УДК 517.958 doi 10.26089/NumMet.v17r326

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. Л. Гольдман[1]

На основе принципа двойственности исследованы свойства решений задач управления и обратных задач для одномерных параболических уравнений. Такой подход позволяет обобщить для линейных параболических операторов с коэффициентами, зависящими от (x,t), известный результат Лионса о плотности усредненных наблюдений в задачах управления с управляющим воздействием в начальном условии. Показано, что значение этих свойств плотности не ограничивается задачами управления. Рассмотрено использование таких свойств при изучении обратных параболических задач, в том числе при исследовании условий единственности их решения.

Ключевые слова: параболические уравнения, задачи управления, принцип двойственности, плотность множества, управляемость, обратные задачи, сопряженные задачи, финальное переопределение, единственность.

1. Введение. При изучении многих проблем в теплофизике возникают задачи управления, связанные с выбором начальной температуры, при которой состояние модели приближает заданную конечную температуру в “среднем” на временно́м интервале, содержащем конечный момент времени T. Постановка одной такой задачи для линейного параболического оператора в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q)$ (здесь и далее используются обозначения классов функций из [1]) исследована Ж.-Л. Лионсом в [2].

Пусть состояние системы $u=u(x,t;\xi)$ определяется как решение задачи

$$u'-Au=0, \quad (x,t)\in Q, \quad u\big|_{S\times(0,T]}=0, \quad u(x,0)=\xi(x), \quad x\in\Omega,$$

где $Q=\Omega\times(0,T]$, $\Omega\subset R^n$ — ограниченная область с границей S, $\xi(x)$ — управляющая функция из $L_2(\Omega)$, A — самосопряженный оператор, не зависящий от t. Для некоторого заданного τ_0, $0<\tau_0<T$, рассматриваются усредненные значения функции u на интервале $(T-\tau_0,T)$

$$Mu=Mu(x,t;\xi)=\tau_0^{-1}\int\limits_{T-\tau_0}^{T}u(x,t;\xi)\,dt$$

и составляется усредненный функционал $J(\xi)=\int\limits_{\Omega}\big\{Mu(x,t;\xi)-\chi(x)\big\}^2\,dx$, где $\chi(x)$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$. Применение Лионсом термина “усредненный” к функционалу $J(\xi)$ вызвано тем, что он определяет зависимость от ξ через значения $u(x,t;\xi)$ на всем временно́м интервале $(T-\tau_0,T)$, а не через одно значение при $t=T$. Соответствующая задача управления состоит в минимизации $J(\xi)$ в $L_2(\Omega)$. Для доказательства равенства $\inf\limits_{\xi\in L_2(\Omega)}J(\xi)=0$ в [2] установлена плотность в $L_2(\Omega)$ множества усредненных решений $\big\{Mu(x,t;\xi)\big\}$ при пробегании управлением ξ пространства $L_2(\Omega)$. Это важное свойство, доказанное Лионсом с использованием преобразования Фурье по x, позволяет говорить об управляемости [3] рассматриваемой системы.

На основе идеи Лионса исследовать свойства плотности усредненных наблюдений в настоящей статье представлены результаты в случае линейных параболических операторов более общего вида, чем в [2] (а именно с коэффициентами, зависящими не только от x, но и от t). Тем самым подтверждено предположение Лионса из [2], что для задач управления и в более общем случае имеет место плотность множества решений при их усреднении на произвольном временно́м интервале. Представленные результаты основаны

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: goldman@srcc.msu.ru

на принципе двойственности и являются следствием так называемого свойства обратной единственности для линейных параболических операторов с обратным направлением времени [4, 5].

Значение указанных свойств плотности (как установленных в [2], так и обобщенных в настоящей статье) не ограничивается задачами управления. Одна из целей статьи — показать возможности применения этих свойств при исследовании обратных параболических задач. Этому классу обратных задач посвящены многочисленные публикации, что связано как с теоретическим интересом, так и с практическими приложениями (см., например, [6–25]). К разнообразным постановкам обратных параболических задач приводят современные потребности моделирования и управления процессами в теплофизике и механике сплошной среды в зависимости от искомой характеристики модели и от вида дополнительной информации. В соответствующих математических постановках требуется, используя эту информацию, определить коэффициенты уравнения, начальные или какие-либо другие функции, считающиеся заданными в классической (прямой) постановке задачи.

2. Задача управления для линейного параболического оператора общего вида. Рассмотрим систему, состояние которой определяется как решение $u(x,t;v)$ в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ задачи управления

$$c(x,t)u_t - Lu = 0, \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=l}=0, \quad 0<t\leqslant T, \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0}=v(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{3}$$

где $Lu \equiv \big(a(x,t)u_x\big)_x - b(x,t)u_x - d(x,t)u$ — равномерно эллиптический оператор; a, b, c, d, а также a_x — функции из $H^{\lambda,\lambda/2}\big(\overline{Q}\big)$; $v(x)$ — управление из класса $\overset{0}{C}[0,l]$; $a\geqslant a_{\min}>0$, $c\geqslant c_{\min}>0$; $a_{\min}$, $c_{\min}=\mathrm{const}>0$; $0<\lambda<1$. При каждом таком управлении линейная краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима в классе гладких функций $u(x,t;v)\in C\big(\overline{Q}\big)\cap C^{2,1}(Q)$ [1].

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *вместе с производными* a_x, b_x *и* c_t *принадлежат* $H^{\lambda,\lambda/2}\big(\overline{Q}\big)$ $(0<\lambda<1)$ *и, кроме того, производная* a_t *непрерывна в* $\overline{Q}$. *Тогда при пробегании функцией* $v(x)$ *всего пространства управлений* $\overset{0}{C}[0,l]$ *соответствующее множество значений* $\Big\{u(x,t;v)\big|_{t=\tau}\Big\}$ *является всюду плотным в* $L_2[0,l]$ *на любом временно́м слое* $t=\tau$ $(0<\tau\leqslant T)$*; в частности, из соотношения*

$$\int\limits_0^l u(x,t;v)\big|_{t=\tau}\,w(x)\,dx = 0 \quad \forall v\in\overset{0}{C}[0,l] \tag{4}$$

для некоторой функции $w(x)\in\overset{0}{C}[0,l]$ *следует, что* $w(x)=0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$.

Доказательство. Используя принцип двойственности, рассмотрим краевую задачу, сопряженную с (1)–(3) в области $\overline{Q}_\tau=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant\tau\}$, $0<\tau\leqslant T$:

$$\big(c(x,t)\psi\big)_t + L^*\psi = 0, \quad 0<x<l, \quad 0\leqslant t<\tau, \tag{5}$$

$$\psi\big|_{x=0}=0, \quad \psi\big|_{x=l}=0, \quad 0\leqslant t<\tau, \tag{6}$$

$$\psi\big|_{t=\tau}=\theta(x;\tau), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{7}$$

$$L^*\psi \equiv \big(a(x,t)\psi_x\big)_x + \big(b(x,t)\psi\big)_x - d(x,t)\psi,$$

полагая $\theta(x;\tau)=c^{-1}(x,\tau)w(x)$, где $w(x)$ — функция из условия (4).

Ее решение $\psi(x,t;\tau)$ принадлежит $C\big(\overline{Q}_\tau\big)\cap C^{2,1}(Q_\tau)$ и непрерывным образом зависит от параметра τ в силу устойчивости относительно входных данных [1]. Покажем, что это решение в конечный момент времени удовлетворяет дополнительному условию $\psi(x,t;\tau)\big|_{t=0}=0$. Для этого рассмотрим непрерывную функцию

$$F(\tau)=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l \psi\{cu_t - Lu\}\,dx\,dt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u\{(c\psi)_t + L^*\psi\}\,dx\,dt.$$

Для нее в силу уравнений (1) и (5) справедливо $F(\tau)\equiv 0$. С другой стороны, интегрируя по частям с учетом краевых и начальных условий (2), (3) и (6), (7), приводим $F(\tau)$ к виду

$$F(\tau)=\int\limits_0^l c(x,\tau)u(x,\tau;v)\theta(x;\tau)\,dx - \int\limits_0^l c(x,0)v(x)\psi(x,0;\tau)\,dx = 0 \quad \forall v\in\overset{0}{C}[0,l]. \tag{8}$$

Отсюда, исходя из (4) и вида функции $\theta(x;\tau)$, и вытекает условие $\psi(x,0;\tau)=0$ в силу неравенства $c \geqslant c_{\min} > 0$, произвольности функции $v(x) \in \overset{0}{C}[0,l]$ и плотности этого пространства в $L_2[0,l]$.

Полученное условие позволяет рассматривать уравнение (5) с граничными условиями (6) как однородную краевую задачу для линейного параболического уравнения с обратным направлением времени. Требования теоремы 1 к гладкости входных данных обеспечивают применимость к этой задаче известного свойства обратной единственности [4, 5], в силу которого $\psi(x,t;\tau)\equiv 0$ в $\overline{Q}_\tau$, в том числе и при $t=\tau$, т.е. $\theta(x;\tau)=0$, $w(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant l$. Таким образом, плотность множества $\left\{u(x,t;v)\big|_{t=\tau}\right\}$ — следствие этого свойства. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что система, состояние которой определяется как решение задачи (1)–(3), является управляемой [3].

3. Усредненные наблюдения в задаче управления (1)–(3). Рассмотрим теперь среднее значение решения $u(x,t;v)$ на временнóм интервале $[T-T_0,T]$, T_0 — произвольная точка, $0<T_0<T$:

$$\overline{u}(x;v)=T_0^{-1}\int\limits_{T-T_0}^{T} u(x,t;v)\,dt.$$

Назовем $\overline{u}(x;v)$ усредненным наблюдением состояния системы (1)–(3) на интервале $[T-T_0,T]$. Обобщением теоремы 1 для такого произвольного интервала является

Теорема 2. *Пусть входные данные удовлетворяют условиям теоремы* 1. *При пробегании управлением* $v(x)$ *всего пространства* $\overset{0}{C}[0,l]$ *соответствующие усредненные наблюдения образуют множество, всюду плотное в* $L_2[0,l]$*; в частности, из соотношения для некоторой функции* $w(x)\in \overset{0}{H}{}^{\lambda}[0,l]$

$$\int\limits_0^l \overline{u}(x;v)\,w(x)\,dx=0 \quad \forall v\in \overset{0}{C}[0,l] \tag{9}$$

следует, что $w(x)=0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$.

Доказательство. Как и при выводе теоремы 1, рассматривается сопряженная задача (5)–(7) в области $\overline{Q}_\tau$, но уже при всех значениях τ, $T-T_0\leqslant\tau\leqslant T$, и с начальной функцией $\theta(x;\tau)=c^{-1}(x,\tau)w(x)$, где $w(x)$ — функция из условия (9). Для $F(\tau)$, учитывая (8) и вид $\theta(x;\tau)$, справедливо при любой функции $v\in \overset{0}{C}[0,l]$:

$$\int\limits_{T-T_0}^{T} F(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^l\int\limits_{T-T_0}^{T} u(x,\tau;v)\,d\tau\,w(x)\,dx-\int\limits_0^l\int\limits_{T-T_0}^{T}\psi(x,0;\tau)\,d\tau\,c(x,0)v(x)\,dx=0.$$

Отсюда в силу (9), условия $c\geqslant c_{\min}>0$ и произвольности $v(x)\in \overset{0}{C}[0,l]$ следует, что

$$\int\limits_{T-T_0}^{T}\psi(x,0;\tau)\,d\tau=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{10}$$

Подынтегральная функция $\psi(x,0;\tau)$ является решением задачи (5)–(7) в области $\overline{Q}_\tau$ в конечный момент времени для этой задачи (т.е. при $t=0$) и с начальным условием (7), заданным на временнóм слое $t=\tau$.

Делая замену $t'=T-t$, при которой соотношения (5)–(7) имеют обычный вид краевой задачи для параболического уравнения, из (10) получим $\int\limits_0^{T_0}\psi(x,T;\tau)\,d\tau=0$, $0\leqslant x\leqslant l$. Здесь $\psi(x,T;\tau)$ — решение соответствующей задачи в области $\overline{Q}_\tau=\{0\leqslant x\leqslant l,\tau\leqslant t'\leqslant T\}$ в конечный момент времени $t'=T$ и с начальным условием при $t'=\tau$: $\psi(x,t';\tau)\big|_{t'=\tau}=\theta(x;\tau)$, $\theta(x;\tau)=c^{-1}(x,\tau)w(x)$, где $w(x)$ — функция из условия (9).

Далее, используя представление решения $\psi(x,t';\tau)$ с помощью функции Грина $G(x,y,t',\tau)$ [1], придем к равенству

$$\int\limits_0^{T_0}\psi(x,T;\tau)\,d\tau=\int\limits_0^{T_0}\int\limits_0^l G(x,y,T,\tau)\theta(y;\tau)\,dy\,d\tau=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Полагая $\gamma(y,\tau)=\begin{cases}\theta(y;\tau) & \text{при} \quad 0<\tau\leqslant T_0,\\ 0 & \text{при} \quad T_0<\tau\leqslant T,\end{cases}$ запишем это равенство в виде

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l G(x,y,T,\tau)\gamma(y,\tau)\,dy\,d\tau=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь следующую краевую задачу в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t'\leqslant T\}$ для неоднородного уравнения:

$$(c(x,t')\Psi)_{t'}-L^*\Psi=\gamma(x,t'),\quad 0<x<l,\quad 0<t'\leqslant T, \tag{12}$$

$$\Psi|_{x=0}=0,\quad \Psi|_{x=l}=0,\quad 0<t'\leqslant T, \tag{13}$$

$$\Psi|_{t'=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{14}$$

Покажем, что эта задача имеет гладкое решение. Действительно, так как $\gamma(x,t')=\theta(x,t')$ и $\theta(x,t')\in\overset{0}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}$ при $0\leqslant x\leqslant l$, $0<t'\leqslant T_0$, то решение $\Psi(x,t')$ при таких x и t' принадлежит $C^{2,1}$ [1]. С другой стороны, при $T_0<t'\leqslant T$ функция $\gamma(x,t')=0$. Поэтому при таких значениях t' решение $\Psi(x,t')$ можно представить как решение $\psi(x,t';T_0)$ краевой задачи в области $\overline{Q}_{T_0}=\{0\leqslant x\leqslant l, T_0\leqslant t'\leqslant T\}$ для однородного уравнения

$$\big(c(x,t')\psi\big)_{t'}-L^*\psi=0,\quad 0<x<l,\quad T_0<t'\leqslant T,$$

с однородными граничными условиями при $x=0$, $x=l$ и с начальным условием

$$\psi\big|_{t'=T_0}=\Psi(x,T_0),\quad 0\leqslant x\leqslant l,$$

в котором $\Psi(x,T_0)$ — решение краевой задачи (12)–(14), полученное при $t'=T_0$ и принадлежащее $C^2[0,l]$.

Таким образом, $\psi(x,t';T_0)\in C\left(\overline{Q}_{T_0}\right)\cap C^{2,1}(Q_{T_0})$ [1]. Значит, и решение $\Psi(x,t')\in C\left(\overline{Q}_{T_0}\right)\cap C^{2,1}(Q_{T_0})$ как совпадающее в этой области с $\psi(x,t';T_0)$.

Это обстоятельство вместе с установленной принадлежностью $\Psi(x,t')\in C^{2,1}$ при $0\leqslant x\leqslant l$ и $0<t'\leqslant T_0$ позволяет заключить, что задача (12)–(14) при данной правой части $\gamma(x,t')$ имеет решение, гладкое в указанном смысле.

Представление этого решения с помощью функции Грина имеет вид [1]

$$\Psi(x,t')=\int\limits_0^{t'}\int\limits_0^l G(x,y,t',\tau)\gamma(y,\tau)\,dy\,d\tau,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad 0<t'\leqslant T.$$

Следовательно, равенство (11) означает, что $\Psi(x,T)=0$ в конечный момент времени $t'=T$ при $0\leqslant x\leqslant l$. Но так как $\Psi(x,T)=\psi(x,T;T_0)$, то и $\psi(x,T;T_0)=0$ при $0\leqslant x\leqslant l$. В силу свойства обратной единственности [4, 5] из этого финального условия следует, что $\psi(x,t';T_0)\equiv 0$ в области $\overline{Q}_{T_0}$. Однако в этой области $\psi(x,t';T_0)$ совпадает с $\Psi(x,t')$, т.е. $\Psi(x,t')\equiv 0$ при $0\leqslant x\leqslant l$, $T_0\leqslant t'\leqslant T$. Это позволяет заключить, в частности, что $\Psi(x,t')\big|_{t'=T_0}\equiv 0$ при $t'=T_0$, т.е. имеет место тождество

$$\int\limits_0^{T_0}\int\limits_0^l G(x,y,T_0,\tau)\theta(y,\tau)\,dy\,d\tau\equiv 0,\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Так как $\theta(x,t)=c^{-1}(x,t)w(x)$, то, предположив, что $w(x)\geqslant 0$ ($w(x)\leqslant 0$) при всех x, $0\leqslant x\leqslant l$, получим из этого тождества, что $w(x)\equiv 0$ при $0\leqslant x\leqslant l$ в силу неравенства $G(x,y,T_0,\tau)>0$ при $\tau<T_0$.

Предположим теперь, что функция $w(x)$ меняет свой знак в некоторых точках интервала $0<x<l$, например $w(\overline{x})>0$, $w\left(\overline{\overline{x}}\right)<0$, $0<\overline{x}<\overline{\overline{x}}<l$.

Так как $\Psi(x,t')\big|_{t'=0}\equiv 0$ (см. (14)) и $\Psi(x,t')\big|_{t'=T_0}\equiv 0$, $0\leqslant x\leqslant l$, то при $x=\overline{x}$ соответствующее решение $\Psi(\overline{x},t')$, кроме выполнения условий $\Psi(\overline{x},t')\big|_{t'=0}=0$, $\Psi(\overline{x},t')\big|_{t'=T_0}=0$, имеет производную по t' при $t'=0$ и $t'=T_0$, равную $\Psi_{t'}(\overline{x},t')|_{t'=0}=\theta(\overline{x},t')|_{t'=0}>0$, $\Psi_{t'}(\overline{x},t')|_{t'=T_0}=\theta(\overline{x},t')\big|_{t'=T_0}>0$ (в силу уравнения (12) при $t'=0$ и $t'=T_0$).

Это означает существование по крайней мере двух интервалов времени $(0,t^*)$, (t^{**},T_0), на которых решение $\Psi(\overline{x},t')$ имеет разные знаки: $\Psi\left(\overline{x},t'\right)>0$ при $0<t'<t^*$, $\Psi\left(\overline{x},t'\right)<0$ при $t^{**}<t'<T_0$.

На каждом из этих интервалов производная $\Psi_{t'}(\overline{x}, t')$ меняет свой знак, например на интервале $(0, t^*)$ с положительного на отрицательный, обращаясь в нуль в некоторой точке внутри этого интервала. Таким образом, предположение, что $w(\overline{x}) > 0$, приводит к тому, что в точке $x = \overline{x}$ уравнение (12) должно выполняться при любом t', $0 < t' \leqslant T_0$, независимо от изменения знаков $\Psi(\overline{x}, t')$ и $\Psi_{t'}(\overline{x}, t')$, хотя правая часть уравнения $\theta(\overline{x}, t') > 0$ при всех t', $0 < t' \leqslant T_0$.

Аналогичные рассуждения для точки $\overline{\overline{x}}$, в которой по предположению $w\left(\overline{\overline{x}}\right) < 0$, тоже позволяют установить существование интервалов времени, на которых решение $\Psi\left(\overline{\overline{x}}, t'\right)$ и его производная $\Psi_{t'}\left(\overline{\overline{x}}, t'\right)$ меняют свои знаки. Тем не менее, уравнение (12) в этой точке должно выполняться при любом t', $0 < t' \leqslant T_0$, хотя правая часть сохраняет свой знак $\theta\left(\overline{\overline{x}}, t'\right) < 0$ при всех t', $0 < t' \leqslant T_0$.

Приходим к заключению, что имеют место тождества $w(x) \equiv 0$, $\theta(x, t') \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t' \leqslant T_0$. Соответствующим решением краевой задачи (12)–(14) является функция $\Psi(x, t') \equiv 0$.

Возвращаемся к установленному в силу свойства обратной единственности тождеству $\Psi(x, t') \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $T_0 \leqslant t' \leqslant T$. Это означает, в частности, что производная $\Psi_{t'}(x, t')\big|_{t'=T_0} \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Таким образом, следствием финального условия $\Psi(x, T) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ является непрерывность производной $\Psi_{t'}(x, t')$ во всей области $\overline{Q}_{T_0}$ и выполнение в момент времени $t' = T_0$ соотношения $(c(x, t')\Psi)_{t'} - L^*\Psi = 0$, $0 < x < l$.

В этот же момент времени $t' = T_0$ решение $\Psi(x, t')\big|_{t'=T_0} \equiv 0, 0 \leqslant x \leqslant l$, и удовлетворяет уравнению (12), т.е. производная $\Psi_{t'}(x, t')\big|_{t'=T_0} = \theta(x, t')\big|_{t'=T_0}$, $0 < x < l$. Но $\theta(x, t')|_{t'=T_0} = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Следовательно, производная $\Psi_{t'}(x, t')$ непрерывна не только в замкнутых областях $\{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t' \leqslant T_0\}$, $\{0 \leqslant x \leqslant l, T_0 \leqslant t' \leqslant T\}$, но и при $t' = T_0$.

Возвращаясь к переменной t, заключаем, что $w(x) = 0$, $\theta(x, t) = c^{-1}(x, t)w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $T - T_0 \leqslant t \leqslant T$. Таким образом, усредненные на интервале $[T - T_0, T]$ наблюдения $\overline{u}(x; v)$ обладают свойством плотности при пробегании $v(x)$ пространства $\overset{0}{C}[0, l]$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Доказанное в теореме 2 утверждение $w(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, совпадает в случае самосопряженного оператора L с коэффициентами, не зависящими от t, с таким же утверждением из [2], где для соответствующего уравнения (1) установлена плотность усредненных наблюдений. Доказательство в [2] основано на использовании преобразования Фурье.

В указанном частном случае утверждение $w(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, следует и из результатов [11], полученных на основе теории полугрупп. Действительно, доказанное выше условие $\Psi(x, t')\big|_{t'=T_0} \equiv 0, 0 \leqslant x \leqslant l$, позволяет заключить из [11], что функция $\theta(x, t') = \theta(x) = c^{-1}(x)w(x)$ в правой части соответствующего уравнения (12) равна нулю (см. краевую задачу (12)–(14) при $0 < x < l$ и $0 < t' \leqslant T_0$). Обобщением теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть для входных данных выполнены условия теоремы* 1. *Если для любого управления* $v(x)$ *из* $\overset{0}{C}[0, l]$ *соответствующие решения* $u(x, t; v)$ *задачи* (1)–(3) *удовлетворяют на некотором временно́м интервале* $[T - T_0, T]$, $0 < T_0 < T$, *соотношению*

$$\int\limits_{T-T_0}^{T} \int\limits_{0}^{l} u(x, t; v)\alpha(x, t)\, dx\, dt = 0 \quad \forall v \in \overset{0}{C}[0, l]$$

для некоторой функции $\alpha(x, t) \in \overset{0}{H}{}^{\lambda, \lambda/2}\left(\overline{Q}\right)$, *не меняющей знак по переменной* $t \in [0, T]$ *при всех* x, $0 \leqslant x \leqslant l$, *то* $\alpha(x, t) = 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant l$, $T - T_0 \leqslant t \leqslant T$.

При доказательстве теоремы 3 используется та же схема, что и при доказательстве теоремы 2, только в качестве начальной функции в (7) берется $\theta(x; \tau) = c^{-1}(x, \tau)\alpha(x, \tau)$. Отметим, что момент времени T_0 может быть любым, $0 < T_0 \leqslant T - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая конечная величина. Непрерывность функции $\alpha(x, t)$ позволяет заключить, что утверждение теоремы 3 справедливо и при $T_0 = T$: $\alpha(x, t) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Следствие теоремы 3. *Наблюдения в задаче управления* (1)–(3), *усредненные с весом*

$$\overline{u}(x; v; \varrho) = T_0^{-1} \int\limits_{T-T_0}^{T} \varrho(t)u(x, t; v)\, dt, \quad 0 < T_0 \leqslant T,$$

где $\varrho(t) > 0$ — *весовая функция из* $H^{\lambda/2}[0, T]$, *образуют при пробегании* $v(x)$ *пространства* $\overset{0}{C}[0, l]$ *множество, плотное в* $L_2[0, l]$.

Действительно, это частный случай функции $\alpha(x,t) = \varrho(t)w(x)$.

Следующие примеры показывают значение сохранения знака по t функцией $\alpha(x,t)$ при всех x, $0 \leqslant x \leqslant l$, для справедливости утверждения теоремы 3.

Пример 1. Рассмотрим частный случай краевой задачи (12)–(14) в области $\{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T_0\}$ при $l = 1$, $T_0 = 1$:

$$\Psi_t - \Psi_{xx} = \alpha(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant 1,$$
$$\Psi\big|_{x=0} = 0, \quad \Psi\big|_{x=1} = 0, \quad 0 < t \leqslant 1, \quad \Psi\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

с правой частью $\alpha(x,t) = x(1-x)(1-2t) + 2t(1-t)$. Хотя решение $\Psi(x,t) = x(1-x)t(1-t) \geqslant 0$ при всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, производная $\Psi_t(x,t) = x(1-x)(1-2t)$ меняет знак по t на интервалах времени $0 \leqslant t < 0.5$, $0.5 < t \leqslant 1$ при любом x, $0 < x < 1$.

Требование знакопостоянства по t функции $\alpha(x,t)$ при любом x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, не выполняется. Действительно, $\alpha(x,t)$ меняет знак при $x = 0.5$ в зависимости от значения t: $\alpha(x,t)\big|_{x=0.5} > 0$ при $0 \leqslant t < t^*$, $\alpha(x,t)|_{x=0.5} < 0$ при $t^* < t \leqslant 1$ и $\alpha(x,t^*)\big|_{x=0.5} = 0$, где $0.5 < t^* < 1$. Соответственно, решение этой задачи не является тождественным нулем, хотя $\Psi(x,t)\big|_{t=1} = 0$ при $t = 1$.

Пример 2. Частным случаем краевой задачи (12)–(14) в области $\{0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ являются соотношения

$$\Psi_t - \Psi_{xx} = \alpha(x,t), \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t \leqslant 1,$$
$$\Psi\big|_{x=0} = 0, \quad \Psi|_{x=1} = 0, \quad 0 < t \leqslant 1, \quad \Psi\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$

в которых $\alpha(x,t) = (1-x)\{(1-2t)x(2-x) + 6t(1-t)\}$. Решение $\Psi(x,t) = x(1-x)(2-x)t(1-t)$ не меняет знак по t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, но меняет знак по x при $0 \leqslant x \leqslant 2$. В момент времени $t = 0.5$ производная $\Psi_t(x,t)\big|_{t=0.5} = 0$ при любом x, $0 \leqslant x \leqslant 2$; при других значениях t ее знак зависит от положения точки x на отрезке $[0,2]$.

Хотя при $x = 1$ функция $\alpha(x,t)\big|_{x=1} = 0$ при всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, требование сохранения знака по t для любого x, $0 < x < 2$, не выполняется. Например, при $x = 0.5$ $\alpha(x,t)\big|_{x=0.5} > 0$ при $0 \leqslant t < t^*$, $\alpha(x,t)\big|_{x=0.5} < 0$ при $t^* < t \leqslant 1$, $\alpha(x,t^*)\big|_{x=0.5} = 0$ при $0.75 < t^* < 1$. Соответственно, решение этой задачи не является тождественным нулем, хотя в момент времени $t = 1$ $\Psi(x,t)\big|_{t=1} = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Пример 3. Рассмотрим частный случай краевой задачи (12)–(14) в области $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$

$$\Psi_t - \Psi_{xx} = \alpha(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant 2\pi,$$
$$\Psi\big|_{x=0} = 0, \quad \Psi\big|_{x=1} = 0, \quad 0 < t \leqslant 2\pi, \quad \Psi\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

с правой частью $\alpha(x,t) = x(1-x)\cos t + 2\sin t$. Решение $\Psi(x,t) = x(1-x)\sin t$ не меняет знак по x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, но меняет знак по t при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Производная $\Psi_t(x,t)$ при любом x, $0 < x < 1$, меняет знак по t на интервалах времени $0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t \leqslant 2\pi$, обращаясь в 0 при $t = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

Требование знакопостоянства по t функции $\alpha(x,t)$ при любом x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, не выполняется. Например, при $x = 0.5$ $\alpha(x,t)\big|_{x=0.5} > 0$ при $0 \leqslant t < t^*$, $\alpha(x,t^*)\big|_{x=0.5} = 0$, где $\dfrac{\pi}{2} < t^* < \pi$, $\alpha(x,t)\big|_{x=0.5} < 0$ при $t^* < t < t^{**}$, $\alpha(x,t^{**})\big|_{x=0.5} = 0$, где $\dfrac{3\pi}{2} < t^{**} < 2\pi$, $\alpha(x,t)\big|_{x=0.5} > 0$ при $t^{**} < t \leqslant 2\pi$.

Соответственно, решение этой задачи не является тождественным нулем, хотя $\Psi(x,t)\big|_{t=\pi} = 0$, $\Psi(x,t)\big|_{t=2\pi} = 0$ при любом x, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Замечание 3. Теоремы 1–3 позволяют распространить на линейный параболический оператор общего вида (т.е. с коэффициентами, зависящими от (x,t)) результат Лионса [2] об усредненных функционалах, который обсуждался выше. Тем самым подтверждено его предположение, что для задач управления и в более общем случае имеет место плотность множества решений при их усреднении на произвольном временно́м интервале. В том числе это справедливо для наблюдений, усредненных с весом.

4. Использование свойств плотности усредненных наблюдений при исследовании обратных параболических задач.

4.1. Рассмотрим постановку обратной задачи для системы (1)–(3), связанную с практическими приложениями в теплофизике и механике сплошной среды. Требуется найти функции $u(x,t)$ в $C\big(\overline{Q}\big) \cap C^{2,1}(Q)$ и $v(x)$ в $\overset{0}{C}[0,l]$ из соотношений (1)–(3) и дополнительной информации вида

$$T_0^{-1} \int\limits_{T-T_0}^{T} u(x,t)\,dt = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

в предположении, что a, b, c и d — известные коэффициенты, удовлетворяющие условиям теоремы 1, $g(x)$ — заданная функция из $\overset{0}{C}{}^2[0,l]$, T_0 — заданная точка, $0 < T_0 < T$.

Эта обратная задача относится к некорректно поставленным, что проявляется в возможном отсутствии решения и в его неустойчивости к погрешностям входных данных. Она эквивалентна вариационной задаче (тоже некорректной) $\inf\limits_{v\in L_2[0,l]} J(v)$, где

$$J(v) = \int\limits_0^l \{\overline{u}(x;v) - g(x)\}^2\,dx, \quad \overline{u}(x;v) = T_0^{-1}\int\limits_{T-T_0}^{T} u(x,t;v)\,dt.$$

В силу теоремы 2 для этой задачи, являющейся задачей управления для системы (1)–(3), имеет место плотность усредненных наблюдений $\overline{u}(x;v)$ при пробегании функцией $v(x)$ пространства $\overset{0}{C}[0,l]$.

Это означает, что справедливо равенство $\inf\limits_{v\in L_2[0,l]} J(v) = 0$.

Иными словами, плотность усредненных наблюдений позволяет установить непустоту множества функций $v_\delta \in L_2[0,l]$, для которых $J(v_\delta) \leqslant \delta$ при любом заданном $\delta > 0$. Для построения v_δ, устойчивых к погрешностям, необходимо применять те или иные методы регуляризации: метод А.Н. Тихонова, метод квазирешений В.К. Иванова, различные итерационные методы (см., например, [26]) и др. Любая пара функций $\{u(x,t;v_\delta), v_\delta(x)\}$ может считаться тогда приближенным решением исходной обратной задачи.

4.2. Свойства плотности усредненных наблюдений, как установленные в [2], так и доказанные в теоремах 2 и 3, имеют важное значение при исследовании обратных параболических задач с неизвестными коэффициентами и финальным переопределением. Такие задачи являются некорректно поставленными, что проявляется в возможном отсутствии решения и в его неустойчивости к погрешностям входных данных. Однако в случае существования решения оно может обладать свойством единственности. Соответствующие достаточные условия для некоторых обратных параболических задач с неизвестными источниками см., например, в [6–13].

Покажем, как результаты теоремы 3 позволяют исследовать проблему единственности для обратной задачи с линейным параболическим оператором общего вида (т.е. с коэффициентами, зависящими не только от x, но и от t).

Требуется найти $\{u(x,t), f(x)\}$ в классах Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^\lambda[0,l]$ $(0<\lambda<1)$ из условий

$$c(x,t)u_t - Lu = h(x,t)f(x) + p(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{15}$$

$$u\big|_{x=0} = v_0(t), \quad u\big|_{x=l} = v_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u\big|_{t=T} = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{16}$$

в предположении, что равномерно эллиптический оператор Lu имеет вид

$$Lu \equiv \big(a(x,t)u_x\big)_x - b(x,t)u_x - d(x,t)u,$$

a, b, c, d, h, p, v_i $(i=0,1)$, φ и g — известные функции, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $a_{\min}$, $c_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (15) *коэффициенты a и c принадлежат $H^{1,\lambda/2}(\overline{Q})$, коэффициенты b, d, a_x, c_x, а также функции h и p принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, функции $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $\varphi(x)$ принадлежат соответственно $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ и $H^{2+\lambda}[0,l]$. Предположим также, что финальная функция $g(x)$ принадлежит $H^{2+\lambda}[0,l]$ и выполнены условия согласования при $x=0$, $x=l$:*

$$c(x,T)v_{0t} - Lg\big|_{x=0,t=T} = \big\{h(x,T)f(x)+p(x,T)\big\}\big|_{x=0}, \; c(x,T)v_{1t} - Lg\big|_{x=l,t=T} = \big\{h(x,T)f(x)+p(x,T)\big\}\big|_{x=l},$$
$$c(x,0)v_{0t} - L\varphi\big|_{x=0,t=0} = \big\{h(x,0)f(x)+p(x,0)\big\}\big|_{x=0}, \quad c(x,0)v_{1t} - L\varphi\big|_{x=l,t=0} = \big\{h(x,0)f(x)+p(x,0)\big\}\big|_{x=l}.$$

Пусть, кроме того, производная a_t непрерывна в $\overline{Q}$, b_x и c_t принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, коэффициент $h(x,t)$ не меняет знак по переменной $t\in[0,T]$ и при $0\leqslant x\leqslant l$ удовлетворяет условию $|h(x,T)|>0$. Тогда в случае существования решения $\{u(x,t),f(x)\}\in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})\times H^\lambda[0,l]$ оно определяется однозначно.

Доказательство. Допустим, что $\{u_1,f_1\}$ и $\{u_2,f_2\}$ — два решения обратной задачи (15), (16). Для разностей $\Delta u = u_2 - u_1$ и $\Delta f = f_2 - f_1$ в силу (15), (16) и условий согласования следует, что $\Delta f|_{x=0}=0$, $\Delta f|_{x=l}=0$ и, кроме того, имеют место соотношения

$$c(x,t)\Delta u_t - L\Delta u = h(x,t)\Delta f(x), \quad (x,t)\in Q, \tag{17}$$

$$\Delta u\big|_{x=0}= 0, \quad \Delta u\big|_{x=l}= 0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad \Delta u\big|_{t=0}= 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{18}$$

с финальным условием $\Delta u\big|_{t=T}= 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Для доказательства утверждения, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$ и $\Delta f = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, воспользуемся принципом двойственности. Задача, сопряженная с (17), (18), имеет вид

$$(c(x,t)\psi)_t + L^*\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{19}$$

$$\psi\big|_{x=0}= 0, \quad \psi\big|_{x=l}= 0, \quad 0 \leqslant t < T, \quad \psi\big|_{t=T}= \eta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{20}$$

в котором

$$L^*\psi \equiv \big(a(x,t)\psi_x\big)_x + \big(b(x,t)\psi\big)_x - d(x,t)\psi.$$

Функция $\eta(x)$ в начальном условии при $t = T$ для решения этой сопряженной задачи может быть произвольной функцией из $\overset{0}{C}[0,l]$ в силу финального условия $\Delta u\big|_{t=T}= 0$. Это означает, что система (19), (20) обладает такими же свойствами, что и задача управления с управляющим воздействием $\eta(x)$ в начальном условии (замена переменной $t' = T - t$ приводит (19), (20) к обычному виду такой задачи).

Ее решение $\psi(x,t;\eta) \in C\big(\overline{Q}\big) \cap C^{2,1}(Q)$ и в силу (17)–(20) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l \psi(x,t;\eta)h(x,t)\Delta f(x)\,dx\,dt = 0 \quad \forall \eta \in \overset{0}{C}[0,l]. \tag{21}$$

Применение теоремы 3 для функции $\alpha(x,t) = h(x,t)\Delta f(x)$ позволяет заключить, что $h(x,T)\Delta f(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. По условию $\big|h(x,T)\big| > 0$, т.е. $\Delta f(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Тогда в силу единственности решения краевой задачи (17), (18) следует, что $\Delta u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$ [1]. Теорема 4 доказана.

Требования теоремы 4 к коэффициенту $h(x,t)$ означают выполнение условий $h(x,T) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $h(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{Q}$, либо условий $h(x,T) < 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $h(x,t) \leqslant 0$ в $\overline{Q}$.

Замечание 4. Если в условиях теоремы 4 предположить самосопряженность оператора L (т.е. $b(x,t) = 0$) и независимость от t его коэффициентов, а также коэффициентов c и h, то к интегральному тождеству (21), в котором $h(x,t) = h(x)$, можно непосредственно применить результат Лионса о плотности усредненных решений в соответствующей сопряженной системе (19)–(20). Это позволяет установить, что $h(x)\Delta f(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Однако $\big|h(x)\big| > 0$; следовательно, $\Delta f(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$.

Другой подход к исследованию обратных параболических задач такого типа в случае независимости коэффициентов уравнения от переменной t предложен в [11] с использованием теории полугрупп.

Замечание 5. Теорема 4 устанавливает достаточные условия единственности решения обратной задачи (15)–(16) для одномерного параболического уравнения с разделенными краевыми условиями, не накладывая ограничений на знак коэффициента $d(x,t)$ при младшем члене уравнения. Однако в случае периодических краевых условий требование $d(x,t) \geqslant 0$ необходимо (см. [10]).

5. Заключение. Результаты данного исследования позволяют расширить класс обратных параболических задач, обладающих свойством единственности (см. [6–11]). Кроме задач с неизвестными источниками, принцип двойственности и указанные свойства плотности используются при изучении проблемы единственности для обратных задач, в которых требуется найти какие-либо коэффициенты параболического уравнения по информации о решении в конечный момент времени.

Предлагаемый подход позволяет также исследовать обратные параболические задачи в областях с подвижными границами. К таким задачам не применимы известные результаты единственности, полученные при условии независимости коэффициентов уравнения от t. Например, в обратных задачах Стефана такая зависимость всегда существует из-за движущегося фазового фронта, даже если коэффициенты уравнения не зависят напрямую от t.

Автор выражает глубокую признательность профессору И. В. Тихонову за обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

4. *Lees M., Protter M.H.* Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities // Duke Math. J. 1961. **28**, N 3. 369–382.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
6. *Клибанов М.В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Доклады АН. 1985. **280**, № 3. 533–536.
7. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1987. **23**, № 11. 1971–1980.
8. *Isakov V.* Inverse parabolic problems with the final overdetermination // Commun. on Pure and Applied Math. 1991. **44**, N 2. 185–209.
9. *Костин А.Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Матем. сб. 2013. **204**, № 10. 3–46.
10. *Костин А.Б.* Контрпримеры в обратных задачах для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. **54**, № 5. 779–792.
11. *Rundell W.* Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data // Applicable Analysis. 1980. **10**. 231–242.
12. *Прилепко А.И., Тихонов И.В.* Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности // Доклады АН. 1999. **364**, № 1. 21–23.
13. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
14. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
15. *Камынин В.Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Матем. заметки. 2005. **77**, № 4. 522–534.
16. *Kozhanov A.I., Safiullova R.R.* Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2010. **18**, N 1. 1–24.
17. *Egger H., Engl H.W., Klibanov M.V.* Global uniqueness and Hölder stability for recovering a nonlinear source term in a parabolic equation // Inverse Problems. 2005. **21**, N 1. 271–290.
18. *Isakov V.* On uniqueness in the inverse conductivity problem with local data // Inverse Problems and Imaging. 2007. **1**, N 1. 95–105.
19. *Wang Y.B., Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M.* A numerical method for solving the inverse heat conduction problem without initial value // Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. **18**, N 5. 655–671.
20. *Slodička M., Lesnic D., Onyango T.T.M.* Determination of a time-dependent heat transfer coefficient in a nonlinear inverse heat conduction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. **18**, N 1. 65–81.
21. *Salva N.N., Tarzia D.A.* Simultaneous determination of unknown coefficients through a phase-change process with temperature-dependent thermal conductivity // JP J. of Heat and Mass Transfer. 2011. **5**, N 1. 11–39.
22. *Pyatkov S.G., Tsybikov B.N.* On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // Evolution Equations. 2011. **11**, N 1. 155–186.
23. *Erdem A., Lesnic D., Hasanov A.* Identification of a spacewise dependent heat source // Applied Math. Modelling. 2013. **37**, N 24. 10231–10244.
24. *Wen J., Yamamoto M., Wei T.* Simultaneous determination of a time-dependent heat source and the initial temperature in an inverse heat conduction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2013. **21**, N 3. 485–499.
25. *Hào D.N., Thanh P.X., Lesnic D., Ivanchov M.* Determination of a source in the heat equation from integral observations // Computations and Applied Mathematics. 2014. **264**. 82–98.
26. *Gilyazov S.F., Gol'dman N.L.* Regularization of ill-posed problems by iteration methods. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

Поступила в редакцию
27.06.2016

Some Control and Inverse Problems for Linear Parabolic Equations

N. L. Gol'dman[1]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: goldman@srcc.msu.ru*

Received June 27, 2016

Abstract: Properties of solutions of control and inverse problems for one-dimensional parabolic equations with coefficients dependent on (x, t) are studied. The proposed approach based on the duality principle allows one to generalize the known Lions' result on the density properties of averaged observations in control problems with a control function given in the initial conditions. It is shown that the significance of these density properties is not restricted to the control problems. Such properties are used to study inverse parabolic problems, in particular, to study the uniqueness conditions of their solutions.

Keywords: parabolic equations, control problems, duality principle, density property, controllability, inverse problems, adjoint problems, final overdetermination, uniqueness.

References

1. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967; SIAM, Providence, 1968).

2. R. Lattés and J.-L. Lions, *The Method of Quasi-Reversibility: Application to Partial Differential Equations* (Elsevier, New York, 1969; Mir, Moscow, 1970).

3. J.-L. Lions, *Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations* (Springer, Heidelberg, 1971; Mir, Moscow, 1972).

4. M. Lees and M. H. Protter, "Unique Continuation for Parabolic Differential Equations and Inequalities," Duke Math. J. **28** (3), 369–382 (1961).

5. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964; Mir, Moscow, 1968).

6. M. V. Klibanov, "On a Class of Inverse Problems for Nonlinear Parabolic Equations," Dokl. Akad. Nauk SSSR **280** (3), 533–536 (1985) [Sov. Math. Dokl. **31**, 104–107 (1985)].

7. A. I. Prilepko and V. V. Solov'ev, "Solvability Theorems and Rothe Method in Inverse Problems for Equations of Parabolic Type," Differ. Uravn. **23** (11), 1971–1980 (1987) [Differ. Equ. **23** (11), 1341–1349 (1987)].

8. V. Isakov, "Inverse Parabolic Problems with the Final Overdetermination," Comm. Pure Appl. Math. **44** (2), 185–209 (1991).

9. A. B. Kostin, "The Inverse Problem of Recovering the Source in a Parabolic Equation under a Condition of Nonlocal Observation," Mat. Sb. **204** (10), 3–46 (2013) [Sb. Math. **204** (10), 1391–1434 (2013)].

10. A. B. Kostin, "Counterexamples in Inverse Problems for Parabolic, Elliptic, and Hyperbolic Equations," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **54** (5), 779–792 (2014) [Comput. Math. Math. Phys. **54** (5), 797–810 (2014)].

11. W. Rundell, "Determination of an Unknown Non-Homogeneous Term in a Linear Partial Differential Equation from Overspecified Boundary Data," Appl. Anal. **10**, 231–242 (1980).

12. A. I. Prilepko and I. V. Tikhonov, "A Positive Solution Principle for a Linear Inverse Problem and Applications to a Coefficient Problem of Heat Conductivity," Dokl. Akad. Nauk **364** (1), 21–23 (1999) [Dokl. Math. **59** (1), 14–16 (1999)].

13. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, and I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics* (Marcel Dekker, New York, 2000).

14. A. M. Denisov, *Introduction to the Theory of Inverse Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1994) [in Russian].

15. V. L. Kamynin, "On the Inverse Problem of Determining the Right-Hand Side of a Parabolic Equation under an Integral Overdetermination Condition," Mat. Zametki **77** (4), 522–534 (2005) [Math. Notes **77** (4), 482–493 (2005)].

16. A. I. Kozhanov and R. R. Safiullova, "Linear Inverse Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations," J. Inv. Ill-Posed Probl. **18** (1), 1–24 (2010).

17. H. Egger, H. W. Engl, and M. V. Klibanov, "Global Uniqueness and Hölder Stability for Recovering a Nonlinear Source Term in a Parabolic Equation," Inv. Probl. **21** (1), 271–290 (2005).

18. V. Isakov, "On Uniqueness in the Inverse Conductivity Problem with Local Data," Inverse Probl. Imaging **1** (1), 95–105 (2007).

19. Y. B. Wang, J. Cheng, J. Nakagawa, and M. Yamamoto, "A Numerical Method for Solving the Inverse Heat Conduction Problem without Initial Value," Inverse Probl. Sci. Eng. **18** (5), 655–671 (2010).

20. M. Slodička, D. Lesnic, and T. T. M. Onyango, "Determination of a Time-Dependent Heat Transfer Coefficient in a Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem," Inverse Probl. Sci. Eng. **18** (1), 65–81 (2010).

21. N. N. Salva and D. A. Tarzia, "Simultaneous Determination of Unknown Coefficients through a Phase-Change Process with Temperature-Dependent Thermal Conductivity," JP J. Heat Mass Transfer **5** (1), 11–39 (2011).

22. S. G. Pyatkov and B. N. Tsybikov, "On Some Classes of Inverse Problems for Parabolic and Elliptic Equations," J. Evol. Equ. **11** (1), 155–186 (2011).

23. A. Erdem, D. Lesnic, and A. Hasanov, “Identification of a Spacewise Dependent Heat Source,” Appl. Math. Model. **37** (24), 10231–10244 (2013).

24. J. Wen, M. Yamamoto, and T. Wei, “Simultaneous Determination of a Time-Dependent Heat Source and the Initial Temperature in an Inverse Heat Conduction Problem,” Inverse Probl. Sci. Eng. **21** (3), 485–499 (2013).

25. D. N. Hào, P. X. Thanh, D. Lesnic, and M. Ivanchov, “Determination of a Source in the Heat Equation from Integral Observations,” J. Comput. Appl. Math. **264**, 82–98 (2014).

26. S. F. Gilyazov and N. L. Gol’dman, *Regularization of Ill-Posed Problems by Iteration Methods* (Kluwer, Dordrecht, 2000).