

УДК 532.529

doi 10.26089/NumMet.v17r323

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТЕЧЕНИЙ С СИЛЬНЫМИ И СЛАБЫМИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМИ РАЗРЫВАМИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

П. В. Булат¹, К. Н. Волков², М. С. Яковчук³

Рассматриваются методы визуализации течений с газодинамическими разрывами, позволяющие проводить сравнение результатов численного моделирования с данными физического эксперимента. Дается обзор методов оптической визуализации течений сжимаемого газа (теневые картины, шпирен-изображения, интерферограммы). Приводятся примеры визуального представления решений ряда задач газовой динамики, связанных с расчетами течений, содержащих слабые и сильные газодинамические разрывы. Для повышения наглядности результирующего образа применяются топологические методы визуализации, позволяющие определить положение критических точек, линий отрыва и присоединения потока.

Ключевые слова: научная визуализация, вычислительная газовая динамика, визуализация течений, ударная волна, шпирен, теневая картина, интерферограмма.

1. Введение. Прогресс в численном решении нестационарных трехмерных уравнений Эйлера и Навье–Стокса, а также возможности обработки и визуализации больших массивов данных открывают широкие перспективы для развития вычислительной газовой динамики (Computational Fluid Dynamics, CFD). Модуль визуализации газодинамических результатов расчетов становится важной и неотъемлемой частью современного вычислительного комплекса [1]. При визуальной обработке полей газодинамических течений используется широкий набор графических средств (изолинии и изоповерхности скалярного поля, трехмерные объемные изображения, зрительная имитация движения пленки по несущей поверхности, траектории меченых частиц). Сложное пространственное поведение рассчитанных полей вызывает необходимость их представления путем использования двумерных разрезов и сочетания различных подходов к визуализации характеристик течения [1].

Для расчетов течений, содержащих слабые и сильные газодинамические разрывы, широко используются методы сквозного счета [2]. Использование результатов, полученных при помощи методов сквозного счета, требует выделения координат газодинамических разрывов, в связи с чем возникает задача, состоящая в локализации и классификации разрывов на основе данных численного моделирования [3, 4].

Наиболее простой подход к визуализации течений газа с переменной плотностью состоит в построении изоповерхностей (линии равной плотности, *isopycnics*), которые сравниваются с экспериментальными картинками течения, полученными оптическими методами.

Для визуализации сверхзвуковых течений широкое применение находит построение теневых картинок (*shadowgraph*), шпирен-изображений (*schlieren image*) и численных интерферограмм (*interferogram*), напоминающих те, что регистрируются теневыми и интерференционными методами оптической визуализации потоков. В теневых методах определяется угол отклонения света в исследуемой среде, а интерференционные методы опираются на измерение разности фаз или разности длин оптических путей двух лучей. Для численного шпирена изменение освещенности пропорционально градиенту плотности газа в исследуемой области в направлении, перпендикулярном к кромке ножа, а не степени изменения градиента плотности, как в теневом методе.

Интерференционный, шпирен и теневой методы дают сведения о разных величинах: показателе преломления, его первой и второй производных соответственно. По сравнению с теневыми методами, интерференционные методы дают более подробную информацию об исследуемой модели (фазовый объект) и

¹ Санкт-Петербургский университет точной механики и оптики, международная лаборатория “Прикладная гидрогазодинамика”, Кронверкский просп., д. 49, 197101, Санкт-Петербург; зав. лабораторией, e-mail: ravelbulat@mail.ru

² Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; вед. науч. сотр., e-mail: dsci@mail.ru

³ Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: mihailjakovchuk@gmail.com

являются более точными, позволяя непосредственно измерить абсолютные значения изменения показателя преломления.

Подходы к визуализации газодинамических разрывов в нестационарном поле течения, а также выбор переменных для визуализации рассматриваются в работе [5]. Для визуализации ударных волн и контактных разрывов обычно используется модуль градиента плотности или лапласиан плотности. Для визуализации ударных волн применяется величина градиента давления и лапласиан давления (давление и нормальная компонента скорости остаются непрерывными на контактном разрыве), а также дивергенция скорости, которая является всегда отрицательной на фронте ударной волны (сжатие газа). Для идентификации ударных волн и контактных разрывов используется градиент энтропии и лапласиан энтропии. На фронте ударной волны скачок энтропии имеет порядок $\Delta s = O(M - 1)^3$, где M — число Маха. Поскольку энтропия терпит разрыв не только на фронте ударной волны, но и на контактном разрыве, такой подход используется для визуализации сильных ударных волн и контактных разрывов (слабые ударные волны таким методом не определяются).

Другой подход к выделению сильных газодинамических разрывов, основанный на применении методов цифровой обработки изображений, развивается в работах [3, 6–8]. Газодинамические функции рассматриваются как интенсивность изображения, а значения функций в каждой точке — как элементы изображения (пиксели). Применяется детектор перепадов яркости на изображении, а также проводится классификация разрывов при помощи дискретных аналогов газодинамических соотношений, выполняемых на разрыве (условия динамической совместности).

В настоящей статье дается обзор методов оптической визуализации и особенностей их применения для обработки результатов численного моделирования течений невязкого и вязкого сжимаемого газа. Рассматриваются вопросы, связанные со сравнением результатов численного моделирования с данными физического эксперимента (теневые картины, шпирен-изображения, интерферограммы). Приводятся примеры расчетов сверхзвуковых течений невязкого и вязкого сжимаемого газа в практических приложениях, а также обсуждаются методы визуализации полученной картины потока. Для выявления критических точек и других сингулярностей применяется топологический метод визуализации.

2. Методы оптической визуализации. Оптическая визуализация потоков опирается на физические явления, имеющие место при прохождении излучения через прозрачную среду (рефракция, рассеяние, поглощение, переизлучение, поляризация, некоторые эффекты нелинейной оптики). Наиболее широко на практике используются методы, основанные на рефракции света в оптически неоднородной среде (теневые картины, шпирен-изображения, интерференционные методы).

Достоинствами оптических методов являются высокая чувствительность, бесконтактность применения, отсутствие возмущений в изучаемом течении, возможность проведения как качественных (форма и расположение скачков уплотнения, вихри, турбулентность, пограничный слой), так и количественных исследований (распределения плотности, температуры, давления). Основным недостатком оптических методов состоит в том, что все изменения плотности суммируются вдоль направления распространения луча зондирующего излучения. Регистрируется интегральное значение изменения плотности, поэтому теневые и интерференционные методы применяются, в основном, для визуализации двумерных, а также некоторых осесимметричных течений.

При визуализации поля течения газа теневым методом изменение освещенности пропорционально степени изменения градиента плотности. При наличии в потоке сильных скачков плотности происходят дополнительные отклонения луча на поверхности разрыва. Теневое изображение ударной волны представляет собой темную полосу со стороны набегающего потока, сменяющуюся яркой светлой полосой, интенсивность которой постепенно уменьшается.

Шпирен-метод визуализации представляет собой усложненный теневой метод. Основным принципом действия шпирен-системы состоит в том, что часть света, отклоненного при прохождении через неоднородность плотности газа, задерживается кромкой ножа, установленного в фокальной плоскости луча, прошедшего через исследуемую область. На экране освещенность соответствующих частей изображения уменьшается или увеличивается в зависимости от того, куда направлено отклонение. При визуализации поля течения газа шпирен-методом изменение освещенности пропорционально градиенту плотности газа в исследуемой области в направлении, перпендикулярном к кромке ножа, а не степени изменения градиента плотности, как в теневом методе. Шпирен-методом визуализируются вихри, волны разрежения, а теневой метод применяется для регистрации положения разрывов.

Интерферометрия используется для количественных исследований плотности прозрачных сред. При интерферометрической регистрации поля течения картина распределения полос интенсивности света отражает пространственное распределение показателя преломления среды. Интерференционная картина

представляет собой систему полос, расстояние между максимумами которых при заданной длине волны определяется углом схождения интерферирующих волн. Введение оптической неоднородности в одно из плеч интерферометра изменяет оптическую длину пути соответствующего луча по сравнению с невозмущенным лучом и вызывает смещение интерференционных полос. Из-за разности фаз деформированного волнового фронта по отношению к сравнительному волновому фронту в результате интерференции происходит изменение интенсивности излучения, а структура волнового фронта становится видимой.

3. Визуализация газодинамических разрывов. Для визуализации расчетов сжимаемых течений широкое применение находят численный шпирен, численные теневые картины и численные интерферограммы.

3.1. Численные теневые картины. В теневом методе (shadowgraph) интенсивность изображения оказывается пропорциональной градиенту от интеграла градиента плотности в направлении, нормальном

к направлению распространения луча света: $I \propto \nabla \int_0^{L_0} \nabla \rho(x, y, z) dl$.

Локальная интенсивность света на теневой картинке зависит от суммы вторых производных плотности (Marr edge detector): $\nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}$.

Для численной дискретизации лапласиана плотности используются центрированные конечные разности 2-го порядка $\nabla^2 \rho_{ij} = \frac{1}{h^2} (\rho_{i+1,j} + \rho_{i-1,j} + \rho_{i,j+1} + \rho_{i,j-1} - 4\rho_{ij})$, где h — шаг сетки. Для уменьшения или исключения численного шума применяются фильтрующие и сглаживающие функции [5].

Численная теневая картина конструируется при помощи изображения лапласиана плотности на нелинейной шкале (так, как это делается для шпирен-визуализации). Один из возможных выборов состоит в том, чтобы положить $S(x, y) = \beta \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\varkappa \nabla^2 \rho}{\max |\nabla^2 \rho|} \right) \right]$, где $\varkappa \approx 250$ по рекомендациям работы [4].

3.2. Численный шпирен. Для визуализации результатов расчетов применяется методика численного шпирена (schlieren imaging). В шпирен-методе измеряется оптическая плотность изображения, которая через углы отклонения зондирующих лучей интегрально связывается с производной плотности газа по направлению. Численный шпирен имитирует экспериментальную шпирен-визуализацию и позволяет выявить характерные детали течения (ударные волны, волны разрежения, контактные разрывы).

При распространении света в направлении, нормальном к оси x в физическом пространстве, интен-

сивность изображения в каждой точке находится из соотношения $I \propto \int_0^{L_0} \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial x} dl$.

На основе данных численного моделирования вычисляется модуль градиента плотности, который визуализируется с помощью оттенков серого в специально подобранном нелинейном масштабе. Для двумерного течения градиент плотности имеет две компоненты $\nabla \rho(x, y) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)'$. На экспериментальных шпирен-фотографиях визуализируется либо $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, либо $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ в зависимости от ориентации луча.

Для численных образов подходящим выбором оказывается величина градиента плотности

$$|\nabla \rho| = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Для представления слабых неоднородностей течения используется нелинейная шкала на основе изображения величины

$$S(x, y) = \beta \exp \left(-\varkappa \frac{|\nabla \rho| - \min |\nabla \rho|}{\max |\nabla \rho| - \min |\nabla \rho|} \right),$$

где $\beta \approx 0.8 \div 1$ и $\varkappa \approx 15$ по рекомендациям работы [4]. Находит применение и другое определение шкалы [9]:

$$S(x, y) = \exp \left(-\varkappa \frac{|\nabla \rho|}{\max |\nabla \rho|} \right).$$

Минимум и максимум величины градиента плотности ищутся во всей области течения. Параметры определяют цвет фона (изображение строится с использованием различных градаций серого цвета) и степень

усиления слабых неоднородностей. Нижний уровень соответствует черному цвету, а верхний уровень — белому.

Методы построения численных шпирен-изображений обсуждаются в работе [10]. Численная визуализация трехмерных скалярных полей рассматривается в работе [11]. На практике находят применение подходы к вычислению градиента плотности на линии или поверхности разрыва газодинамических параметров, имеющие различную чувствительность к численному шуму [12]. В частности, для идентификации разрывов яркости применяются операторы Робертса (Roberts edge detector) и Собела (Sobel edge detector), которые вводятся следующими определениями [12]:

$$\begin{aligned} \text{— оператор Робертса: } & \begin{cases} \nabla_x \rho_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}h} (\rho_{i+1,j+1} - \rho_{ij}); \\ \nabla_y \rho_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}h} (\rho_{i,j+1} - \rho_{i+1,j}); \end{cases} \\ \text{— оператор Собела: } & \begin{cases} \nabla_x \rho_{ij} = \frac{1}{8h} [2(\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}) + \rho_{i+1,j+1} - \rho_{i-1,j+1} + \rho_{i+1,j-1} - \rho_{i-1,j-1}]; \\ \nabla_y \rho_{ij} = \frac{1}{8h} [2(\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}) + \rho_{i+1,j+1} - \rho_{i+1,j-1} + \rho_{i-1,j+1} - \rho_{i-1,j-1}]. \end{cases} \end{aligned}$$

Под h понимается шаг сетки. Величина градиента плотности находится из соотношения

$$|\nabla \rho_{ij}| = [(\nabla_x \rho_{ij})^2 + (\nabla_y \rho_{ij})^2]^{1/2}.$$

В работе [13] оператор Собела используется для визуализации границ сверхзвуковой струи. Различные операторы применяются в работе [14] для визуализации ударно-волновых структур, формирующихся при взаимодействии ударной волны с пограничным слоем.

Изображения, основанные на величине градиента плотности, одинаково хорошо показывают газодинамические разрывы с любой ориентацией. Использование производной плотности в каком-либо координатном направлении позволяет увидеть разрывы, проходящие перпендикулярно к этому направлению. С другой стороны, такие изображения лучше соответствуют экспериментальным фотографиям и используются при прямом сравнении расчетных данных с данными физического эксперимента. Теневое изображение показывает производные поля плотности более высокого порядка, позволяя выявить более тонкие и мелкие детали течения, чем шпирен-визуализация.

Расчет численных шпирен-изображений ведется с использованием экспоненциального преобразования поля градиента плотности. Для выделения особенностей потока дается дополнительное боковое подсвечивание горельефа распределения плотности, задаваемое в плоскости сечения шпирена. Это позволяет усилить выделение особенностей структуры потока через визуальную имитацию изменения градиента переменной плотности, связанного с изменением освещенности поверхности (графика) функции распределения плотности. Такой подход повторяет экспериментальную методику шпирен-фотографий, получаемых по освещенности неоднородности плотности газового потока в плоскости светового луча. Достаточно эффективным оказывается нанесение на поверхности горельефа карт распределений плотности и градиента плотности.

3.3. Численные интерферограммы. Численные интерферограммы подражают экспериментальным картинкам течения с использованием для визуализации само поле плотности. Интенсивность света изменяется периодически с изменением плотности, воспроизводя экспериментальные интерферограммы там, где это происходит из-за интерференции между лучом света, проходящим через течение, и опорным лучом. Интенсивность результирующего изображения в каждой точке полагается равной

$$I(x, y) = 1 + \cos\left(2\pi \frac{\rho - \rho_0}{\Delta\rho}\right).$$

Характерная плотность ρ_0 изображается на интерферограммах белым цветом. Характерный перепад плотности рассчитывается исходя из числа интерференционных полос: $\Delta\rho = \frac{1}{N} (\rho_{\max} - \rho_{\min})$. При изменении плотности от ρ_{\min} до ρ_{\max} оттенки серого цвета N раз проходят от белого до черного и обратно, образуя картинку, которая является чувствительной к неоднородностям течения.

4. Методы выделения разрывов. При использовании методов сквозного счета возникает необходимость определения положения и классификации сильных и слабых газодинамических разрывов по данным численного моделирования. Обнаружение разрывов затрудняется численной диссипацией, приводящей к размазыванию разрывов на несколько ячеек сетки, и нефизическими осцилляциями решения, приводящими к возникновению ложных минимумов и максимумов искомых функций [2].

4.1. Основные подходы. В методах, основанных на физических принципах (shock detection method), для обнаружения разрывов используются распределения искомым функций и их обработка [8]. В простейшем случае положение разрыва определяется как место, в котором имеет место концентрация (сгущение) линий уровня давления. Такой подход к визуализации ударных волн ограничивается двумерными течениями. Для визуализации головной ударной волны в трехмерном случае строятся изолинии числа Маха. Использование других переменных, например плотности и температуры, затрудняет необходимость различия ударных волн и контактных разрывов [8].

В других подходах для определения положения ударных волн и других разрывов используется градиент плотности [15], нормальное число Маха [16, 17], а также метод характеристик [18].

В методе, предложенном в работе [17], положение разрывов ищется исходя из максимума градиента плотности. Используя векторное поле скорости, находятся первая и вторая производные плотности

$$\frac{d\rho}{dn} = \nabla\rho \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \frac{d^2\rho}{dn^2} = \nabla \left(\nabla\rho \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Изоповерхность $\frac{d^2\rho}{dn^2} = 0$ соответствует максимуму или минимуму градиента плотности. Для выделения ударных волн используется условие $\frac{d\rho}{dn} > 0$, а для выделения волн разрежения — условие $\frac{d\rho}{dn} < 0$. На практике такой подход приводит к выделению не только ударных волн, но и волн разрежения [17]. Условия $\frac{d^2\rho}{dn^2} = 0$ и $\frac{d\rho}{dn} < 0$ выполняются и в гладких областях потока, где градиент давления отличен от нуля вследствие численных ошибок, в связи с чем используется некоторое пороговое значение производной плотности (условие равенства производной плотности заменяется условием $\frac{d\rho}{dn} > \varepsilon$, где ε — малое положительное число). Поиск порогового значения градиента плотности представляет собой нетривиальную задачу [8].

Метод, используемый в работах [16, 17], основан на вычислении числа Маха в направлении, нормальном к скачку уплотнения. Параметры потока до и после разрыва связываются соответствующими газодинамическими соотношениями, а положение разрыва находится исходя из локальных градиентов плотности и давления. Разрыв определяется как поверхность, на которой нормальное число Маха принимает значения, равные единице (подход применим как к стационарным, так и к нестационарным разрывам на структурированных и неструктурированных сетках). В случае стационарного разрыва нормальное число Маха находится из соотношения $M_n = M \frac{|\nabla p|}{|\nabla p|}$.

В нестационарном случае учитывается изменение положения ударной волны во времени. В трехмерном случае для визуализации разрывов используются изоповерхности $M_n = 1$ [19, 20].

На практике нормальное число Маха рассчитывается как проекция вектора скорости на направление, указываемое градиентом давления [17]. Градиент давления направлен по нормали к ударной волне, а на волне разрежения нормальное число Маха и градиент давления направлены в противоположные стороны. В областях течения с приблизительно равномерным распределением давления малые случайные колебания давления, возникающие в результате численных ошибок, приводят к выделению ложных разрывов. Для исключения из рассмотрения ложных разрывов применяется процедура фильтрации [8], что приводит к необходимости выбора порогового значения градиента давления. На практике применяются следующие условия: $\frac{|\nabla p \cdot \mathbf{n}|}{|\nabla p|} \leq c_1$, $|\nabla p| \geq c_2 |\nabla p|_{\max}$, где c_1 и c_2 — малые положительные числа. Под \mathbf{n} понимается вектор нормали к поверхности разрыва. Фильтры, реализуемые в работе [8], зависят от локального поля давления и локального шага сетки.

На неструктурированной сетке используется взвешенный по нескольким соседним узлам градиент плотности [16]. Для уточнения положения разрыва, размазанного на несколько ячеек, из рассмотрения исключаются все треугольники, нормаль к плоскости которых не совпадает с направлением градиента давления [17].

Для визуализации ударных волн в работе [18] используется метод выделения особенностей, основанный на применении точных и приближенных решений задачи Римана в каждой ячейке сетки. Такой подход позволяет не только определить положение разрыва, но и провести классификацию газодинамических разрывов как в двух-, так и в трехмерном случае.

4.2. Извлечение разрывов. Процедура идентификации газодинамических разрывов (их тип и положение) занимает значительную часть времени исследования и не лишена субъективности. Метод, предложенный в работе [3], позволяет ускорить время такой обработки и повысить достоверность исследования.

В центре каждой ячейки сетки вычисляется градиент плотности и его ориентация. Точки с градиентом плотности, бóльшим среднего значения градиентов плотности во всей области, являются точками разрыва. Производится классификация газодинамических разрывов, рассматривая в ближайших точках дискретные аналоги условий на сильных разрывах. В результате каждая точка относится к одному из видов разрывов: ударной волне (нормальной или наклонной), тангенциальному разрыву, чисто контактному разрыву, волне сжатия [3, 21].

Для распознавания и извлечения контактных разрывов находит применение метод функции уровня (level-set method) [22]. Функция уровня удовлетворяет уравнению переноса, имеет нулевой уровень на интерфейсе и противоположные по знаку значения в областях разных фаз, что позволяет описывать изменение положения интерфейса. Условие на контактном разрыве $\zeta(t) = 0$ позволяет отслеживать его положение во времени (слева и справа от разрыва полагается, что $\zeta = \pm 1$).

В качестве точек, принадлежащих разрывам, берутся точки пересечения граней сетки с линиями уровня нулевого лапласиана плотности (zero crossing of Laplacian). При этом из рассмотрения исключаются те грани ячейки, на которых градиент плотности оказывается ниже некоторого предельного значения.

В двумерном случае координата точки, принадлежащей разрыву, находится из соотношения

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{\nabla^2 \rho(x_1)}{\nabla^2 \rho(x_2) - \nabla^2 \rho(x_1)}.$$

Под x_1 и x_2 понимаются узлы грани. При этом требуется выполнение двух условий

$$\nabla^2 \rho(x_2) \cdot \nabla^2 \rho(x_1) < 0, \quad [\nabla^2 \rho(x_2) + \nabla^2 \rho(x_1)] > 2\varepsilon,$$

где ε — пороговое значение плотности.

Формируется список точек, лежащих на разрыве. Для определения типа разрыва используются условия динамической совместности. В работе [5] для классификации разрывов в каждой точке строится нормаль к линии разрыва и проверяются условия на нормальном скачке уплотнения и контактном разрыве. Для этого берется несколько точек, лежащих на нормали по обе стороны от разрыва. Точки, в которых условия динамической совместности не удовлетворяются, исключаются из рассмотрения. При этом учитывается, что ударные волны и контактные разрывы в численном решении размываются на различное число ячеек (степень размытия контактных разрывов обычно выше, чем ударных волн). На заключительном шаге находятся свойства разрывов (например, их интенсивность).

4.3. Сглаживание и подавление шума. Численное дифференцирование приводит к появлению на результирующем изображении шумовых помех. Дополнительным источником помех в численном решении является уменьшение порядка точности разностной схемы до 1-го в окрестности разрыва, что обычно требуется для сохранения монотонности [2]. Для исключения шумовых помех используется операция сглаживания [12].

Фильтрация используется для устранения различного вида шумов, которым подвержены цифровые изображения. При фильтрации яркостные характеристики каждой точки цифрового изображения заменяются другим значением яркости, которое признается в наименьшей степени искаженным помехой.

Частотные методы основываются на преобразовании Фурье, что позволяет обрабатывать функцию в частотной области, после чего без потери информации можно вернуться к исходному изображению.

Пространственные методы применяются к растровым изображениям, представленным в виде двумерных матриц. Их принцип заключается в применении специальных операторов к каждой точке исходного изображения. В качестве операторов выступают прямоугольные или квадратные матрицы, называемые масками, ядрами или окнами. Маска представляет собой небольшой двумерный массив, а методы улучшения, базирующиеся на таком подходе, называют обработкой по маске или фильтрацией по маске.

При линейной фильтрации отклик маски задается суммой произведений пикселей в области покрытия фильтра. В качестве линейного сглаживающего фильтра используется усредняющий фильтр, выходным значением которого является среднее значение по окрестности маски фильтра. Фильтр используется для задач удаления зернистости изображения, вызванной импульсным шумом.

Общая формула отклика усредняющего фильтра, предназначенного для фильтрации исходного изображения q с размерами $n \times n$ (далее тильда соответствует распределению функции после сглаживания),

имеет вид $\tilde{q}_{ij} = \sum_{k=-n/2}^{n/2} \sum_{l=-n/2}^{n/2} w_{kl} q_{i+k, j+l}$, где $w(kl)$ — элемент ядра свертки изображения. Индексы i и j

относятся к исходному изображению, а индексы k и l — к ядру свертки. Весовые множители удовлетворяют условию $\sum_{k,l} w_{kl} = 1$.

При медианной фильтрации значения пикселей представляют собой усредненное значение точек соответствующей окрестности. Медианный фильтр является более эффективным, чем обычное усреднение, поскольку приводит к меньшим искажениям границ выделяемых объектов. В качестве маски при медианной фильтрации используется двумерное окно с центральной симметрией, при этом его центр располагается в текущей точке фильтрации.

В другом подходе используется лапласиан гауссиана (Laplacian of Gaussian, LoG). Результирующее поле (после сглаживания) находится из соотношения

$$\tilde{q}_{ij} = \sum_k \sum_l G_{kl} q_{i+k, j+l}, \quad \text{где } G_{kl} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_{kl}^2 + y_{kl}^2}{2\sigma^2}\right).$$

Под σ понимается стандартное отклонение.

5. Примеры визуализации. Ниже приводятся примеры визуального представления решений ряда задач газовой динамики, связанных с расчетами течений невязкого и вязкого сжимаемого газа, содержащих слабые и сильные газодинамические разрывы.

5.1. Численный метод. Численная модель строится на основе решения нестационарных уравнений Эйлера и Навье–Стокса для невязкого и вязкого сжимаемого газа в двух- и трехмерной постановке на неструктурированной сетке [2].

Для дискретизации основных уравнений применяется явная квазимонотонная схема повышенного порядка точности, основанная на модификации метода Годунова. Конвективные потоки рассчитываются независимо по каждому направлению с помощью приближенного решения задачи Римана (метод HLLC). Повышение пространственного порядка точности схемы без потери ее монотонности достигается при помощи ограничителя *minmod*. В случае решения уравнений Навье–Стокса вязкие потоки вычисляются с помощью центральных разностей 2-го порядка. Интегрирование по времени проводится методом Рунге–Кутты третьего порядка. Используется модель совершенного газа (воздух) с постоянным отношением удельных теплоемкостей ($\gamma = 1.4$) и числом Прандтля ($Pr = 0.72$). Зависимость вязкости от температуры описывается формулой Сазерленда $\frac{\mu}{\mu_*} = \left(\frac{T}{T_*}\right)^{3/2} \frac{T_* + S_0}{T + S_0}$, где μ_* — динамическая вязкость при температуре T_* и $S_0 = 110.5$ К. Для воздуха $\mu_* = 1.68 \times 10^{-5}$ кг/(м·с) при $T_* = 273$ К.

5.2. Вдув струи в сверхзвуковой поток. Рассмотрим взаимодействие струи, вдуваемой через плоскую щель в пластине, с невозмущенным сверхзвуковым потоком газа, движущимся параллельно пластине с числом Маха, равным 2.6 [23]. Расчеты проводятся на блочно-структурированной сетке, содержащей около 1 миллиона узлов.

Визуализацию результатов численного моделирования, соответствующих установившемуся режиму течения, показывает рис. 1. Перед вдуваемой струей, служащей преградой для основного потока, поток тормозится, в результате чего возникает положительный градиент давления (область повышенного давления формируется перед отверстием вдува, а область пониженного давления — позади отверстия вдува), вызывающий отрыв пограничного слоя в точке S . При этом образуются передняя застойная зона 1 и головной скачок уплотнения 2. Линии тока основного потока разворачиваются, проходя через головную ударную волну и скачок уплотнения 3 над отверстием вдува. Вдуваемая струя искривляется под воздействием основного потока (линии тока в струе разворачиваются тем сильнее, чем ближе они находятся к поверхности пластины) и на некотором расстоянии вниз по потоку соприкасается с обтекаемой поверхностью в точке R , создавая застойную зону 6 с пониженным давлением. Позади точки R наблюдается скачок уплотнения 8, связанный с повторным сжатием потока. Область 7 (область проникновения струи в сверхзвуковой поток) ограничена двумя висячими скачками уплотнения 4 и диском Маха 5.

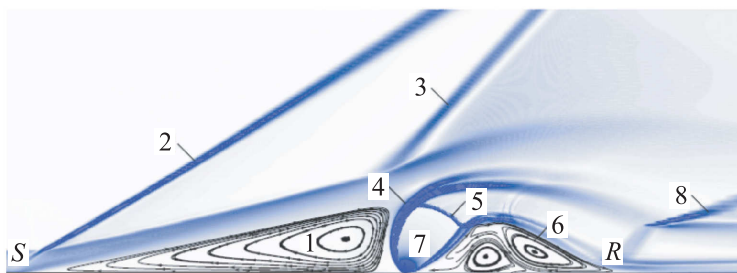


Рис. 1. Визуализация результатов численного моделирования

На поверхности пластины перед вдуваемой струей наблюдается отрыв пограничного слоя с образованием подковообразного вихря (рис. 2). Продольные парные вихри, формирующиеся в результате взаимодействия вдуваемой струи с основным потоком, распространяются вниз по потоку. Изменение диаметра вихревых трубок показывает, что вниз по течению сначала происходит усиление продольной завихренности в виде парных продольных вихревых структур, а затем ее ослабление и полное затухание.

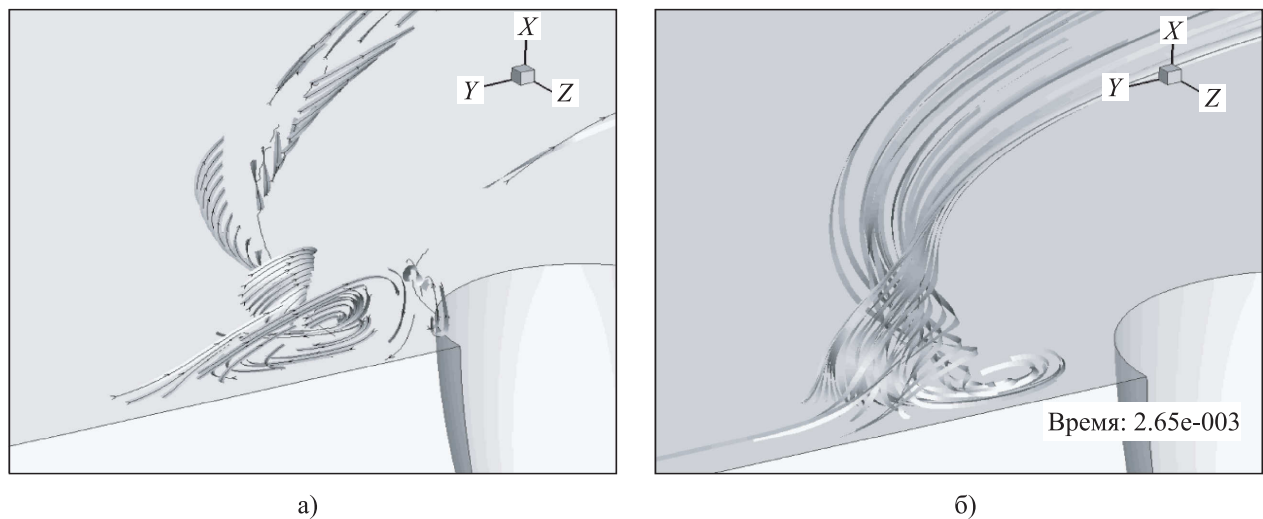


Рис. 2. Структура подковообразного вихря, формирующегося перед вдуваемой струей: (а) и (б) соответствуют различным способам визуализации вихревых трубок

В трехмерном течении определение отрыва пограничного слоя усложняется. Тип критической точки зависит от собственных значений тензора градиента скорости и определяет локальную структуру течения в ее окрестности [1]. Для визуализации топологической структуры отрывного течения используются линии уровня поверхностного трения, предельные линии тока и особые точки тензора градиента скорости.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 3 и обработанные в виде линий уровня поверхностного трения (черные линии), показывают формирование четырех седловых точек (двух вверх и двух вниз по потоку от отверстия вдува), одного устойчивого узла, расположенного слева от отверстия вдува, и двух фокусов, находящихся позади отверстия вдува и расположенных по обе стороны от линии симметрии. Линии уровня давления на пластине (белые линии) имеют грибовидную форму (mushroom-like shape). Шляпку гриба формируют линии уровня, расположенные вверх по потоку от отверстия вдува, а ножку гриба — линии уровня, соответствующие области вниз по потоку.

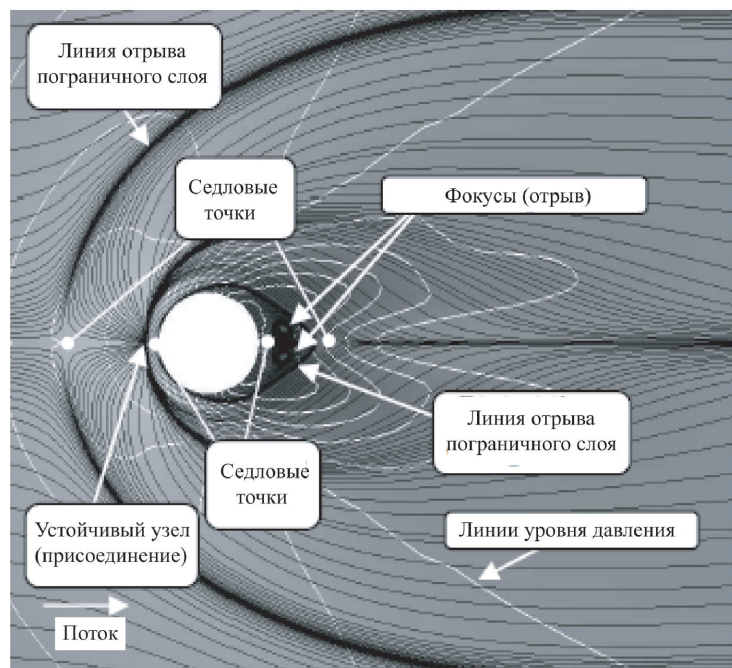


Рис. 3. Линии уровня поверхности трения около отверстия вдува и положение критических точек

5.3. Течение в канале с обратным уступом. Расчеты нестационарного сверхзвукового течения в ступенчатом канале с числом Маха, равным 3 (flow in a channel with a forward facing step), находят широкое применение для сравнения точности разностных схем и проверки работоспособности численных методов на различных сетках. Подробное описание задачи и ее решение при помощи схем WENO-типа приводится в работе [24]. В данной задаче представляет интерес точность разрешения с помощью выбранного численного метода сложных газодинамических структур, возникающих в результате взаимодействия сверхзвукового потока со ступенькой, нестационарное взаимодействие волн разрежения и сжатия, а также взаимодействие маховских дисков, возникающих при нерегулярном взаимодействии ударных волн между собой и со стенками канала [2].

Расчетная область представляет собой канал с внезапным сужением. Длина канала равняется 3, а

высота канала во входном сечении составляет 1 (размеры канала даются в относительных единицах). Ступенька высотой 0.2 располагается на расстоянии 0.6 от левой границы расчетной области и продолжается до правой границы.

На входной границе канала задается число Маха ($M = 3$), а на его выходной границе используются условия свободного вытекания (течение в выходном сечении канала является сверхзвуковым, поэтому граничные условия на выходе не оказывают влияния на структуру течения внутри расчетной области). На нижней и верхней границах канала используются граничные условия зеркального отражения.

Расчеты проводятся для идеального совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей $\gamma = 1.4$. Для упрощения постановки и оценки точности численного решения на левой границе канала полагается, что $\rho = 1.4$ и $p = 1$. При этом локальная скорость звука равняется единице ($c = 1$), а число Маха становится численно равным скорости невозмущенного потока ($u = M, v = 0, e = 6.286$). Считается, что в начальный момент времени газ в канале покоится ($\rho = 0.5, u = v = 0, e = 0.125$). Расчеты проводятся на неструктурированной сетке, содержащей 110 628 контрольных объемов и 55 958 узлов.

Одним из главных требований, предъявляемых к качеству применяемых к решению задач газовой динамики методов, является правильность воспроизведения решения в областях, где оно претерпевает сильные изменения во времени и пространстве.

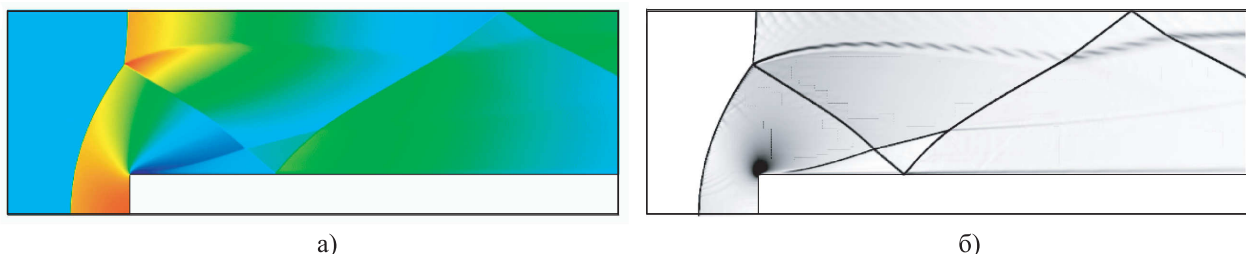


Рис. 4. Сравнение различных способов визуализации: линии уровня плотности (а) и численный шликрен (б)

Результаты расчетов, обработанные в виде линий уровня плотности и шликрен-изображения, приводятся на рис. 4 (плотность изменяется в диапазоне от 0.332 до 6.15) для момента времени $t = 4$, соответствующего стационарной картине течения. При этом $\frac{\rho_{\min}}{\rho_{\infty}} = 0.8$ и $\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\infty}} = 4.33$. В стационарном режиме течения перед ступенькой формируется отраженная ударная волна с криволинейным (колоколообразным) фронтом. Размер диска Маха составляет около 10% от высоты канала. Фронт ударной волны размывается на 2–3 ячейки. Расчеты позволяют с достаточной степенью точности воспроизвести ударные волны, отраженные от верхней поверхности ступеньки и канала (на грубых сетках эти ударные волны имеют слабую интенсивность). Изогнутая отраженная волна, растягивающаяся по всей расчетной области, быстро движется в ее правый конец и не движется в левый. Маховская ножка идет под углом, равным 90° , к поверхности и в тройной точке пересекается с падающей и отраженными ударными волнами.

Следует отметить несколько нефизических особенностей течения (они хорошо заметны на фрагменте б), которые возникают из-за численных ошибок. К нефизическим особенностям течения относятся слабая волна разрежения, появляющаяся при взаимодействии веера волн разрежения, исходящего из угла ступеньки, с ее верхней стенкой, а также развитие неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца, распространяющейся из тройной точки вдоль верхней стенки канала. Основная причина возникновения и развития неустойчивости состоит в малых осцилляциях энтропии, генерируемых численными схемами в тройной точке (численный пограничный слой).

5.4. Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем. Структура потока в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем зависит от режима течения в пограничном слое, интенсивности скачка уплотнения и угла его падения. При небольшой интенсивности падающей ударной волны отражение происходит без отрыва пограничного слоя. С увеличением интенсивности скачка реализуется трансзвуковая конфигурация взаимодействия, когда в основании падающего скачка формируется λ -образная структура.

Рассмотрим взаимодействие отраженной от твердой стенки ударной волны с пограничным слоем в ударной трубе (reflected shock-boundary layer interaction) при различных числах Рейнольдса. В результате взаимодействия ударной волны с пограничным слоем происходит формирование λ -образной ударно-волновой структуры. Давление торможения в пограничном слое ниже, чем позади отраженной ударной волны, что препятствует движению газа в пограничном слое и приводит к образованию отрывной зоны.

Расчетная область представляет собой квадратную полость с единичной стороной, стенки которой считаются теплоизолированными. В качестве рабочей среды используется воздух с постоянным отношением удельных теплоемкостей ($\gamma = 1.4$), а также вязкостью и теплопроводностью, не зависящими от температуры. Числу Прандтля присваивается значение $Pr = 0.72$. Расчеты проводятся для чисел Рейнольдса, равных 200 и 1000, на сетке, содержащей 3000×1500 узлов. Варьирование числом Рейнольдса производится за счет надлежащего изменения вязкости. Полная постановка задачи приводится в работе [25].

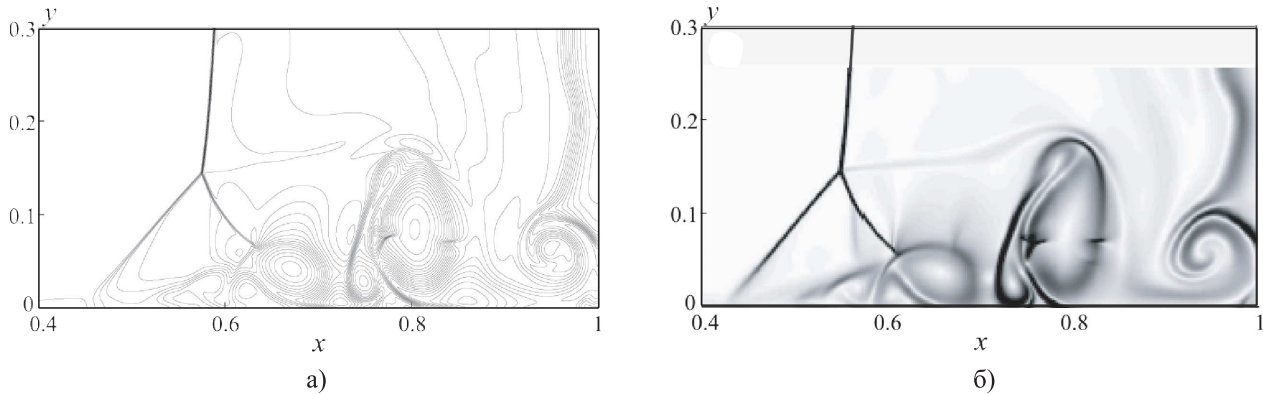


Рис. 5. Линии уровня плотности (а) и линии уровня модуля градиента плотности (б) при $Re = 200$

Разрушение мембраны в момент времени $t = 0$ приводит к распространению ударной волны и контактного разрыва. Ударная волна движется вправо с числом Маха, равным 2.37, и отражается от правой стенки в момент времени $t = 0.2$. Отраженная ударная волна взаимодействует с контактным разрывом, приводя к усложнению ударно-волновой структуры потока. Контактный разрыв остается стационарным и расположенным вблизи правой стенки. В момент времени $t = 0.4$ отраженная ударная волна начинает взаимодействовать с волной разрежения. Волна разрежения отражается от левой границы расчетной области в момент времени $t = 0.5$, изменяя распространение отраженной ударной волны.

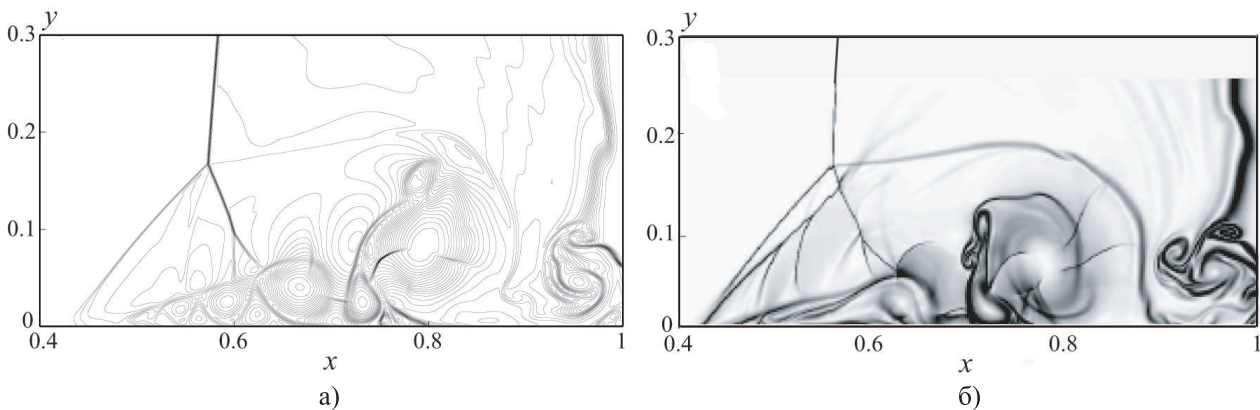


Рис. 6. Линии уровня плотности (а) и линии уровня модуля градиента плотности (б) при $Re = 1000$

В вязком случае распространяющиеся в канале контактный разрыв и падающая ударная волна взаимодействуют с нижней стенкой, формируя тонкий пограничный слой. После отражения ударной волны от правой стенки отраженная ударная волна взаимодействует с пограничным слоем, изменяя структуру течения около нижней границы. Взаимодействие отраженной ударной волны с пограничным слоем приводит к формированию λ -образной ударно-волновой структуры потока. Поскольку давление торможения в пограничном слое ниже, чем давление торможения во внешнем потоке, внизу λ -образной структуры происходит отрыв пограничного слоя и образование отрывной области. Отрывная область отделяется от основного потока сверхзвуковым сдвиговым слоем, в котором возникают различного рода неустойчивости. От тройной точки вправо отходит линия скольжения, которая закручивается вокруг вихревой структуры, располагающейся вниз по потоку от отрывной зоны (в правом нижнем углу расчетной области). Газ внутри отрывной зоны вовлекается в движение отраженной ударной волной, что приводит к образованию вторичных отрывных зон и вихрей вблизи стенки каверны.

Результаты расчетов при $Re = 200$, обработанные в виде линий уровня плотности и линий уровня модуля градиента плотности, приводятся на рис. 5 в момент времени $t = 1$. Вихревые структуры потока разрешаются при помощи 5–10 узлов сетки, а фронт основной ударной волны — при помощи 2–3 узлов сетки.

Увеличение числа Рейнольдса приводит к формированию семейства вторичных отрывных структур, находящихся вниз по потоку относительно точки отрыва пограничного слоя. Вторичные вихревые структуры вносят возмущения и изменяют расположение линии, разделяющей основную отрывную зону и λ -образную структуру. Результаты расчетов при $Re = 1000$, обработанные в виде линий уровня плотности, приводятся на рис. 6 в момент времени $t = 1$.

Используемые разностные схемы позволяют воспроизвести крупномасштабные вихревые структуры в пограничном слое и формирование λ -образной ударно-волновой структуры.

6. Заключение. Рассмотрены основные подходы к численной визуализации течений, содержащих слабые и сильные газодинамические разрывы (теневые картины, шпирен-изображения, интерферограммы). Приведены примеры визуального представления решений ряда задач газовой динамики, связанных с расчетами течений невязкого и вязкого сжимаемого газа. Применение разработанного подхода в сочетании с топологическими и текстурными методами визуализации позволяет не только выделить тип и положение разрывов, но также тип и координаты сингулярных особенностей векторного поля скорости (критические точки, линии отрыва и присоединения потока).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 13-07-12079 и при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.575.21.0057).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Тетерина И.В., Яковчук М.С. Методы и концепции визуализации вихревых течений в задачах вычислительной газовой динамики // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 81–100.
2. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.
3. Ворожцов Е.В. Классификация разрывов течения газа как задача распознавания образов. Препринт № 23-86 ИТПМ СО АН СССР. Новосибирск, 1986.
4. Hadjadj A., Kudryavtsev A. Computation and flow visualization in high-speed aerodynamics // Journal of Turbulence. 2005. Vol. 6, N 16. 33–81.
5. Samtaney R., Zabusky N.J. Visualization, feature extraction and quantification of numerical visualizations of high-gradient compressible flows // Flow Visualization. Techniques and Examples. London: Imperial College Press, 2000. 317–344.
6. Базаров С.Б. Применение цифровой обработки изображений для визуализации результатов газодинамических расчетов // Применение методов научной визуализации в прикладных задачах. М.: Изд-во МГУ, 2000. 39–42.
7. Cui S., Wang Y., Qian X., Deng Z. Image processing techniques in shockwave detection and modeling // Journal of Signal and Information Processing. 2013. **4**, N 3B. 109–113.
8. Wu Z., Xu Y., Wang W., Hu R. Review of shock wave detection method in CFD post-processing // Chinese Journal of Aeronautics. 2013. **26**, N 3. 501–513.
9. Quirk J.J., Karni S. On the dynamics of a shock–bubble interaction // Journal of Fluid Mechanics. 1996. **318**. 129–163.
10. Anyoji M., Sun M. Computer analysis of the schlieren optical setup // Proceedings of the 27th International Congress on High-Speed Photography and Photonics. Vol. 6279. Bellingham: SPIE Press, 2007. doi: 10.1117/12.725101.
11. Atcheson B., Ihrke I., Heidrich W., Tevs A., Bradley D., Magnor M., Seidel H.-P. Time resolved 3d capture of non-stationary gas flows // ACM Transaction on Graphics. 2008. **25**, N 5. 132–141.
12. Schalkoff R.J. Digital image processing and computer vision. New York: Wiley, 1989.
13. Kouchi T., Hoshino T., Sasaya K., Masuya G. Time-space trajectory of unsteady jet into supersonic crossflow using high-speed framing schlieren images // AIAA Paper. 2009. doi 10.2514/6.2009-7316.
14. Estruch D., Lawson N.J., MacManus D.G., Garry K.P., Stollery J.L. Measurement of shock wave unsteadiness using a high-speed schlieren system and digital image processing // Review of Scientific Instruments. 2008. **79**. 126108-1–126108-3. doi 10.1063/1.3053361.
15. Pagendarm H.G., Seitz B. An algorithm for detection and visualization of discontinuities in scientific data fields applied to flow data with shock waves // Scientific Visualization: Advanced Software Techniques. New York: Ellis Horwood, 1993. 161–177.
16. Ma K.-L., Rosendale J.V., Vermeer W. 3D shock wave visualization on unstructured grids // Proceedings of the Symposium on Volume Visualization, 28–29 October 1996, San Francisco, USA. Piscataway: IEEE Press, 1996. 87–94.

17. *Lovely D., Haimes R.* Shock detection from computational fluid dynamics results // AIAA Paper. 1999. doi: 10.2514/6.1999-3285.
18. *Kanamori M., Suzuki K.* Shock wave detection in two-dimensional flow based on the theory of characteristics from CFD data // Journal of Computational Physics. 2011. **230**, N 8. 3085–3092.
19. *Morton K.W., Rudgyard M.A.* Shock recovery and the cell vertex scheme for the steady Euler equations // Lecture Notes in Physics. Vol. 323. Heidelberg: Springer, 2005. 424–428.
20. *Haimes R., Darmofal D.* Visualization in computational fluid dynamics: a case study // Proceedings of the 2nd IEEE Conference on Visualization, 22–25 October 1991, San Diego, CA, USA. Los Alamitos: IEEE Press, 1991. 392–397.
21. *Bazarov S.B.* Image processing in CFD // Proceedings of the 8th International Conference on Computer Graphics and Visualization (GRAPHICON 1998), 7–11 September 1998, Moscow, Russia. Moscow: Mosk. Gos. Univ., 1998. 258–264.
22. *Osher S., Fedkiw R.* Level set method and dynamic implicit surfaces. New York: Springer, 2002.
23. *Волков К.Н., Емельянов В.Н., Яковчук М.С.* Численное моделирование взаимодействия поперечной струи со сверхзвуковым потоком с использованием различных моделей турбулентности // Прикладная механика и техническая физика. 2015. **56**, № 5. 64–75.
24. *Булат П.В., Волков К.Н.* Моделирование сверхзвукового течения в канале со ступенькой на неструктурированных сетках при помощи WENO-схем // Инженерно-физический журнал. 2015. **88**, № 4. 848–855.
25. *Булат П.В., Волков К.Н.* Применение WENO-схем для моделирования взаимодействия отраженной ударной волны с пограничным слоем // Инженерно-физический журнал. 2015. **88**, № 5. 1163–1170.

Поступила в редакцию
08.06.2016

Flow Visualization with Strong and Weak Gas Dynamic Discontinuities in Computational Fluid Dynamics

P. V. Bulat¹, K. N. Volkov², and M. S. Yakovchuk³

¹ *ITMO University, International Laboratory “Applied Fluid and Gas Dynamics”; Kronverksky Prospekt 49, St. Petersburg, 197101, Russia; Ph.D., Head of Laboratory, e-mail: pavelbulat@mail.ru*

² *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: dsci@mail.ru*

³ *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: mihailyakovchuk@gmail.com*

Received June 8, 2016

Abstract: A number of methods for the visualization of flows with gas dynamic discontinuities are considered. These methods allow one to perform the direct comparison of numerical results with experimental data. Methods for the optical visualization of compressible gas flows (shadowgraphs, schlieren images, and interferograms) are discussed. Some examples illustrating the visual representation of numerical solutions of gas dynamics problems related to flows containing weak and strong gas dynamic discontinuities are given. Topological methods of visualization are applied to increase the visual representation of resulting images and to define the locations of critical points as well as the separation and attachment lines.

Keywords: scientific visualization, computational fluid dynamics, flow visualization, shock wave, schlieren, shadowgraph, interferogram.

References

1. K. N. Volkov, V. N. Emelyanov, I. V. Teterina, and M. S. Yakovchuk, “Methods and Concepts of Vortex Flow Visualization in the Problems of Computational Fluid Dynamics,” *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 81–100 (2016).
2. K. N. Volkov, Yu. N. Deryugin, V. N. Emel’yanov, A. S. Kozelkov, and I. V. Teterina, *Difference Schemes in Gas Dynamics on Unstructured Grids* (Fizmatlit, Moscow, 2014) [in Russian].

3. E. V. Vorozhtsov, *Classification of Discontinuities in Gas Flows as the Pattern Recognition Problem*, Preprint No. 23-86 (Khristianovich Inst. Theor. Appl. Mech., Novosibirsk, 1986).
4. A. Hadjadj and A. Kudryavtsev, "Computation and Flow Visualization in High-Speed Aerodynamics," *J. Turbul.* **6** (16), 33–81 (2005).
5. R. Samtaney and N. J. Zabusky, "Visualization, Feature Extraction and Quantification of Numerical Visualizations of High-Gradient Compressible Flows," in *Flow Visualization. Techniques and Examples* (Imperial College Press, London, 2000), pp. 317–344.
6. S. B. Bazarov, "Application of Digital Image Processing for the Visualization of Gas-Dynamic Processes," in *Application of Scientific Visualization in Applied Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2000), pp. 39–42.
7. S. Cui, Y. Wang, X. Qian, and Z. Deng, "Image Processing Techniques in Shockwave Detection and Modeling," *J. Signal Inform. Process.* **4** (3B), 109–113 (2013).
8. Z. Wu, Y. Xu, W. Wang, and R. Hu, "Review of Shock Wave Detection Method in CFD Post-Processing," *Chin. J. Aeronaut.* **26** (3), 501–513 (2013).
9. J. J. Quirk and S. Karni, "On the Dynamics of a Shock–Bubble Interaction," *J. Fluid Mech.* **318**, 129–163 (1996).
10. M. Anyoji and M. Sun, "Computer Analysis of the Schlieren Optical Setup," in *Proc. 27th Int. Congress on High-Speed Photography and Photonics, Xi'an, China, September 17–22, 2006* (SPIE Press, Bellingham, 2007), Vol. 6279. doi: 10.1117/12.725101
11. B. Atcheson, I. Ihrke, W. Heidrich, et al., "Time Resolved 3D Capture of Non-Stationary Gas Flows," *ACM Trans. Graph.* **25** (5), 132–141 (2008).
12. R. J. Schalkoff, *Digital Image Processing and Computer Vision: An Introduction to Theory and Implementations* (Wiley, New York, 1989).
13. T. Kouchi, T. Hoshino, K. Sasaya, and G. Masuya, "Time-Space Trajectory of Unsteady Jet into Supersonic Crossflow Using High-Speed Framing Schlieren Images," AIAA Paper (2009). doi 10.2514/6.2009-7316
14. D. Estruch, N. J. Lawson, D. G. MacManus, et al., "Measurement of Shock Wave Unsteadiness Using a High-Speed Schlieren System and Digital Image Processing," *Rev. Sci. Instrum.* **79**, 126108-1–126108-3 (2008). doi 10.1063/1.3053361
15. H. G. Pagendarm and B. Seitz, "An Algorithm for Detection and Visualization of Discontinuities in Scientific Data Fields Applied to Flow Data with Shock Waves," in *Scientific Visualization: Advanced Software Techniques* (Ellis Horwood, New York, 1993), pp. 161–177.
16. K.-L. Ma, J. V. Rosendale, and W. Vermeer, "3D Shock Wave Visualization on Unstructured Grids," in *Proc. Symp. on Volume Visualization, San Francisco, USA, October 28–29, 1996* (IEEE Press, Piscataway, 1996), pp. 87–94.
17. D. Lovely and R. Haimes, "Shock Detection from Computational Fluid Dynamics Results," AIAA Paper (1999). doi: 10.2514/6.1999-3285
18. M. Kanamori and K. Suzuki, "Shock Wave Detection in Two-Dimensional Flow Based on the Theory of Characteristics from CFD Data," *J. Comput. Phys.* **230** (8), 3085–3092 (2011).
19. K. W. Morton and M. A. Rudgyard, "Shock Recovery and the Cell Vertex Scheme for the Steady Euler Equations," in *Lecture Notes in Physics* (Springer, Heidelberg, 2005), Vol. 323, pp. 424–428.
20. R. Haimes and D. Darmofal, "Visualization in Computational Fluid Dynamics: A Case Study," in *Proc. 2nd IEEE Conf. on Visualization, San Diego, USA, October 22–25, 1991* (IEEE Press, Los Alamitos, 1991), pp. 392–397.
21. S. B. Bazarov, "Image processing in CFD," in *Proc. 8th Int. Conf. on Computer Graphics and Visualization (GraphiCon'98), Moscow, Russia, September 7–11, 1998* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1998), pp. 258–264.
22. S. Osher and R. Fedkiw, *The Level Set Method and Dynamic Implicit Surfaces* (Springer, New York, 2002).
23. K. N. Volkov, V. N. Emelyanov, and M. S. Yakovchuk, "Numerical Simulation of the Interaction of a Transverse Jet with a Supersonic Flow Using Different Turbulence Models," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **56** (5), 64–75 (2015) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **56** (5), 789–798 (2015)].
24. P. V. Bulat and K. N. Volkov, "Simulation of Supersonic Flow in a Channel with a Step on Nonstructured Meshes with the Use of the WENO Scheme," *Inzh. Fiz. Zh.* **88** (4), 848–855 (2015) [*J. Eng. Phys. Thermophys.* **88** (4), 877–884 (2015)].
25. P. V. Bulat and K. N. Volkov, "Use of WENO Schemes for Simulation of the Reflected Shock Wave–Boundary Layer Interaction," *Inzh. Fiz. Zh.* **88** (5), 1163–1170 (2015) [*J. Eng. Phys. Thermophys.* **88** (5), 1203–1209 (2015)].