

УДК 519.632.4; 537.876.4

doi 10.26089/NumMet.v17r325

ГИБРИДНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОДОВ, СОДЕРЖАЩИХ ЛОКАЛЬНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ВСТАВКИ С МНОГОСЛОЙНЫМ СТРОЕНИЕМ

А. А. Петухов¹, А. Н. Боголюбов², М. К. Трубецков³

Рассматривается математическая модель процесса дифракции волны на локальной неоднородной многослойной вставке, помещенной в регулярный прямоугольный волновод. Приводится описание алгоритма численного решения соответствующей задачи дифракции, основанного на применении гибридных численных и численно-аналитических методов. В частности, описываются гибридные методы, основанные на совместном применении неполного метода Галеркина в комбинации с методом конечных разностей и методом матриц переноса. Приводится сравнительный анализ рассмотренных методов, в том числе анализ эффективности их применения для моделирования процесса дифракции волны на многослойной неоднородной вставке в волноводе.

Ключевые слова: нерегулярный волновод, многослойная вставка, гибридные численные методы, неполный метод Галеркина, метод конечных разностей, метод матриц переноса.

1. Введение. Появившись еще в середине XX в., теория волноведущих систем продолжает активно развиваться и сегодня. В последние десятилетия определяющее влияние на развитие теории волноводов оказало интенсивное развитие вычислительной техники, систем коммуникации, микро- и нанoeлектроники. Широкое применение волноводов в современной технике обуславливает необходимость дальнейшего развития теории волноводов и математических методов решения волноводных задач. Особый интерес представляет исследование нерегулярных волноводов, поскольку включение неоднородностей в регулярный волновод позволяет управлять свойствами излучения, распространяющегося в волноводе. Одним из наиболее часто используемых способов построения нерегулярных волноводов является включение в регулярные волноводы локальных неоднородных вставок, после дифракции на которых волна будет обладать необходимыми свойствами.

Неоднородная вставка по сути представляет собой дифракционную структуру. С совершенствованием технологий изготовления различного рода дифракционных структур их строение существенно усложняется, появляются новые классы таких структур. Из всех классов дифракционных структур следует особо выделить широкий класс многослойных дифракционных структур. К этому классу относятся дифракционные структуры, которые имеют (в обобщенном смысле) многослойное строение и в точности или приближенно представляют собой совокупность однородных или неоднородных слоев, каждый из которых может иметь различные свойства. Часто применяются гибридные дифракционные структуры, представляющие собой комбинацию нескольких дифракционных элементов (вставок) с различным строением, например комбинация дифракционных решеток с различным профилем, комбинация дифракционной решетки с многослойной структурой, состоящей из однородных слоев, и др. Такого рода дифракционные структуры, с одной стороны, являются наиболее используемыми благодаря своей относительно простой технической реализуемости, а с другой — позволяют в широких пределах изменять параметры взаимодействующего с ними электромагнитного излучения. Для таких классов дифракционных структур существующих методов моделирования оказывается недостаточно либо их применение оказывается неэффективным. В этой связи важной задачей представляется разработка и реализация новых методов математического моделирования, применение которых позволит эффективно решать как прямые, так и обратные задачи моделирования многослойных дифракционных структур, в частности задачи моделирования волноводов, содержащих локальные неоднородные вставки с многослойным строением.

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; вед. программист, e-mail: petukhov@physics.msu.ru

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; профессор, e-mail: bogan7@yandex.ru

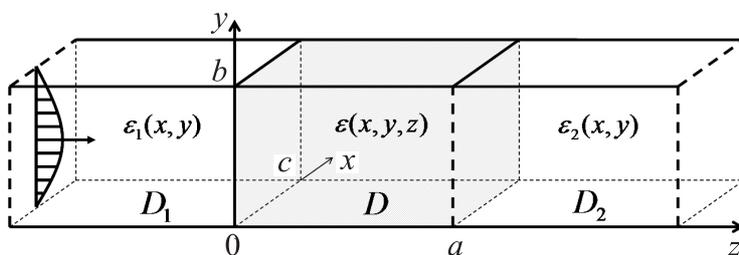
³ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр.; e-mail: trub@srcc.msu.ru

Традиционными методами, применяемыми для решения задач дифракции в нерегулярных волноводах, являются метод конечных разностей, метод конечных элементов и неполный метод Галеркина. Метод конечных разностей в настоящее время достаточно широко используется для решения задач теории волноводов и электродинамики в целом (см., например, [1, 2]), позволяя строить универсальные численные алгоритмы. Обладая большими преимуществами, метод конечных разностей вместе с тем вызывает определенные трудности в своем использовании. В частности, при его использовании встает вопрос об ограничении области, в которой ищется решение. В случае локального характера неоднородности в волноводе удобно использовать парциальные условия излучения, предложенные А. Г. Свешниковым в работе [3], однако аппроксимация этих условий в случае применения чистого метода конечных разностей является весьма трудоемкой задачей [1].

Метод конечных элементов в последние два десятилетия получил очень широкое распространение. Он применяется для решения самых разнообразных задач математической физики и техники, в том числе и теории волноводов [4]. Метод конечных элементов обладает неоспоримыми преимуществами, однако его применение также сопряжено с определенными трудностями. Наиболее серьезной проблемой является тот факт, что для реализации алгоритмов на основе метода конечных элементов требуются очень большие объемы вычислений и, соответственно, объемы машинной памяти. Особенно остро этот вопрос встает при рассмотрении задач в областях трех и более измерений. В этих случаях достаточно трудной задачей является также задание самого конечноэлементного базиса.

Другим методом решения задач, связанных с волноводами, является неполный метод Галеркина [5–7]. В отличие от метода конечных разностей, неполный метод Галеркина позволяет простым способом учитывать парциальные условия излучения. Кроме того, этот метод позволяет получать адекватные результаты уже при выборе небольшого числа базисных функций, что дает возможность решать трехмерные задачи и исследовать достаточно сложные структуры без привлечения больших машинных ресурсов. Эти особенности делают неполный метод Галеркина мощным и в то же время гибким методом решения волноводных задач. В то же время, при решении задачи дифракции применение неполного метода Галеркина представляет собой лишь первый шаг алгоритма, позволяющего получить решение, поэтому этот метод должен применяться в комбинации с другими численными или численно-аналитическими методами, например с методом конечных разностей [1], методом направленной ортогонализации [8, 9] и др.

Следует также отметить, что описанные методы моделирования нерегулярных волноводов являются достаточно общими и могут не учитывать специфику конкретной задачи. При решении задач дифракции на многослойных вставках (многослойных дифракционных структурах) оказывается перспективным применение методов, традиционно используемых для расчета характеристик однородных многослойных покрытий, в частности матричных методов [10].



Волновод с локальной неоднородностью

В настоящей статье рассматривается математическая модель процесса дифракции волны на локальной неоднородности в волноводе, имеющей многослойное строение. Предлагаются два гибридных метода численного расчета данной модели, основанных на совместном применении неполного метода Галеркина в комбинации с конечно-разностным методом в первом случае и методом матриц переноса во втором случае. В заключение приводится сравнительная характеристика предложенных методов и делаются выводы об области применимости каждого из них.

2. Постановка задачи дифракции волны на локальной многослойной вставке в волноводе. Рассмотрим регулярный прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками, бесконечный по продольной координате z и содержащий локальную неоднородную вставку в ограниченной области D (см. рисунок). Отрезки волновода D_1 и D_2 являются регулярными, распределение диэлектрической проницаемости $\epsilon_{1,2}(x, y)$ в них зависит только от поперечных координат в сечении. Таким образом, в частях D_1 и D_2 существуют полные системы собственных волн (системы мод) $\{e_n^{(1)}, \gamma_n^{(1)}\}$ и $\{e_n^{(2)}, \gamma_n^{(2)}\}$, где $e_n^{(1,2)}$ — векторы амплитуд собственных волн в некотором базисе, $\gamma_n^{(1,2)}$ — постоянные распространения мод частей волновода D_1 и D_2 соответственно. Диэлектрическая проницаемость $\epsilon(x, y, z)$ внутри вставки в общем случае зависит от всех трех координат.

Класс рассматриваемых вставок достаточно широк и включает в себя различного рода многослойные

вставки как с однородными слоями, так и с неоднородными слоями с кусочно-постоянным распределением диэлектрической проницаемости в каждом слое. В данной работе рассматриваются диэлектрические вставки, в которых отсутствуют потери на поглощение, однако это не является существенным ограничением для предлагаемых методов моделирования.

Возбуждение волновода производится одной из собственных волн (или суперпозицией некоторых собственных волн) левой регулярной части волновода D_1 с заданной амплитудой (амплитудами). При попадании на неоднородную вставку происходит дифракция возбуждающей волны, в результате которой она частично отражается от вставки и частично проходит через вставку во второй регулярный отрезок D_2 волновода. При этом в спектрах отражения и пропускания в общем случае могут присутствовать все собственные волны соответствующей регулярной части волновода. Основными характеристиками, которые необходимо рассчитывать, являются энергетические коэффициенты отражения и пропускания вставки. В некоторых случаях интерес представляют энергетические характеристики отдельных мод в спектрах отражения и пропускания и соответствующие им амплитудные и энергетические коэффициенты, определяющие долю энергии возбуждающей волны, перешедшей в соответствующую моду.

Поле u в каждой части волновода описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 \varepsilon(x, y, z)u = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad (1)$$

где $\varepsilon(x, y, z)$ — распределение диэлектрической проницаемости во вставке. На границах ∂S волновода по поперечным координатам ставятся однородные граничные условия Дирихле

$$u|_{\partial S} = 0, \quad (2)$$

где S — сечение волновода. Для ограничения области по продольной координате z на открытых концах волновода, а точнее — на границах раздела вставки и регулярных частей волновода, ставятся парциальные условия излучения [3, 11]:

$$\begin{aligned} \iint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + j\gamma_n^{(1)} u \right\} \Big|_{z=0} Y_n(x, y) dx dy &= 2j\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{nn_0}, \\ \iint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} - j\gamma_n^{(2)} u \right\} \Big|_{z=a} Y_n(x, y) dx dy &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где j — мнимая единица, δ_{nn_0} — символ Кронекера и A_{n_0} — амплитуда собственной волны левой части волновода с номером n_0 , возбуждающей волновод, причем в случае возбуждения волновода суперпозицией нескольких собственных волн условия (3) могут быть соответствующим образом модифицированы. Парциальные условия излучения (3) записываются в некотором базисе $\{Y_n(x, y)\}$, в данном случае состоящем из собственных функций сечения волновода:

$$Y_n(x, y) \equiv Y_{n(k,l)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{\pi kx}{c} \cdot \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi ly}{b}, \quad k, l = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Функции $Y_n(x, y)$ являются решениями задачи на собственные значения для оператора Лапласа в прямоугольной области, на границе которой поставлены однородные граничные условия Дирихле. Далее везде будет использоваться единственный индекс n вместо пары индексов (k, l) . Перенумерация производится в порядке возрастания собственных значений $\mu_n \equiv \mu_{n(k,l)} = \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{b}\right)^2$, $k, l = 1, 2, \dots$

Уравнения (1)–(3) составляют полную математическую постановку задачи о распределении волнового поля в неоднородности D .

3. Гибридные методы численного решения задачи дифракции волны на локальной многослойной вставке в волноводе. Для получения численного решения поставленной задачи дифракции волны на локальной многослойной вставке в волноводе предлагается комплекс гибридных методов, основанных на комбинации неполного метода Галеркина, метода конечных разностей и метода матриц переноса. Ниже в данном разделе приведено описание двух таких методов. При этом на первом этапе в обоих случаях применяется неполный метод Галеркина, посредством которого исходная задача для уравнения в частных производных (а именно уравнения Гельмгольца) сводится к задаче для обыкновенного матрично-векторного дифференциального уравнения. На втором этапе для решения полученной задачи

в первом варианте гибридного метода применяется метод конечных разностей, а во втором варианте — метод матриц переноса.

3.1. Неполный метод Галеркина в задаче дифракции волны на локальной многослойной вставке в волноводе. Согласно основной идее неполного метода Галеркина, приближенное решение $u^{(N)}$ задачи (1)–(3) ищется в виде конечного разложения по первым N собственным функциям сечения из системы (4) с коэффициентами, зависящими от продольной координаты z :

$$u^{(N)}(x, y, z) = \sum_{n=1}^N Z_n(z) Y_n(x, y). \tag{5}$$

Для удобства далее будут всюду использоваться матрично-векторные обозначения. В матрично-векторной форме выражение (5) может быть переписано в виде

$$u^{(N)}(x, y, z) = \Phi(x, y) \mathbf{Z}(z), \tag{6}$$

где $\Phi(x, y) = (Y_1(x, y), Y_2(x, y), \dots, Y_N(x, y))$ — вектор-строка, состоящий из первых N собственных функций, и $\mathbf{Z}(z) = (Z_1(z), Z_2(z), \dots, Z_N(z))^T$ — вектор-столбец коэффициентов разложения. Подставляя решение в форме (6) в уравнение Гельмгольца (1) и проводя интегрирование по сечению, получаем следующее уравнение для вектора коэффициентов $\mathbf{Z}(z)$:

$$\mathbf{Z}''(z) + \left(k_0^2 \iint_S \Phi^T(x, y) \varepsilon(x, y, z) \Phi(x, y) dx dy - M^2 \right) \mathbf{Z}(z) = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Уравнение (7) является матрично-векторным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Здесь M^2 — диагональная матрица, содержащая на главной диагонали собственные значения

сечения: $M^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_N \end{pmatrix}$.

Уравнение (7) для вектора $\mathbf{Z}(z)$ необходимо дополнить граничными условиями, непосредственно следующими из парциальных условий излучения (3) и условий сопряжения на границах раздела между вставкой и регулярными частями волновода. Условия сопряжения математически выражаются условиями непрерывности, накладываемыми на волновое поле u и его первую производную по продольной координате z . Поле в регулярных частях волновода может быть представлено в виде суперпозиции собственных волн, заданных разложением по собственным функциям сечения:

$$\begin{aligned} u_1^{(N)}(x, y, z) &= \Phi(x, y) E^{(1)} e^{j\Gamma^{(1)}z} \mathbf{A}_1 + \Phi(x, y) E^{(1)} e^{-j\Gamma^{(1)}z} \mathbf{B}_1; \\ u_2^{(N)}(x, y, z) &= \Phi(x, y) E^{(2)} e^{j\Gamma^{(2)}(z-a)} \mathbf{A}_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $E^{(1,2)}$ — матрицы собственных векторов мод левой и правой частей соответственно (см. также раздел 2); \mathbf{A}_1 — заданный вектор падающей волны, содержащий амплитудные коэффициенты собственных волн левой части волновода; \mathbf{B}_1 — амплитудный вектор отраженной волны; \mathbf{A}_2 — амплитудный вектор волны, прошедшей через вставку; $\Gamma^{(1,2)}$ — диагональные матрицы, содержащие постоянные распростра-

нения для левой и правой регулярных частей волновода: $\Gamma^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1,2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2^{(1,2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_N^{(1,2)} \end{pmatrix}$.

Условия сопряжения задают условия для вектора коэффициентов $\mathbf{Z}(z)$ на границах $z = 0$ и $z = a$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_{(1)}^{-1} \mathbf{Z}'(0) + j\Gamma^{(1)} E_{(1)}^{-1} \mathbf{Z}(0) &= 2j\Gamma^{(1)} \mathbf{A}_1; \\ E_{(2)}^{-1} \mathbf{Z}'(a) - j\Gamma^{(2)} E_{(2)}^{-1} \mathbf{Z}(a) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (7) вместе с граничными условиями (9) составляет полную постановку задачи для вектора коэффициентов $\mathbf{Z}(z)$. В терминах матрично-векторных уравнений задача (7), (9) является краевой задачей для обыкновенного матрично-векторного дифференциального уравнения второго порядка (7) с граничными условиями третьего рода (9). Для решения полученной задачи в классе многослойных вставок с кусочно-постоянным распределением диэлектрической проницаемости в описываемых гибридных методах рассматривается применение метода конечных разностей и обобщенной матричной техники (в частности, метода матриц переноса).

3.2. Метод конечных разностей в задаче дифракции волны на локальной многослойной вставке в волноводе. В первом варианте гибридного метода моделирования волноводов с локальной неоднородной многослойной вставкой для решения полученной после применения неполного метода Галеркина задачи (7), (9) применяется метод конечных разностей.

На первом шаге применения метода конечных разностей необходимо построить разностную схему. Введем на отрезке $[0; a]$ оси z равномерную сетку $H = \{z_l = lh \mid l = 0, 1, \dots, L\}$ с шагом $h = \frac{a}{L}$ и общим числом узлов $L + 1$. Заметим, что здесь L является самостоятельной величиной, которая задается отдельно. Ее значение не зависит от числа N базисных функций в сечении и не связано с тем числом L , которое встречалось ранее до перенумерации базисных функций одним индексом. Далее всюду под L подразумевается число шагов сетки на отрезке $[0; a]$ оси z .

Дискретизацию уравнения (7) будем проводить стандартным образом, заменяя в каждом узле сетки саму неизвестную функцию на ее частное значение в данном узле, а ее вторую производную — на центральную разность второго порядка:

$$\mathbf{Z}''(z_l) \rightarrow \frac{\mathbf{Z}(z_l + h) - 2\mathbf{Z}(z_l) + \mathbf{Z}(z_l - h)}{h^2}. \quad (10)$$

Для рассматриваемого класса многослойных вставок с кусочно-постоянным распределением диэлектрической проницаемости коэффициенты уравнения (7) тоже являются кусочно-постоянными (а значит, и кусочно-непрерывными). В каждом узле сетки, где матричный элемент

$$K(z) = \iint_S \Phi^T(x, y) \varepsilon(x, y, z) \Phi(x, y) dx dy$$

непрерывен, он может быть заменен на свое частное значение в этом узле (назовем такой узел регулярным). Таким образом, в регулярном узле с номером l разностное уравнение запишется в виде

$$\frac{\mathbf{Z}(z_l + h) - 2\mathbf{Z}(z_l) + \mathbf{Z}(z_l - h)}{h^2} - M^2 \mathbf{Z}(z_l) + k_0^2 K(z_l) \mathbf{Z}(z_l) = \mathbf{0}, \quad (11)$$

где $l = 2, \dots, L - 1$. Разностное уравнение (11) является трехточечным.

Обозначив $\mathbf{Z}(z_l) = \mathbf{Z}^{(l)}$, $\mathbf{Z}(z_l \pm h) = \mathbf{Z}^{(l \pm 1)}$ и $K(z_l) = K^{(l)}$, запишем уравнение (11) в матрично-векторной форме

$$A^{(l)} \mathbf{Z}^{(l-1)} + B^{(l)} \mathbf{Z}^{(l)} + C^{(l)} \mathbf{Z}^{(l+1)} = \mathbf{0} \quad (12)$$

с матричными коэффициентами $A^{(l)} = I$, $B^{(l)} = -2I - h^2 M^2 + h^2 k_0^2 K^{(l)}$, $C^{(l)} = I$, где I — единичная матрица.

Следует отметить, что разностное уравнение (11) обеспечивает аппроксимацию уравнения (7) лишь в регулярных узлах сетки. На границах раздела диэлектрических слоев внутри вставки матричный элемент $K(z)$ претерпевает разрыв, соответственно уравнение (11) перестает быть справедливым. Кроме того, в точках разрыва коэффициентов уравнения (7) теряет смысл разностная аппроксимация (10). Данная проблема может быть решена путем последовательного применения двух следующих соображений [12]. Во-первых, в каждую точку разрыва коэффициентов уравнения (7) необходимо поместить узел сетки. Во-вторых, разностную аппроксимацию уравнения (7) в этих узлах следует заменить условиями сопряжения, т.е. условиями непрерывности решения и его первой производной (физически это требование означает непрерывность волнового поля u и потока энергии через границу диэлектрических слоев вставки). Как и в случае с условиями сопряжения на границах вставки (см. предыдущий раздел), требование непрерывности поля u и его первой производной эквивалентно требованию непрерывности вектора коэффициентов $\mathbf{Z}(z)$ и его первой производной (непрерывность понимается в смысле непрерывности вектор-функции, т.е. непрерывности каждой компоненты вектора как функции переменной z).

Получим аналог разностного уравнения в нерегулярном узле с номером l . Требование непрерывности вектора $\mathbf{Z}(z)$ и его первой производной означает равенство правого и левого предельных значений вектора $\mathbf{Z}(z)$ и его первой производной в узле l :

$$\mathbf{Z}_+^{(l)} = \mathbf{Z}_-^{(l)} = \mathbf{Z}^{(l)}, \quad \mathbf{Z}'_+^{(l)} = \mathbf{Z}'_-^{(l)}. \quad (13)$$

Чтобы воспользоваться условиями (13), представим коэффициенты поля в узлах, соседних с нерегулярным узлом l , в виде

$$\mathbf{Z}^{(l+1)} = \mathbf{Z}^{(l)} + h\mathbf{Z}'_+^{(l)} + \frac{h^2}{2}\mathbf{Z}''_+^{(l)} + o(h^2), \quad (14)$$

$$\mathbf{Z}^{(l-1)} = \mathbf{Z}^{(l)} - h\mathbf{Z}'_-^{(l)} + \frac{h^2}{2}\mathbf{Z}''_-^{(l)} + o(h^2). \quad (15)$$

Для представления вторых производных $\mathbf{Z}''_{\pm}^{(l)}$ воспользуемся основным уравнением (7) и его аппроксимацией (11). Тогда

$$\mathbf{Z}''_{\pm}^{(l)} = M^2\mathbf{Z}^{(l)} - k_0^2 K_{\pm}^{(l)}\mathbf{Z}^{(l)}. \quad (16)$$

Сложим выражения (14) и (15), учитывая условия непрерывности (13) и выражение (16). Отбросив члены выше второго порядка малости, получим

$$\mathbf{Z}^{(l+1)} - 2\mathbf{Z}^{(l)} - \frac{h^2}{2}\left(2M^2 - k_0^2 K_+^{(l)} - k_0^2 K_-^{(l)}\right)\mathbf{Z}^{(l)} + \mathbf{Z}^{(l-1)} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет вид (12), в котором матричные коэффициенты задаются следующими выражениями:

$$A^{(l)} = I, \quad B^{(l)} = -2I - h^2 M^2 + \frac{h^2}{2} k_0^2 \left(K_+^{(l)} + K_-^{(l)}\right), \quad C^{(l)} = I. \quad (18)$$

Разностное уравнение в форме (12) с матричными коэффициентами (18) является следствием применения условий сопряжения и справедливо в каждом внутреннем узле сетки, в котором матричный элемент $K(z)$ не является непрерывным.

Для полной формулировки разностной задачи необходимо построить разностные аналоги граничных условий (9). Рассмотрим сначала левую границу вставки $z = 0$. Представим значение вектора $\mathbf{Z}(z)$ в приграничном узле с номером $l = 1$ в виде разложения, аналогичного (14):

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{Z}^{(0)} + h\mathbf{Z}'^{(0)} + \frac{h^2}{2}\mathbf{Z}''^{(0)} + o(h^2), \quad (19)$$

где $\mathbf{Z}''^{(0)}$ — вторая производная вектора $\mathbf{Z}(z)$ в левом граничном узле ($z = 0$). Отбросив члены выше второго порядка малости, выразим из (19) производную $\mathbf{Z}'^{(0)}$:

$$\mathbf{Z}'^{(0)} = \frac{\mathbf{Z}^{(1)} - \mathbf{Z}^{(0)}}{h} - \frac{h}{2}\mathbf{Z}''^{(0)}.$$

Выразив в граничном узле $z = 0$ вторую производную $\mathbf{Z}''^{(0)}$ из основного уравнения (7), получим окончательно для первой производной следующее выражение:

$$\mathbf{Z}'^{(0)} = \frac{\mathbf{Z}^{(1)}}{h} - \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{2}(M^2 - k_0^2 K(0))\right)\mathbf{Z}^{(0)}. \quad (20)$$

Подставив выражение (20) в граничные условия (9), получим

$$E_{(1)}^{-1} \frac{\mathbf{Z}^{(1)}}{h} - E_{(1)}^{-1} \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{2}(M^2 - k_0^2 K(0))\right)\mathbf{Z}^{(0)} + j\Gamma^{(1)} E_{(1)}^{-1} \mathbf{Z}^{(0)} = 2j\Gamma^{(1)} \mathbf{A}_1. \quad (21)$$

При $l = 0$ уравнение (21) имеет вид, аналогичный (12), с отличной от нуля правой частью:

$$A^{(l)}\mathbf{Z}^{(l-1)} + B^{(l)}\mathbf{Z}^{(l)} + C^{(l)}\mathbf{Z}^{(l+1)} = -\mathbf{F}^{(l)}, \quad (22)$$

где матричные коэффициенты задаются выражениями

$$A^{(0)} = 0, \quad B^{(0)} = E_{(1)}^{-1} - jh\Gamma^{(1)}E_{(1)}^{-1} + \frac{h^2}{2} E_{(1)}^{-1}(M^2 - k_0^2 K(0)), \quad C^{(0)} = -E_{(1)}^{-1},$$

а правая часть имеет вид $\mathbf{F}^{(0)} = 2jh\Gamma^{(1)}\mathbf{A}_1$.

Проводя аналогичные действия, получим разностный аналог правого граничного условия (9) в форме (22) при $l = L$, матричные коэффициенты в котором имеют вид

$$A^{(L)} = E_{(2)}^{-1}, \quad B^{(L)} = -E_{(2)}^{-1} + jh\Gamma^{(2)}E_{(2)}^{-1} - \frac{h^2}{2} E_{(2)}^{-1}(M^2 - k_0^2 K(a)), \quad C^{(L)} = 0,$$

а правая часть $\mathbf{F}^{(L)} = \mathbf{0}$.

Представим в заключение полную постановку разностной задачи. Разностная схема описывается одним общим матрично-векторным уравнением

$$A^{(l)}\mathbf{Z}^{(l-1)} + B^{(l)}\mathbf{Z}^{(l)} + C^{(l)}\mathbf{Z}^{(l+1)} = -\mathbf{F}^{(l)}, \quad (23)$$

значения коэффициентов и правой части которого меняются в зависимости от номера узла сетки l : в граничном узле сетки с номером $l = 0$

$$A^{(0)} = 0, \quad B^{(0)} = E_{(1)}^{-1} - jh\Gamma^{(1)}E_{(1)}^{-1} + \frac{h^2}{2} E_{(1)}^{-1}(M^2 - k_0^2 K(0)), \quad C^{(0)} = -E_{(1)}^{-1}, \quad \mathbf{F}^{(0)} = 2jh\Gamma^{(1)}\mathbf{A}_1; \quad (24)$$

в регулярном внутреннем узле l сетки

$$A^{(l)} = I, \quad B^{(l)} = -2I - h^2 M^2 + h^2 k_0^2 K^{(l)}, \quad C^{(l)} = I, \quad \mathbf{F}^{(l)} = \mathbf{0}; \quad (25)$$

в нерегулярном внутреннем узле l сетки

$$A^{(l)} = I, \quad B^{(l)} = -2I - h^2 M^2 + \frac{h^2}{2} k_0^2 (K_+^{(l)} + K_-^{(l)}), \quad C^{(l)} = I, \quad \mathbf{F}^{(l)} = \mathbf{0}; \quad (26)$$

в граничном узле сетки с номером $l = L$

$$A^{(L)} = E_{(2)}^{-1}, \quad B^{(L)} = -E_{(2)}^{-1} + jh\Gamma^{(2)}E_{(2)}^{-1} - \frac{h^2}{2} E_{(2)}^{-1}(M^2 - k_0^2 K(a)), \quad C^{(L)} = 0, \quad \mathbf{F}^{(L)} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

Отметим, что построенная разностная схема обеспечивает второй порядок аппроксимации как исходного уравнения (7) в регулярных узлах сетки, так и условий сопряжения в нерегулярных узлах, а также граничных условий (9).

Решение разностной задачи (23) с соответствующими значениями коэффициентов $A^{(l)}$, $B^{(l)}$ и $C^{(l)}$ (24)–(27) осуществляется методом матричной прогонки. Приведем основные идеи и формулы этого метода, следуя описанию обычного метода прогонки в [12] и проводя обобщения для случая матрично-векторной разностной схемы.

Рассмотрим разностную схему, заданную в каноническом виде

$$\begin{cases} A^{(l)}\mathbf{Z}^{(l-1)} + B^{(l)}\mathbf{Z}^{(l)} + C^{(l)}\mathbf{Z}^{(l+1)} = -\mathbf{F}^{(l)}, & 1 \leq l \leq L; \\ B^{(0)}\mathbf{Z}^{(0)} + C^{(0)}\mathbf{Z}^{(1)} = -\mathbf{F}^{(0)}; \\ A^{(L)}\mathbf{Z}^{(L-1)} + B^{(L)}\mathbf{Z}^{(L)} = -\mathbf{F}^{(L)}. \end{cases} \quad (28)$$

Поставленная выше разностная задача (23) полностью соответствует уравнениям (28). Будем искать решение (28) в виде

$$\mathbf{Z}^{(l)} = \alpha_{l+1}\mathbf{Z}^{(l+1)} + \beta_{l+1}, \quad l = L-1, L-2, \dots, 0, \quad (29)$$

где α_l — некоторая матрица, а β_l — некоторый вектор. Согласно (29), вектор $\mathbf{Z}^{(l)}$ в данном узле сетки с номером l выражается через значение вектора $\mathbf{Z}^{(l+1)}$ в последующем узле сетки. Формулы (29) называются формулами обратного хода. Уменьшим в (29) индекс на единицу и подставим в первое уравнение в (28):

$$A^{(l)}(\alpha_l\mathbf{Z}^{(l)} + \beta_l) + B^{(l)}\mathbf{Z}^{(l)} + C^{(l)}\mathbf{Z}^{(l+1)} = -\mathbf{F}^{(l)}.$$

Выразив отсюда $\mathbf{Z}^{(l)}$ через $\mathbf{Z}^{(l+1)}$, получим

$$\mathbf{Z}^{(l)} = - \left(A^{(l)} \alpha_l + B^{(l)} \right)^{-1} C^{(l)} \mathbf{Z}^{(l+1)} - \left(A^{(l)} \alpha_l + B^{(l)} \right)^{-1} \left(A^{(l)} \beta_l + \mathbf{F}^{(l)} \right). \quad (30)$$

Чтобы выражение (30) совпало с (29), необходимо положить

$$\alpha_{l+1} = - \left(A^{(l)} \alpha_l + B^{(l)} \right)^{-1} C^{(l)}, \quad \beta_{l+1} = - \left(A^{(l)} \alpha_l + B^{(l)} \right)^{-1} \left(A^{(l)} \beta_l + \mathbf{F}^{(l)} \right). \quad (31)$$

Формулы (31) называются формулами прямого хода. Таким образом, решение разностной схемы (28) сводится к последовательному применению формул прямого хода (31) для расчета всех коэффициентов α_l и β_l , а затем формул обратного хода (29) для расчета векторов $\mathbf{Z}^{(l)}$ в каждом узле сетки. Отдельно рассмотрим применение формул прямого и обратного хода в граничных узлах сетки. Получим сначала выражения для левого граничного узла $l = 0$. Согласно (28) и (29), в левом граничном узле решаемая система уравнений имеет вид

$$\mathbf{Z}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{Z}^{(1)} + \beta_1; \quad B^{(0)} \mathbf{Z}^{(0)} + C^{(0)} \mathbf{Z}^{(1)} = -\mathbf{F}^{(0)}. \quad (32)$$

Из (32) следуют выражения для коэффициентов α_1 и β_1 в левом граничном узле:

$$\alpha_1 = - \left(B^{(0)} \right)^{-1} C^{(0)}, \quad \beta_1 = - \left(B^{(0)} \right)^{-1} \mathbf{F}^{(0)}. \quad (33)$$

Выражения (33) представляют собой первый шаг прямого хода.

Рассмотрим теперь правый граничный узел $l = L$. В правом граничном узле имеют место выражения

$$\mathbf{Z}^{(L-1)} = \alpha_L \mathbf{Z}^{(L)} + \beta_L; \quad A^{(L)} \mathbf{Z}^{(L-1)} + B^{(L)} \mathbf{Z}^{(L)} = -\mathbf{F}^{(L)}. \quad (34)$$

Коэффициенты α_L, β_L рассчитываются на L -м шаге прямого хода и являются известными. Из (34) выразим $\mathbf{Z}^{(L)}$:

$$\mathbf{Z}^{(L)} = - \left(A^{(L)} \alpha_L + B^{(L)} \right)^{-1} \left(A^{(L)} \beta_L + \mathbf{F}^{(L)} \right). \quad (35)$$

Выражение (35) представляет собой первый шаг обратного хода. Таким образом, алгоритм решения разностной задачи (28) представлен полностью.

3.3. Метод матриц переноса в задаче дифракции волны на локальной многослойной вставке в волноводе. В данном разделе на основании общих идей метода матриц переноса, представленных в [10] для простейшего случая матриц 2×2 и в [13] для случая матриц 4×4 , изложен обобщенный метод матриц переноса для решения задачи (7), (9). Таким образом, метод матриц переноса обобщен для совместного использования с неполным методом Галеркина для решения задачи дифракции волны в волноводе с локальной неоднородностью.

Для рассматриваемого класса многослойных вставок с кусочно-постоянным распределением диэлектрической проницаемости коэффициенты уравнения (7) тоже являются кусочно-постоянными. Таким образом, для решения уравнения (7) возможно применение метода матриц переноса, который традиционно используется для моделирования распространения волн в слоистых средах. Однако в данном случае необходимо обобщение простейших вариантов метода на случай квадратных матриц, вообще говоря, произвольного размера. Решая уравнение (7) с постоянными коэффициентами в каждом слое вставки и учитывая условия сопряжения на границах раздела слоев, а также граничные условия (9), получим требуемое решение уравнения (7) во всей вставке. Следует отметить, что каждый слой вставки сам по себе может быть неоднородным в поперечном сечении, однако интегрирование по сечению волновода при использовании неполного метода Галеркина позволяет учесть это.

Существуют два основных подхода к реализации метода матриц переноса. Поскольку уравнение (7) является в каждом слое вставки уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, его решение может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях — положительном и отрицательном направлениях оси z . В рамках данного подхода вводятся амплитудные вектора этих волн, и в конечном итоге их значения на левой и правой границах вставки связываются с помощью матрицы переноса, построенной для всей вставки в целом с учетом свойств всех ее слоев. В то же время возможен и другой подход, в котором рассматриваются только полное значение волнового поля u и его производная по координате z и не проводится разложения поля на отдельные составляющие. Второй подход представляется более удобным и эффективным, поскольку

для расчетов требуется меньшее количество операций перемножения матриц для получения конечного результата. Другим преимуществом подхода, в котором рассматривается полное поле, является способность хорошо описывать металлodieлектрические структуры, в которых отлична от нуля мнимая часть диэлектрической проницаемости.

В данной работе используется вариант метода матриц переноса для полного поля и его производной. Для реализации такого подхода необходимо свести уравнение второго порядка (7) к системе уравнений первого порядка. Вводя векторы $\mathbf{U}(z) = \mathbf{Z}(z)$ и $\mathbf{V}(z) = -j\mathbf{Z}'(z)$, получим обобщенное матрично-векторное уравнение первого порядка:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{V}(z) \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{V}(z) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где $K(z) = k_0^2 \iint_S \Phi^T(x, y) \varepsilon(x, y, z) \Phi(x, y) dx dy - M^2$ и I — единичная матрица размерности $N \times N$.

Предположим, что коэффициенты уравнения (7) (а следовательно, и коэффициенты в (36)) являются постоянными в слое толщиной h . Матрица переноса слоя P_h , связывающая векторы $(\mathbf{U}(z); \mathbf{V}(z))^T$ на границах слоя, вводится следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}(h) \\ \mathbf{V}(h) \end{pmatrix} = P_h \begin{pmatrix} \mathbf{U}(0) \\ \mathbf{V}(0) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Выражение для матрицы слоя P_h может быть получено непосредственным интегрированием уравнения первого порядка (36) внутри слоя толщины h . Это выражение, с учетом (37), представляется в форме

матричной экспоненты: $P_h = \exp \left(j \begin{pmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{pmatrix} h \right)$. Для численных расчетов более удобным является

представление матричной экспоненты в виде $P_h = \Psi K(h) \Psi^{-1}$, где $K(h)$ — диагональная матрица с элементами $K_{ii}(h) = e^{jq_i h}$. Здесь q_i — собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{pmatrix}$, Ψ — матрица, состоящая из собственных векторов Ψ_i , соответствующих собственным значениям q_i . Для всей вставки в целом, разделенной на конечное число M слоев с толщинами h_1, h_2, \dots, h_M , матрица переноса P получается путем перемножения матриц переноса для каждого из слоев: $P = \prod_{m=1}^M P_{h_m}$. Матрица переноса P связывает значения

вектора $(\mathbf{U}(z); \mathbf{V}(z))^T$ на границах вставки $z = 0$ и $z = a$. Полагая матрицу переноса вставки P известной, получаем систему линейных алгебраических матричных уравнений для векторов $\mathbf{U}(z)$ и $\mathbf{V}(z)$ на границах вставки:

$$E_{(1)}^{-1} \mathbf{V}(0) + \Gamma^{(1)} E_{(1)}^{-1} \mathbf{U}(0) = 2\Gamma^{(1)} \mathbf{A}_1; \quad E_{(2)}^{-1} \mathbf{V}(a) - \Gamma^{(2)} E_{(2)}^{-1} \mathbf{U}(a) = \mathbf{0}; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{U}(a) \\ \mathbf{V}(a) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \mathbf{U}(0) \\ \mathbf{V}(0) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Первые два уравнения в (38) представляют собой граничные условия (9) для $\mathbf{Z}(z)$, записанные для векторов $\mathbf{U}(z) = \mathbf{Z}(z)$ и $\mathbf{V}(z) = -j\mathbf{Z}'(z)$. Третье уравнение в (38) задает связь значений вектора $(\mathbf{U}(z); \mathbf{V}(z))^T$ с помощью матрицы переноса. Решение системы (38) может быть получено аналитически.

3.4. Коэффициенты прохождения и отражения волны при дифракции на локальной многослойной вставке в волноводе. В предыдущих двух разделах был описан предлагаемый гибридный метод получения численного решения задачи (1)–(3). С физической точки зрения решением этой задачи является волновое поле u внутри вставки в волноводе. Ниже приведены выражения для энергетических коэффициентов прохождения и отражения в предположении, что распределение поля u во вставке является известным.

Поток энергии в волноводе дается выражением

$$W(z) = \iint_S u^*(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) dx dy. \quad (39)$$

Для определения коэффициентов прохождения и отражения требуется рассчитать потоки энергии W_{left} и W_{right} на границах вставки с регулярными частями волновода. Поле на правой границе вставки определяется только полем волны, прошедшей через вставку. Поле на левой границе составляется из поля

падающей волны и волны, отраженной от вставки. Подставляя поле в виде (8) в выражение (39), получим

$$W_{\text{left}} = \text{Re} \left[\mathbf{A}_1^H \Gamma^{(1)} \mathbf{A}_1 \right] - \text{Re} \left[\mathbf{B}_1^H \Gamma^{(1)} \mathbf{B}_1 \right]; \quad W_{\text{right}} = \text{Re} \left[\mathbf{A}_2^H \Gamma^{(2)} \mathbf{A}_2 \right]. \quad (40)$$

Из (40) получаются выражения для коэффициентов прохождения и отражения:

$$T = \frac{W_{\text{tr}}}{W_{\text{inc}}} = \frac{\text{Re} \left[\mathbf{A}_2^H \Gamma^{(2)} \mathbf{A}_2 \right]}{\text{Re} \left[\mathbf{A}_1^H \Gamma^{(1)} \mathbf{A}_1 \right]}; \quad R = \frac{W_{\text{refl}}}{W_{\text{inc}}} = \frac{\text{Re} \left[\mathbf{B}_1^H \Gamma^{(1)} \mathbf{B}_1 \right]}{\text{Re} \left[\mathbf{A}_1^H \Gamma^{(1)} \mathbf{A}_1 \right]}, \quad (41)$$

где W_{inc} , W_{tr} и W_{refl} — падающий, прошедший через вставку и отраженный потоки соответственно. Из граничных условий для вектора \mathbf{Z} следуют выражения для векторов \mathbf{B}_1 и \mathbf{A}_2 :

$$\mathbf{B}_1 = E_{(1)}^{-1} \mathbf{Z}(0) - \mathbf{A}_1; \quad \mathbf{A}_2 = E_{(2)}^{-1} \mathbf{Z}(a). \quad (42)$$

Из выражений (41) и (42) с учетом замены $\mathbf{U}(z) = \mathbf{Z}(z)$ получаем выражения для коэффициентов прохождения и отражения, записанные через вектор $\mathbf{U}(z)$:

$$T = \frac{\text{Re} \left[\left(E_{(2)}^{-1} \mathbf{U}(a) \right)^H \Gamma^{(2)} E_{(2)}^{-1} \mathbf{U}(a) \right]}{\text{Re} \left[\mathbf{A}_1^H \Gamma^{(1)} \mathbf{A}_1 \right]}; \quad R = \frac{\text{Re} \left[\left(E_{(1)}^{-1} \mathbf{U}(0) - \mathbf{A}_1 \right)^H \Gamma^{(1)} \left(E_{(1)}^{-1} \mathbf{U}(0) - \mathbf{A}_1 \right) \right]}{\text{Re} \left[\mathbf{A}_1^H \Gamma^{(1)} \mathbf{A}_1 \right]}. \quad (43)$$

4. Сравнительный анализ предлагаемых гибридных методов решения задачи дифракции волны на локальной многослойной вставке в волноводе. Для реализации двух описанных выше гибридных методов решения задачи дифракции волны на локальной многослойной вставке в волноводе был разработан комплекс программ на базе системы MATLAB. Оба метода были протестированы как на простых задачах с известным аналитическим решением (однородная пробка с постоянной диэлектрической проницаемостью, помещенная в волновод, одномерные периодические и квазипериодические вставки), так и на вставках с достаточно сложным строением, в частности двумерных и трехмерных периодических вставках, а также двумерных и трехмерных фрактальных вставках, построенных на основе ковры Серпинского и губки Менгера [14, 15]. Для краткости предложенный метод, основанный на совместном применении неполного метода Галеркина и конечно-разностного метода, будем ниже называть первым, а метод, основанный на совместном применении неполного метода Галеркина и метода матриц переноса, — вторым.

Следует отметить, что поскольку в каждом из двух предложенных гибридных методов на первом этапе применяется неполный метод Галеркина, их различия обусловлены методами, применяемыми на втором этапе. Напомним, что применение неполного метода Галеркина сводит исходную задачу к одномерному матрично-векторному дифференциальному уравнению, дополненному соответствующими граничными условиями. Во всех случаях сравнение предложенных методов осуществлялось при условии, что на первом этапе выбирается одинаковое количество базисных функций в сечении волновода.

В случае простых одномерных вставок оба предложенных метода оказались достаточно надежными и эффективными. При использовании первого метода оказалось достаточно выбрать грубую сетку (порядка 10 узлов на каждый слой вставки) для получения удовлетворительной точности (1–3%). Время вычислений в этом случае для обоих методов тоже различалось несущественно, хотя и было несколько большим для конечно-разностного метода. Отметим, что апостериорная оценка точности показывает, что построенная разностная схема действительно имеет второй порядок точности. В случае сложных вставок применение конечно-разностного метода потребовало использования существенно более подробной сетки (порядка 30–50 узлов на каждый слой вставки), что существенно снизило быстродействие и увеличило затраты как памяти, так и времени. В то же время метод матриц переноса оказался не столь чувствителен к изменению структуры слоев вставки. В частности, например, для вставки типа губки Менгера 3 порядка итерации [15] время расчета спектра в одинаковом диапазоне длин волн при одинаковой точности вычислений в случае применения метода матриц рассеяния сокращается более чем в 10 раз, по сравнению с конечно-разностным методом. Тем не менее, следует отметить, что для всех типов рассмотренных вставок результаты, полученные обоими предложенными методами, хорошо согласуются как друг с другом, так и с известными результатами других теоретических и экспериментальных исследований.

5. Заключение. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что в целом оба предложенных гибридных метода могут быть использованы для моделирования волноводов, содержащих локальные неоднородные вставки с многослойным строением, однако эффективность этих методов существенно

отличается. Применение метода матриц переноса позволяет существенно повысить скорость вычислений благодаря учету особенностей строения вставки (а именно того факта, что она представляет собой многослойную структуру). Таким образом, применение в обобщенном виде матричной техники, являющейся стандартной при расчете характеристик многослойных покрытий из однородных слоев, следует считать в данном случае более предпочтительным по сравнению с более общим методом конечных разностей, не учитывающим особенности строения вставки. Следует отметить, что предложенный гибридный метод, основанный на совместном применении неполного метода Галеркина и метода матриц переноса (или альтернативной матричной техники), достаточно универсален и с незначительными изменениями (выбор других базисных функций в разложении Галеркина) может быть распространен на произвольные многослойные дифракционные структуры [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А.Г. Математическое моделирование волноведущих систем на основе метода конечных разностей // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 5. 39–54.
2. Wik M., Dumas D., Yevick D. Comparison of vector finite-difference techniques for modal analysis // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. **22**, N 7. 1341–1347.
3. Свешников А.Г. Принцип излучения // Докл. АН СССР. 1950. **3**, № 5. 511–520.
4. Боголюбов А.Н., Лавренова А.В. Математическое моделирование дифракции на неоднородности в волноводе с использованием метода смешанных конечных элементов // Математическое моделирование. 2008. **20**, № 2. 122–128.
5. Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина // Докл. АН СССР. 1977. **236**, № 5. 1076–1079.
6. Быков А.А., Свешников А.Г., Трубецков М.К. Применение неполного метода Галеркина для расчета собственных волн открытых волноводов // Математическое моделирование. 1991. **3**, № 7. 111–123.
7. Marcuse D. Solution of the vector wave equation for general dielectric waveguides by the Galerkin method // IEEE J. of Quantum Electronics. 1992. **28**, N 2. 459–465.
8. Быков А.А., Ильинский А.С. Решение краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом направленной ортогонализации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. **19**, № 3. 631–639.
9. Быков А.А. Устойчивость метода направленной ортогонализации по отношению к ошибкам округления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1981. **21**, № 5. 1154–1167.
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
11. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
13. Verreman D.W. Optics in stratified and anisotropic media: 4×4 -matrix formulation // J. Opt. Soc. Am. 1972. **62**, N 4. 502–510.
14. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.
15. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. Математическое моделирование волноводов, содержащих локальные вставки с фрактальной структурой // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2011. № 2. 20–23.
16. Петухов А.А. Совместное применение неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния для моделирования многослойных дифракционных решеток // Математическое моделирование. 2013. **25**, № 6. 41–53.

Поступила в редакцию
28.06.2016

Hybrid Methods for Modeling Waveguides Containing Local Inhomogeneous Insets of Multilayer Structure

A. A. Petukhov¹, A. N. Bogolyubov², and M. K. Trubetskov³

¹ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Leading Programmer, e-mail: petukhov@physics.msu.ru

² Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: bogan7@yandex.ru

³ *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: trub@srcc.msu.ru*

Received June 28, 2016

Abstract: A mathematical model of wave diffraction on a local inhomogeneous multilayer inset placed inside a rectangular waveguide is considered. An algorithm for the numerical solution of the corresponding diffraction problem based on the application of hybrid numerical and numerical-analytical methods is described. In particular, the hybrid methods based on the joint application of the incomplete Galerkin's method together with the finite difference method and the transfer matrix method are discussed. A comparative analysis of the described methods is given, including an efficiency analysis of these methods in application to modeling the wave diffraction on a multilayer inhomogeneous inset in a waveguide.

Keywords: irregular waveguide, multilayer inset, hybrid numerical methods, incomplete Galerkin's method, finite difference method, transfer matrix method.

References

1. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. V. Krasil'nikova, et al., "Mathematical Modeling of Waveguides Using the Finite-Difference Method," *Usp. Sovremen. Radioelektron.*, № 5, 39–54 (1998).
2. M. Wik, D. Dumas, and D. Yevick, "Comparison of Vector Finite-Difference Techniques for Modal Analysis," *J. Opt. Soc. Am. A* **22** (7), 1341–1347 (2005).
3. A. G. Sveshnikov, "The Principle of Radiation," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **3** (5), 511–520 (1950).
4. A. N. Bogolyubov and A. V. Lavrenova, "Mathematical Modeling of the Diffraction on the Heterogeneity in the Waveguide with the Application of the Hybrid Finite Elements," *Mat. Model.* **20** (2), 122–128 (2008) [*Math. Models Comput. Simul.* **1** (1), 131–137 (2009)].
5. A. G. Sveshnikov, "Incomplete Galerkin Method," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **236** (5), 1076–1079 (1977).
6. A. A. Bykov, A. G. Sveshnikov, and M. K. Trubetskov, "Reduced Galerkin's Method Application to Calculations of Eigenwaves in Open Waveguides," *Mat. Model.* **3** (7), 111–123 (1991).
7. D. Marcuse, "Solution of the Vector Wave Equation for General Dielectric Waveguides by the Galerkin Method," *IEEE J. Quantum Electron.* **28** (2), 459–465 (1992).
8. A. A. Bykov and A. S. Il'inskii, "Solution of Boundary Value Problems for Linear Systems of Ordinary Differential Equations by the Method of Directed Orthogonalization," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **19** (3), 631–639 (1979) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **19** (3), 74–82 (1979)].
9. A. A. Bykov, "Stability to Rounding Errors of Directed Orthogonalization," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **21** (5), 1154–1167 (1981) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **21** (5), 80–94 (1981)].
10. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon, London, 1970; Nauka, Moscow, 1973).
11. A. S. Il'inskii, V. V. Kravtsov, and A. G. Sveshnikov, *Mathematical Models of Electrodynamics* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1991) [in Russian].
12. N. N. Kalitkin, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
13. D. W. Berreman, "Optics in Stratified and Anisotropic media: 4 × 4-Matrix Formulation," *J. Opt. Soc. Am.* **62** (4), 502–510 (1972).
14. M. R. Schroeder, *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise* (Freeman, New York, 1991; Inst. Komp'yut. Issled., Izhevsk, 2005).
15. A. N. Bogolyubov, A. A. Petukhov, and N. E. Shapkina, "Mathematical Modeling of Waveguides with Fractal Insets," *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 3: Fiz.*, No. 2, 20–23 (2011) [*Moscow Univ. Phys. Bull.* **66** (2), 122–125 (2011)].
16. A. A. Petukhov, "Joint Application of the Incomplete Galerkin Method and Scattering Matrix Method for Modeling Multilayer Diffraction Gratings," *Mat. Model.* **25** (6), 41–53 (2013) [*Math. Models Comput. Simul.* **6** (1), 92–100 (2014)].