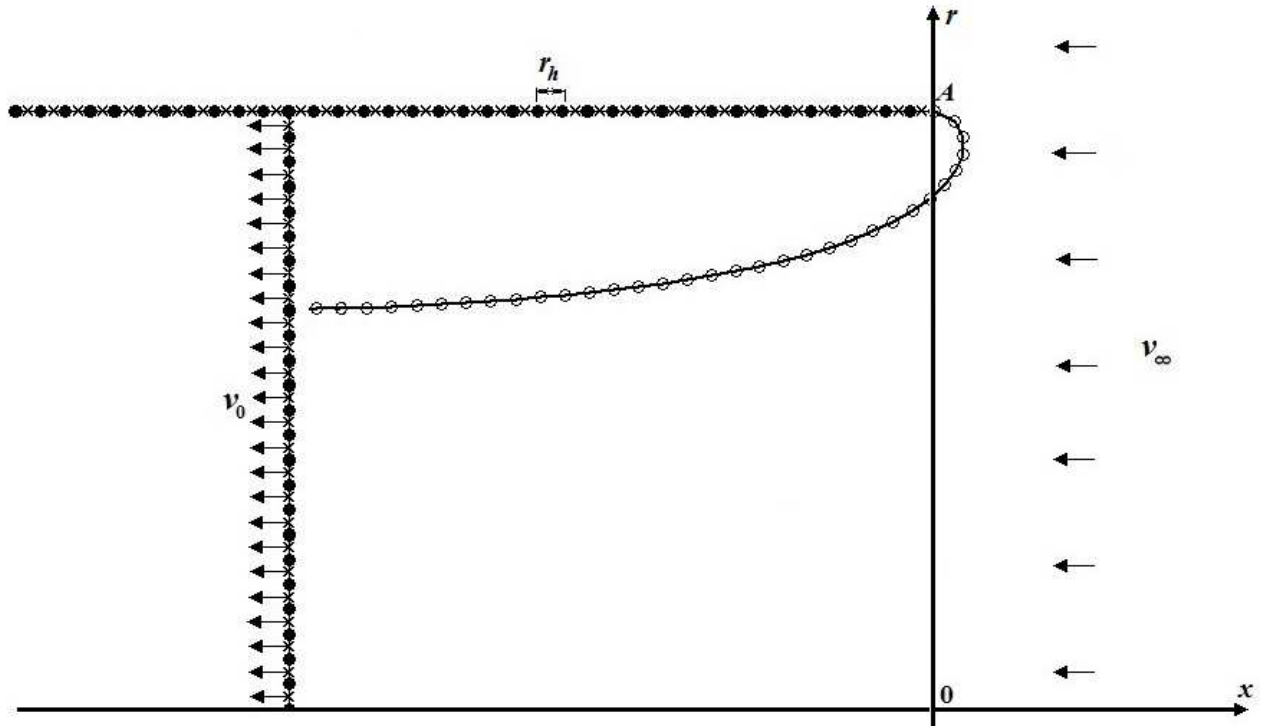


Рис. 1. Дискретная математическая модель отрывного течения на входе в круглый всасывающий канал (патрубок) в меридиональной плоскости

Функция $G(x, \xi)$ выражает собой влияние на точку $x(x_1, x_2)$ вихревого кольца с единичной циркуляцией, расположенного в точке $\xi(\xi_1, \xi_2)$:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{4(A_1 b + A_2 a)E(t)}{b(a-b)\sqrt{a+b}} - \frac{4A_2 F(t)}{b\sqrt{a+b}} & \text{при } b \neq 0, \\ \frac{\xi_2^2 n_1}{2a\sqrt{a}} & \text{при } b = 0, \end{cases}$$

$$2x_2 \xi_2 = b > 0, \quad a = (x_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2 + x_2^2 > 0, \quad A_1 = \frac{\xi_2^2 n_1}{4\pi}, \quad A_2 = \frac{\xi_2}{4\pi} [(x_1 - \xi_1)n_2 - x_2 n_1],$$

$$F(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-t^2 \sin^2 \theta}}, \quad t = \frac{2b}{a+b}, \quad E(t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-t^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^4 c_i (1-t)^i + \sum_{i=0}^4 d_i (1-t)^i \ln \frac{1}{1-t}, \quad E(t) = 1 + \sum_{i=1}^4 c_i (1-t)^i + \sum_{i=1}^4 d_i (1-t)^i \ln \frac{1}{1-t}.$$

Значения c_i и d_i взяты из таблиц [8].

Если расстояние от точки x до точки ξ меньше шага дискретности r_h , то данная функция вычисляется по формуле $G(x, \xi) = \frac{(x_1 - \xi_1)n_2 - (x_2 - \xi_2)n_1}{2\pi r_h^2}$. В случае $x = \xi$ функция $G(x, \xi) = 0$.

Вычислительный алгоритм строится следующим образом. После задания точек расположения присоединенных вихрей и контрольных точек формируется двумерный массив $G^{pq} = G(x^p, \xi^q)$, $p = 1, 2, \dots, N$, $q = 1, 2, \dots, N$. Запоминаются коэффициенты при первой неизвестной циркуляции вихря, лежащей на острой кромке A : $G(x^p, \xi^1) = P(x^p)$, $p = \overline{1, N}$. Нумерация вихрей ведется именно с этой точки. Далее начинается итерационная процедура.

1. Формируется одномерный массив свободных членов: $v^p = -n_1 v_\infty + v_n(x_0^p)$, $p = 1, 2, \dots, N$, где $v_n(x_0^p)$ — скорость вдоль направления внешней нормали в граничной контрольной точке x_0^p .
2. Изменяются коэффициенты: $G(x^p, \xi^1) = P(x^p) + \sum_{k=1}^{N_s} G(x^p, \xi^k)$, $p = \overline{1, N}$. На первой итерации $N_s = 0$ и коэффициенты $G(x^p, \xi^1)$ не изменяются.
3. Решается относительно неизвестных $\Gamma(\xi^q)$ система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^N \Gamma(\xi^q) G(x^p, \xi^q) = v^p, \quad p = 1, 2, \dots, N.$$

Запоминается циркуляция вихревого кольца, лежащего на острой кромке: $\gamma = \Gamma^1$.

4. Строится свободная поверхность тока, начиная с острой кромки A .

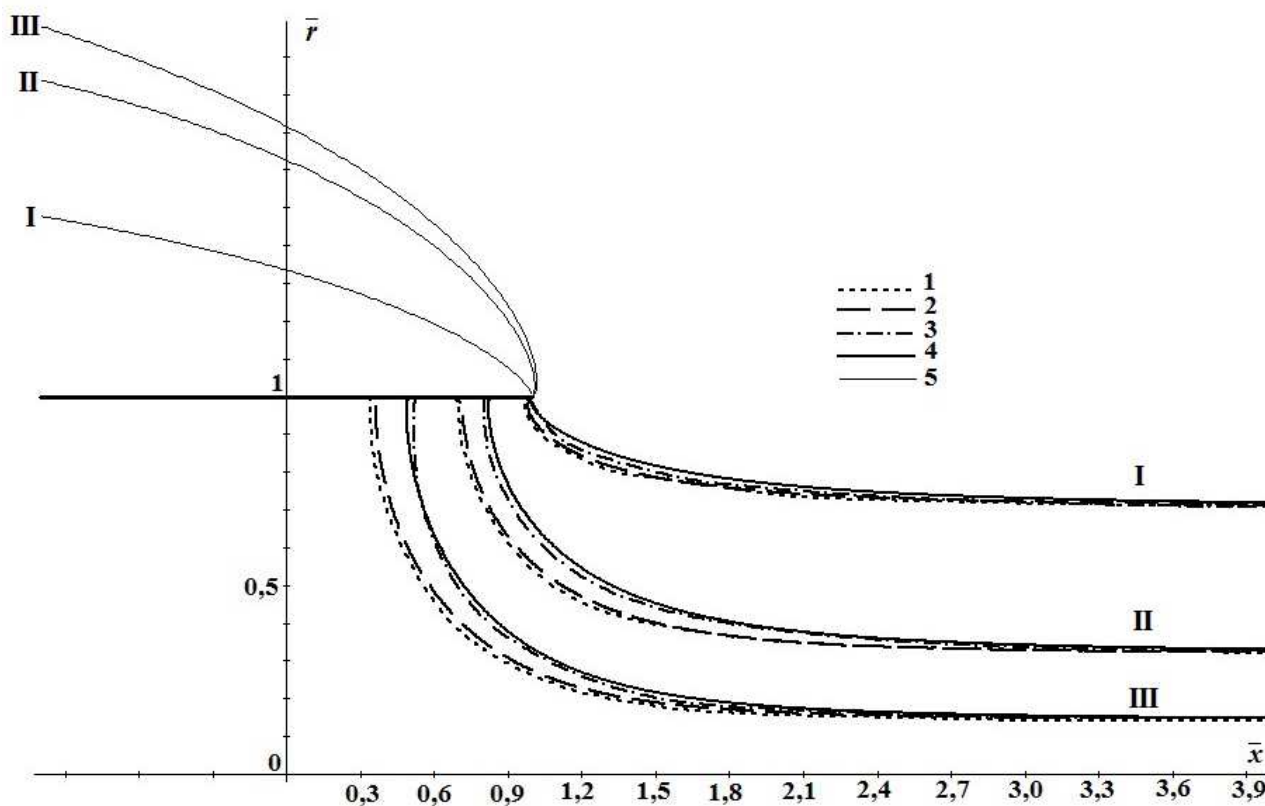


Рис. 2. Критические и свободные линии тока на входе в круглый всасывающий канал с тонкими стенками

С помощью формулы (1) при $n = \{1, 0\}$ вычисляется составляющая скорости v_x , при $n = \{0, 1\}$ — составляющая скорости v_r . Последующая точка (x', r') определяется из предыдущей точки (x, r) с использованием формул $x' = x + \Delta t \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_r^2}}$, $r' = r + \Delta t \frac{v_r}{\sqrt{v_x^2 + v_r^2}}$, где Δt — шаг, который выбирается

достаточно малым. Свободная поверхность тока будет состоять из свободных вихревых колец, удаленных друг от друга на расстояние шага дискретности r_h . Иными словами, в процессе вычислений на каждом этапе проверяется расстояние до предыдущего свободного вихревого кольца. Как только в некоторой точке это расстояние становится равным с точностью до малой погрешности шагу дискретности, то в эту точку помещается следующее вихревое кольцо. Построение продолжается до вытяжного сечения. Затем итерационная процедура начинается с шага 1 итерационной процедуры и продолжается, пока абсолютная величина разности между старым значением циркуляции γ на свободной поверхности тока и новым значением больше заданной точности ε .

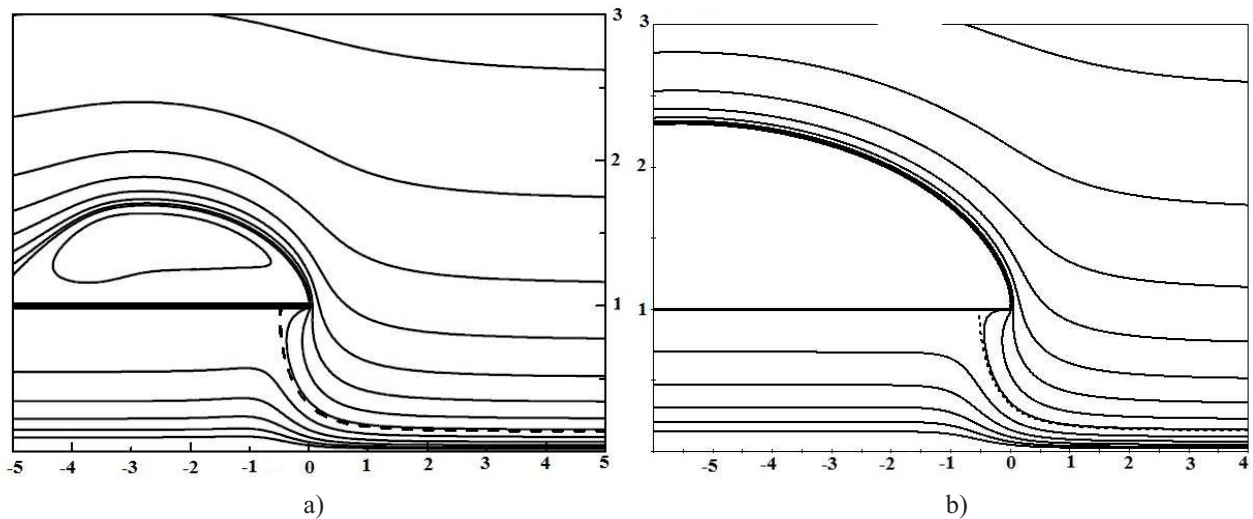


Рис. 3. Линии тока при $\bar{v} = 50$: а) расчеты в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости [1], б) расчеты по разработанной вычислительной процедуре

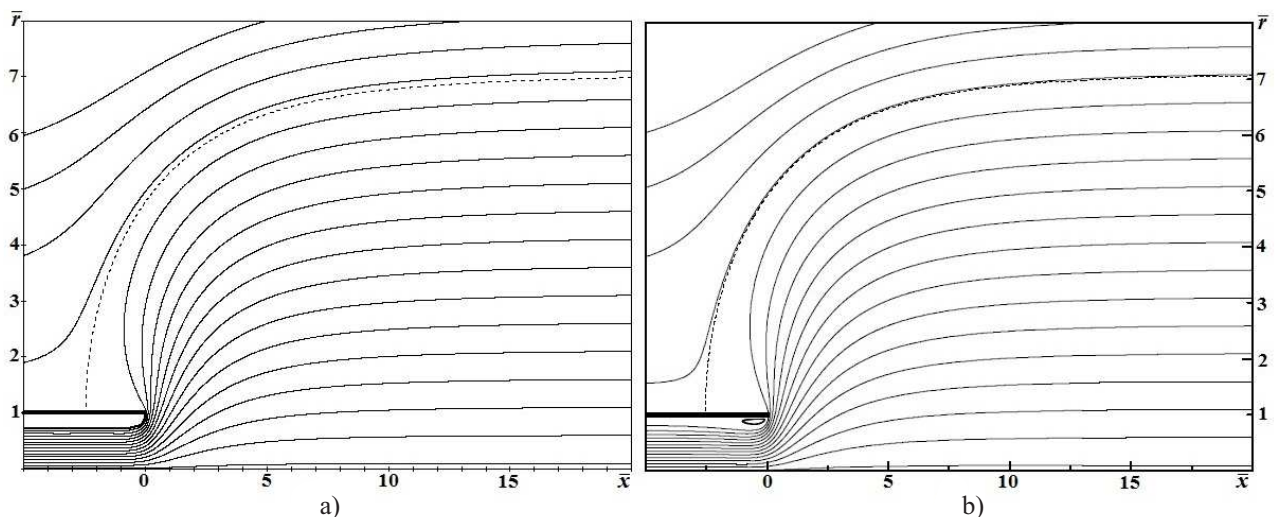


Рис. 4. Линии тока при $\bar{v} = 0,02$: а) расчеты по разработанному методу; б) расчеты в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости [1]

2. Верификация метода математического моделирования. Расчеты были произведены при $\varepsilon = 10^{-8}$, $r_h = 0,000625$ м, радиус патрубка $R = 0,1$ м, скорость всасывания $v_0 = 1$ м/с; удаление вытяжного сечения от входа в патрубок $6R$; длина стенки патрубка $11R$, шаг построения линии тока 5×10^{-7} м. Результаты расчета представлены в безразмерном виде. Масштаб длины — R , масштаб скорости — v_0 .

Результаты построения критической линии тока при скорости v_∞ набегающего потока, превосходящей скорость всасывания v_0 , представлены на рис. 2. Здесь введены следующие обозначения:

I — расчеты при $\bar{v} = \frac{v_\infty}{v_0}$; II — при $\bar{v} = 10$; III — при $\bar{v} = 50$;

линия 1 — расчет Гильфанова А.К., Зарипова Ш.Х. [1] в рамках потенциальной модели методом

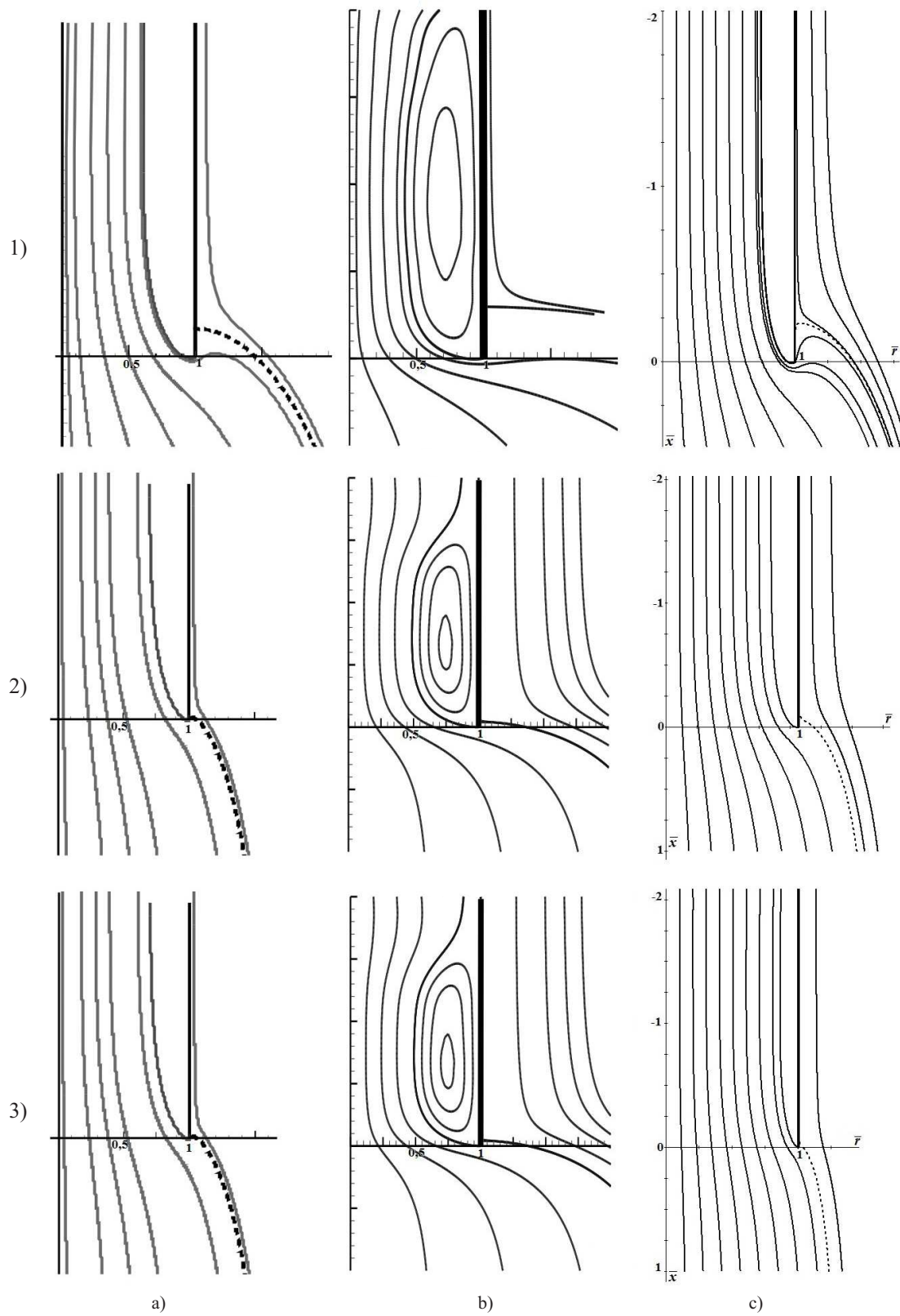


Рис. 5. Сравнение линий тока, построенных а) для щелевого всасывающего канала методом конформных отображение [9]; б) для щелевого всасывающего канала в рамках модели вязкой жидкости [9]; в) для круглого патрубку по разработанному методу; 1) $\bar{v}_\infty = 0,2$; 2) $\bar{v}_\infty = 0,4$; 3) $\bar{v}_\infty = 0,6$

граничных элементов;

линия 2 — расчет методом дискретных вихрей без учета отрыва потока по разработанным в данной работе алгоритмам;

линия 3 — расчет в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости (численное решение уравнений Навье–Стокса) [1];

линия 4 — расчет по разработанному методу;

линия 5 — свободные поверхности тока, построенные по разработанным алгоритмам.

Сравнение полученных численных данных показывает, что расчеты критической линии тока адекватны, причем произведенные в рамках данной работы расчеты близки к расчетам с учетом вязкости.

Сравнение расчетных картин течения при $\bar{v} = 50$ представлены на рис. 3. Пунктирной линией изображена критическая линия тока. Линии тока имеют идентичный характер за исключением отрывной области. В рамках модели вязкой несжимаемой среды размеры отрывной области течения меньше.

Расчеты при $\bar{v} = 0,02$ тоже практически совпадают (рис. 4). Небольшое отклонение видно для границы отрывной области. В рамках модели вязкой несжимаемой жидкости она сужается при удалении во всасывающем канале в отличие от произведенных в рамках данной работы расчетов.

Рис. 5 демонстрирует картины течения на входе в щелевидный и круглый всасывающие каналы, построенные в рамках модели потенциальных течений с использованием метода конформных отображений [9], вязкой несжимаемой жидкости с использованием численного решения уравнений Навье–Стокса [9] и модели, представленной в этой статье. Расчеты выполнялись при разных скоростях набегающего потока, но не превосходящих скорости всасывания. Пунктиром изображена критическая линия тока.

При всей схожести картин течения отметим, что на входе в щелевидный всасывающий канал отрывная область, построенная методом конформных отображений, уже чем отрывная область, построенная по разработанной вычислительной процедуре. В рамках модели вязкой несжимаемой жидкости расчетная ширина отрывной области значительно шире, но имеет конечную длину в сравнении с расчетами, полученных в рамках других моделей.

В задачах аспирации представляет интерес изучение динамики пылевых частиц в спектре действия круглого тонкостенного канала. Кроме того, важно определить предельные траектории пылевых частиц и коэффициент аспирации, представляющий собой отношение средней концентрации частиц, улавливаемых вытяжным устройством, к концентрации частиц в набегающем потоке.

Поэтому в настоящей работе были построены предельные траектории пылевых частиц с использованием следующей системы дифференциальных уравнений их движения:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{u_x - v_x}{\tau}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dv_r}{dt} = \frac{u_r - v_r}{\tau}, \quad \frac{dr}{dt} = v_r.$$

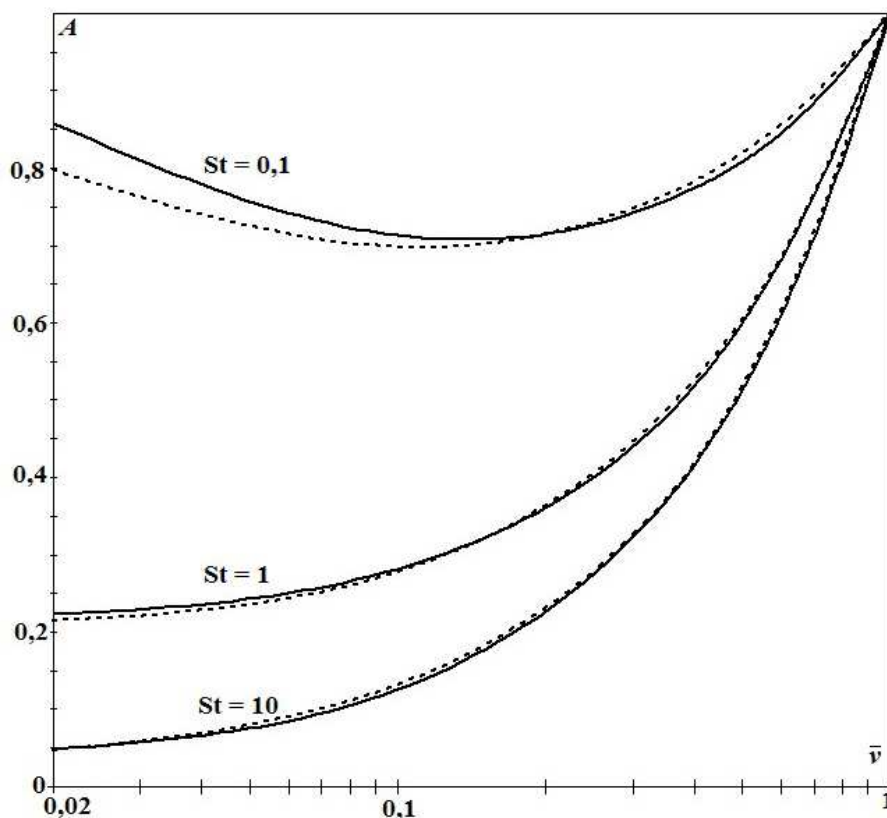


Рис. 6. Зависимость коэффициента аспирации A от безразмерной скорости набегающего потока

Здесь $\tau = \frac{2RSt}{v_\infty}$ — время релаксации; St — число Стокса; u_x, u_r — компоненты скорости среды; v_x, v_r — компоненты скорости частиц, t — время.

Определение предельной траектории осуществлялось с использованием метода половинного деления. Задавалось число Стокса и начальное положение пылевой частицы; затем определялось время релаксации. Начальные скорости полагались равными скорости набегающего потока. В переменную U_l помещалась ордината частицы, улавливаемой патрубком, а в переменную U_p — осаждающейся. В начальном приближении полагалось $U_l = R$ и $U_p = 40R$. Переменная $S_r = \frac{1}{2}(U_p + U_l)$. Далее организовывался цикл, который выполнялся до тех пор, пока истинно условие $|U_p - U_l| > 0,00000001$. Во вложенном цикле строились траектории частиц. При выходе из внутреннего цикла проверялось попадание частицы в патрубок. Если да, то переменная $U_l = S_r$, в противном случае $U_p = S_r$; координаты вылета частицы получали значение $(100R, Sr)$.

Коэффициент аспирации определялся из формулы $A = \left(\frac{R_c}{R}\right)^2 \bar{v}$, где R_c — начальное расстояние до оси симметрии найденной предельной траектории пылевой частицы. Удаление от входа во всасывающий канал при этом равнялось $100R$. Сравнение изменения величины коэффициента аспирации от безразмерной величины скорости набегающего потока и разных числах Стокса представлены на рис. 6, где наблюдается хорошее согласование расчетов с использованием разработанной вычислительной процедуры и расчетов, проведенных в [1], в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. Максимальное различие наблюдается при $St = 0,1$ и $\bar{v} = 0,02$, но и оно не превышает 7%.

3. Выводы. Разработанный метод математического моделирования отрывного течения на входе во всасывающий патрубок при наличии набегающего потока позволяет строить адекватное поле скоростей воздушного потока и предельные траектории пылевых частиц, а также определять коэффициент аспирации.

Исследования выполнены при финансовой поддержке гранта РФФИ (код проекта 16–08–00074).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гильфанов А.К., Зарипов Ш.Х. Математические модели аспирации аэрозолей в тонкостенные пробоотборники. Казань: Казанский ун-т, 2012.
2. Гильфанов А.К., Зарипов Ш.Х., Маклаков Д.В. Расчет концентраций частиц в задаче аспирации аэрозоля в тонкостенную трубку // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 6. 89–99.
3. Логачев К.И., Посохин В.Н. Расчет течения вблизи круглого всасывающего патрубка // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2004. № 1. 29–32.
4. Ходаков И.В. Численное и экспериментальное исследование отрыва потока на входе во всасывающие каналы с механическими экранами // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2016. № 3. 6–12.
5. Ходаков И.В. Моделирование отрывного течения на входе в многоугольное всасывающее отверстие // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2016. № 2. 11–15.
6. Аверкова О.А., Логачев И.Н., Логачев К.И. Моделирование отрыва потока на входе во всасывающие каналы в областях с разрезами // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. 13. 298–306.
7. Аверкова О.А., Логачев И.Н., Логачев К.И., Логачев А.К. Закономерности отрывного течения при входе в выступающий канал с экранами // Ученые записки ЦАГИ. 2013. 44, № 2. 33–49.
8. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
9. Варсегова Е.В., Посохин В.Н. О форме отрывных зон на входе в щелевой всасывающий патрубок // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2015. № 3. 98–102.

Поступила в редакцию
18.04.2016

A Method of Numerical Simulation of Flow Separation at the Inlet of
a Circular Thin-Walled Pipe

K. I. Logachev¹, O. A. Averkova², A. K. Logachev³, E. I. Tolmacheva⁴, and A. S. Gorlov⁵

¹ Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia;
Dr. Sci., Professor, e-mail: kilogachev@mail.ru

² Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: olga_19572004@mail.ru

³ Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia; Graduate Student, e-mail: e-mail: artlogachev@mail.ru

⁴ Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia; Graduate Student, e-mail: e-mail: lenka_110290@mail.ru

⁵ Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Department, e-mail: belgoras@mail.ru

Received April 18, 2016

Abstract: A mathematical simulation method, a computational algorithm and a software program are developed to calculate a separated flow at the inlet of a circular thin-walled pipe in the case of a high-speed or low-speed incident flow. In order to construct a discrete model, the stationary discrete vortex rings are used. The adequacy of the proposed method is confirmed by the satisfactory qualitative and quantitative agreement with the numerical results obtained by other authors.

Keywords: discrete vortex method, separated flows, flows in suction channels, local exhaust ventilation.

References

1. A. K. Gil'fanov and Sh. Kh. Zaripov, *Mathematical Models of Aerosols Aspiration to Thin-Walled Samplers* (Kazan Univ., Kazan, 2012) [in Russian].
2. A. K. Gil'fanov, Sh. Kh. Zaripov, and D. V. Maklakov, "Calculation of Particle Concentration in the Problem of Aerosol Aspiration into a Thin-Walled Tube," *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza*, No. 6, 89–99 (2009) [*Fluid Dyn.* **44** (6), 873–881 (2009)].
3. K. I. Logachev and V. N. Posokhin, "Calculation of a Flow in the Vicinity of a Round Suction Pipe," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Aviats. Tekh.*, No. 1, 29–32 (2004).
4. I. V. Khodakov, "Numerical and Experimental Research of Detached Flow at the Inlet in the Suction Duct with Mechanical Screens," *Vestn. Belgorod Gos. Tekh. Univ.*, No. 3, 6–12 (2016).
5. I. V. Khodakov, "Modeling of Detached Flow at the Entry Polygonal Suction Hole," *Vestn. Belgorod Gos. Tekh. Univ.*, No. 2, 11–15 (2016).
6. O. A. Averkova, I. N. Logachev, and K. I. Logachev, "Modeling of Flow Separation at the Inlet of a Suction Channel in Regions with Cuts," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 298–306 (2012).
7. O. A. Averkova, I. N. Logachev, K. I. Logachev, and A. K. Logachev, "The Principles of Separated Flow at the Inlet of the Protruding Duct with Screens," *Uchen. Zap. TsAGI* **44** (2), 33–49 (2013) [*TsAGI Sci. J.* **44** (2), 219–243 (2013)].
8. M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972; Nauka, Moscow, 1979).
9. E. V. Varsegova and V. N. Posokhin, "A Form of Separated Flow on an Entrance to Suction Slot-Hole Branch Pipe," *Izv. Kazan Univ. of Architecture and Engineering*, No. 3, 98–102 (2015).