

УДК 519.6; 550.8

doi 10.26089/NumMet.v17r327

АЛГОРИТМЫ 2D- И 3D-ИНТРОПРОДОЛЖЕНИЯ

Ю. В. Гласко¹

Рассматривается задача интропродолжения поля с целью локализации источников его аномалий. Предложены математическая модель поля (сводящаяся к задаче Дирихле, в которой в качестве границы области выступает дневная поверхность), а так же новые 2D- и 3D-алгоритмы решения указанной задачи. Алгоритмы локализации особых точек продолженного в нижнюю полуплоскость поля базируются на расчете конечно-разностных аппроксимаций полного нормированного градиента В. М. Березкина (КПНГ). Разработаны два конечно-разностных варианта интропродолжения, сокращающих (в сравнении с рядами Фурье) количество необходимой для работы алгоритма априорной информации. Представлен модельный пример работы методики в площадном (3D) варианте, позволяющий локализовать объекты по наблюдаемому гравитационному полю.

Ключевые слова: интропродолжение, полный нормированный градиент В. М. Березкина, конечно-разностный полный нормированный градиент, задача Дирихле, уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, математическая модель, обратная задача.

1. Введение. Применение методов и алгоритмов вычислительной математики в геофизике привело к появлению новых эффективных и экономичных методик поисков месторождений, в том числе нефти и газа. Методика поисков источников аномалий на дневной поверхности посредством расчета полного нормированного градиента гравитационного либо магнитного поля предложена в трудах В. М. Березкина и развита в работах Е. В. Булычева, В. Г. Филатова, М. Л. Овсепян и др. [2, 3, 6, 13]. Указанный подход является одним из наиболее перспективных направлений распространенной именно в России интерпретации данных геофизической аэроаэрозондировки посредством фильтрационных процедур. Методика интересна не только своей экономичностью, но и незначительной (в сравнении с подходом “остаточных аномалий”) априорной информацией. В рамках использования рядов Фурье для потенциальных полей метод полного нормированного градиента (ПНГ) является вариантом полосового фильтра, настроенного в соответствии с заданным количеством членов ряда. Суть же метода состоит в том, что полный нормированный градиент В. М. Березкина достигает максимальных значений именно в особых точках потенциального поля, продолжаемого с дневной поверхности в нижнее полупространство.

Отметим также, что применение методики для случая магнитного поля позволяет определять магнитные вкрапления в близкой к дневной поверхности области, которые идентифицируют залежь углеводородов, поскольку являются элементами ее вторичного магнитоминералообразования.

Численная реализация нашего подхода основывается на методе А. А. Самарского: объект–математическая модель–конечно-разностная аппроксимация–вычислительный алгоритм–программа–вычислительный эксперимент–анализ результатов (построение системы изолиний фильтра). Нами рассматриваются двумерный и трехмерный случаи. По сути, мы накладываем конечно-разностный фильтр ПНГ на продолжаемое в нижнее сеточное полупространство потенциальное поле (гравитационное либо магнитное).

2. Модель поля от источника, соответствующая обратная задача и методы ее решения. Потенциальное (в том числе гравитационное или магнитное) поле $u(X, z)$ от источника $f(X, z)$ в области $Q = \{X_1 \leq X \leq X_2, z > 0\}$ для оси аппликат, направленной с поверхности вглубь Земли, описывается уравнениями Лапласа и Пуассона [12, 13]. Здесь для 3D-случая примем обозначение $X = \{x, y\}$, а для 2D-случая примем обозначение $X = x$. Прямая задача для потенциального поля от источника имеет вид

$$\Delta u(X, z) = \begin{cases} -f(X, z) & \text{в источнике } (X, z) \in P, \\ 0 & \text{вне источника } (X, z) \in Q/P, \end{cases} \quad u(X, z)|_{\partial Q} = U_0(X), \quad X_1 \leq X \leq X_2.$$

Здесь U_0 — гравитационное либо магнитное поле на дневной поверхности Земли $z = 0$, измеренное посредством аэро съемки, и $\partial Q = \{X_1 \leq X \leq X_2, z = 0\}$.

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. математик, e-mail: glaskoyv@mail.ru

Для гравитационного поля [12]: $f(X, z) = C_n \gamma \rho(X, z)$, где $\rho(X, z)$ — плотность (распределение тяготеющих масс).

Для магнитного поля: $f(X, z) = C_n \mu(X, z)$, $\mu(X, z) = \operatorname{div} I(X, z)$, $\mu(X, z)$ — плотность, $I(X, z)$ — вектор намагниченности. В случае $n = 2$: $C_2 = 2\pi$, при $n = 3$: $C_3 = 4\pi$.

В общем случае имеется несколько наблюдаемых на поверхности источников поля, расположенных в $P = \bigcup_{s=1}^S P^s$ и имеющих значения $f(X, z) = \sum_{s=1}^S f_s(X, z)$.

Основываясь на приведенной выше первой краевой задаче, обратную задачу определения поля (следствия) и источника (причины), его вызвавшего, запишем в форме

$$U_0(X) \rightarrow \{f(X, z), u(X, z)\}.$$

Эта задача (особенно для нескольких источников $f(X, z) = \sum_{s=1}^S f_s(X, z)$) недоопределена и требует априорной информации.

Для ее решения следует использовать прямую задачу относительно уравнения Лапласа, обладающую в общем случае свойством единственности:

$$\Delta u(X, z) = 0, \quad (X, z) \in Q, \quad (1)$$

$$u(X, z)|_{\partial Q} = U_0(X), \quad X_1 \leq X \leq X_2. \quad (2)$$

Решение 2D-краевой задачи (1)–(2) на $(0; l)$, дополненной условиями сопряжения $u(0, 0) = 0$ и $u(l, 0) = 0$ на границе ∂Q , отвечающей дневной поверхности $z = 0$, ищется в виде ряда Фурье [5, 11]:

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n x}{l} e^{\pi z/l}, \quad \text{где} \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, 0) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (3)$$

От $U_0(x)$ требуется не более, чем кусочная непрерывность и кусочная дифференцируемость.

Решение задачи Дирихле (1)–(2) в полуплоскости дается интегралом Пуассона [5]

$$u(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_0(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + z^2}.$$

При аппроксимации области Q прямоугольником (параллелепипедом) с граничным условием, заданным только на дневной поверхности, мы имеем граничную обратную задачу относительно (1)–(2) [8].

В то же время для обратной задачи встает вопрос — как определить источник поля. Возможны два варианта решения проблемы. Во-первых, использование итерационного цикла с пересчетом поля от простого к двойному слою и оставлением части масс (если мы имеем дело с гравитационным полем) на том или ином уровне простого слоя [13]. Во-вторых, определение источника как особой точки полного нормированного градиента В. М. Березкина $G_H(X, z)$. Для нескольких источников следует применять ПНГ в цикле. Первый подход назовем концентрацией, а второй (в том числе для нескольких источников) — интропродолжением.

2D-вариант ПНГ предложен В. М. Березкиным и В. Г. Филатовым, в частности в [5]. Позднее разработана серия модификаций алгоритма на этом важнейшем для разведочной геофизики направлении интерпретации геополей. Одну из новых модификаций мы и рассмотрим далее. Кроме того, мы предложим 3D-модификацию метода ПНГ на основе 2D-модификации.

3. 2D-интропродолжение. Для 2D-случая непрерывный ПНГ относительно осей абсцисс и аппликат имеет вид

$$G_H(x, z) = \frac{\sqrt{u_x^2(x, z) + u_z^2(x, z)}}{\frac{1}{l} \int_0^l \sqrt{(u_x^2(x, z) + u_z^2(x, z))^\nu} dx}$$

где $[0; l]$ — область по оси абсцисс, на которой определен профиль поля $u(x, z)$.

На сетке $\{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, K\}$ имеем

$$G_H(x_i, z_k) = \frac{\sqrt{u_x^2(x_i, z_k) + u_z^2(x_i, z_k)}}{\frac{1}{M} \sum_{i=0}^M \sqrt{(u_x^2(x_i, z_k) + u_z^2(x_i, z_k))^\nu}}.$$

Аналогичные формулы имеют место для осей ординат и аппликат и сетки $\{0, \dots, N\} \times \{0, \dots, K\}$.

Мы предложим конечно-разностное интропродолжение поля с поверхности ∂Q^h в область Q^h . В рассматриваемом случае ∂Q соответствует дневной поверхности $z = 0$. Если мы не задаем значений поля $u(x, z)$ на гранях $x = 0$ и $x = l$ прямоугольника, аппроксимирующего рассматриваемую область Q , то следует выбрать для расчетов на сетке треугольник либо трапецию. Отметим, что l можно брать достаточно большим. В этом случае формулы алгоритма рассматриваются для $i_0 \leq i \leq M - i_0$ на каждом следующем уровне по z ($k = 0, 1, \dots, K - 1$) и соответствующему ему $i_0 = k + 1$.

Для потенциального поля в 2D-случае конечно-разностный полный нормированный градиент (алгоритм КПНГ) имеет вид

$$\begin{aligned} G(x_i, z_k) &= \sqrt{u_x^2(x_i, z_k) + u_z^2(x_i, z_k)}, \quad G_H(x_i, z_k) = \frac{G(x_i, z_k)}{G_{\text{cp}}(x_i, z_k)}, \\ G_{\text{cp}}(x_i, z_k) &= \frac{\sum_{m=i_0}^{M-i_0} G(x_m, z_k)}{M - 2i_0}, \quad i = i_0, \dots, M - i_0, \\ u_x^2(x_i, z_k) &= \frac{(u(x_{i+1}, z_k) - u(x_i, z_k))^2}{\Delta x^2}, \quad u_z^2(x_i, z_k) = \frac{(u(x_i, z_{k+1}) - u(x_i, z_k))^2}{\Delta z^2}, \quad \Delta x = \Delta z. \end{aligned} \tag{4}$$

Для расчета $u(x_i, z_k)$ можно использовать (3), при этом берется N_0 членов ряда. Для расчета коэффициентов B_n следует использовать сеточную аппроксимацию (5) [14]

$$B_n = \frac{2}{l} \sum_{i=0}^M u(x_i, 0) \Delta x \sin \frac{\pi n x_i}{l} = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^M u(i \Delta x, 0) \sin \frac{\pi n i}{M}. \tag{5}$$

Граничное условие для 2D-алгоритма КПНГ на дневной поверхности имеет вид

$$u(x_i, 0) = u(x_i, z_0) = U_0(x_i), \quad i = 0, \dots, M.$$

Перед основным циклом по $k = 0, \dots, K - 1$ (глубины $z = \Delta z, \dots, K \Delta z$) мы решим задачу Дирихле (1)–(2) в верхней полуплоскости посредством интеграла Пуассона с целью определения поля $u(x_i, z_{-1})$ на высоте шага Δz над дневной поверхностью $z = 0$. Такой инструмент позволяет усилить поле с целью более эффективного интропродолжения. Соответствующее условие на сетке имеет вид

$$u(x_i, z_{-1}) = \frac{\Delta z \Delta x}{\pi} \sum_{m=0}^M \frac{u(x_m, z_0)}{(x_m - x_i)^2 + \Delta z^2}.$$

Во внутренней области вместо рядов применим формулу

$$u(x_i, z_{k+1}) = 4u(x_i, z_k) - u(x_i, z_{k-1}) - u(x_{i+1}, z_k) - u(x_{i-1}, z_k), \quad 0 \leq k \leq K - 1. \tag{6}$$

Эта формула получается из конечно-разностной аппроксимации уравнения (1) на пятиточечном шаблоне типа “крест” при $\Delta x = \Delta z$ ($i = i_0, \dots, M - i_0, i_0 = k + 1$).

Второй вариант 2D-алгоритма КПНГ предполагает отсутствие потока $u_x(x, z)$ через грани $x = 0$ и $x = l$ прямоугольника. Аппроксимируем указанные условия правосторонней и левосторонней разностями ($k = 0, 1, \dots, K - 1$):

$$u(x_0, z_{k+1}) = u(x_1, z_{k+1}), \quad u(x_M, z_{k+1}) = u(x_{M-1}, z_{k+1}). \tag{7}$$

Поле рассчитывается на основе (6) для индексов $(1, \dots, M - 1) \times (0, \dots, K - 1)$.

Вместе с (4) на сетке $(x_0, \dots, x_M) \times (z_0, \dots, z_K)$ используем соотношения

$$\begin{aligned} G_{\text{cp}}(x_i, z_k) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M G(x_i, z_k), \\ u_x(x_i, z_k) &= \frac{u(x_{i+1}, z_k) - u(x_i, z_k)}{\Delta x}, \quad i = 0, \dots, M-1, \\ u_z(x_i, z_k) &= \frac{u(x_i, z_{k+1}) - u(x_i, z_k)}{\Delta z}, \quad k = 0, \dots, K-1, \\ u_{\bar{x}}(x_M, z_k) &= 0, \quad u_{\bar{z}}(x_i, z_K) = 0, \quad \Delta x = \Delta z. \end{aligned}$$

Этот вариант не связывает число узлов сетки по осям абсцисс и аппликат.

4. 3D-интропродолжение. В настоящее время все большее значение приобретает площадная обработка потенциальных полей, а с ней и развитие 3D-вариантов ПНГ. Расширим ПНГ В.М. Березкина на 3D-пространство.

При обработке поля на площади S , измеренного с определенным шагом (расстоянием между точками опорной сети) посредством аэромагнитосъемки, можно рассмотреть несколько профилей и для них рассчитать 2D ПНГ. Возможно рассчитать N_1 экземпляров 2D ПНГ относительно осей абсцисс и аппликат (для цикла $j = 0, \dots, N$; $N_1 = N + 1$) или же M_1 экземпляров 2D ПНГ относительно осей ординат и аппликат (для цикла $i = 0, \dots, M$; $M_1 = M + 1$). Возможно использовать $M_1 \times N_1$ профилей: сначала обработать N_1 профилей, затем M_1 профилей. Такой подход позволит в ряде случаев судить о 3D расположении особых точек ПНГ.

Однако следует отметить, что 3D ПНГ, основанный на сумме нескольких соответствующих числу профилей 2D ПНГ, дает удовлетворительную точность только при обработке профилей, пересекающих центральные части вытянутых не менее чем 1:4 аномалий.

Пример. Рассмотрим шар радиуса R с центром, расположенным на оси OZ на глубине $\zeta = 2$ км. Масса шара равна m . В соответствии с [5] рассчитывается его гравитационное поле $g(x, y)$ на дневной поверхности $z = 0$:

$$u(x, y) = g(x, y) = Gm \frac{\zeta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2)^{3/2}}, \quad m = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho_0), \quad G = 6.67 \times 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \times \text{с}^2},$$

где G — постоянная тяготения, ρ — плотность шара, ρ_0 — плотность вмещающих пород, (ξ, η, ζ) — координаты центра шара.

Сумма 2D ПНГ, рассчитанных для 25 профилей M_1 , пересекающих гравитационное поле от шара на дневной поверхности $z = 0$ (профили относительно осей ординат и аппликат), превращает изометрическую исходную аномалию в вытянутую примерно как 1:3 аномалию полного градиента, полученную при глубине пересчета, равной 2 км.

Для обработки площадных данных потенциального поля $u(x, z)$ на $l_1 \times l_2$ полный градиент следует нормировать для всех обрабатываемых профилей. На сетке для профиля $y = \text{const}_j = j * h_y$, где $h_y = \Delta y = \frac{l_2}{N}$ ($j = 0, \dots, N$), 3D ПНГ имеет следующий вид:

$$G_H^j(x, z) = \frac{G^j(x, z)}{G_{\text{cp}}(x, z)} = \frac{\sqrt{(u_x^{j2}(x, z) + u_z^{j2}(x, z))^\nu}}{\frac{1}{MN} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^M \sqrt{(u_x^{j2}(x, z) + u_z^{j2}(x, z))^\nu}}.$$

Здесь $u_x^{j2}(x, z) = u_x^2(x, \text{const}_j, z)$ и $u_z^{j2}(x, z) = u_z^2(x, \text{const}_j, z)$

Соответственно для серии профилей $j = 0, \dots, N$ 3D ПНГ имеет вид

$$G_H(x, z) = \sum_{j=0}^N G_H^j(x, z) \equiv \sum_{j=0}^N G_H(x, \text{const}_j, z).$$

На сетке для профиля $x = \text{const}'_i = i * h_x$, где $h_x = \frac{l_1}{M}$ ($i = 0, \dots, M$), 3D ПНГ имеет следующий вид:

$$G_H^i(y, z) = \frac{G^i(y, z)}{G_{\text{cp}}(y, z)} = \frac{\sqrt{(u_y^{i2}(y, z) + u_z^{i2}(y, z))^\nu}}{\frac{1}{MN} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \sqrt{(u_y^{i2}(y, z) + u_z^{i2}(y, z))^\nu}}.$$

Здесь $u_y^{i2}(y, z) = u_y^2(\text{const}'_i, y, z)$ и $u_z^{i2}(y, z) = u_z^2(\text{const}'_i, y, z)$.

Для серии профилей $i = 0, \dots, M$ 3D ПНГ имеет вид

$$G_H(y, z) = \sum_{i=0}^M G_H^i(y, z) \equiv \sum_{i=0}^M G_H(\text{const}'_i, y, z).$$

Расчет поля можно проводить с использованием рядов Фурье вида (3), (5). Мы используем конечно-разностные аппроксимации (6), (7) для (x, z) и с модификацией по числу шагов для (y, z) .

Приведенные варианты площадных ПНГ позволяют выделять аномалии, простирающиеся ортогонально к направлению профилей наблюдений или составляет с ними некоторый угол.

Если же указанные условия простираения аномалии не выполнены, то следует реализовать 3D ПНГ по взаимно ортогональным направлениям. Так, на сетке для профиля $y = \text{const}_j = j * h_y$, где $h_y = \frac{l_2}{N}$ ($j = 0, \dots, N$) и профиля $x = \text{const}'_i = i * h_x$, где $h_x = \frac{l_1}{M}$ ($i = 0, \dots, M$), 3D ПНГ имеет следующий вид: $G_H^{ji}(x, y, z) = G_H^j(x, z) + G_H^i(y, z)$, где $y = \text{const}_j$, $x = \text{const}'_i$.

В общем случае сначала следует провести расчеты по серии профилей с площадной нормировкой в одном направлении (профили, параллельные плоскости OXZ и задаваемые сеткой по оси OY) и вычислить сумму значений полного градиента, затем рассчитать ПНГ по серии профилей с площадной нормировкой в перпендикулярном направлении (профили, параллельные плоскости OYZ и задаваемые сеткой по оси OX) и вычислить соответствующую сумму значений полного градиента. Затем сложить полученные нормированные градиенты:

$$G_H(x, y, z) = \sum_{j=0}^N G_H^j(x, z) + \sum_{i=0}^M G_H^i(y, z), \tag{8}$$

где $y = \text{const}_j$, $j = 0, \dots, N$, $x = \text{const}'_i$, $i = 0, \dots, M$.

Введем обозначения: $u_x^j(x, z) \equiv u_x(x, \text{const}_j, z)$, $u_z^j(x, z) \equiv u_z(x, \text{const}_j, z)$, $u_y^i(y, z) \equiv u_y(\text{const}'_i, y, z)$, $u_z^i(y, z) \equiv u_z(\text{const}'_i, y, z)$.

Для расчетов 3D ПНГ используем следующие конечно-разностные аппроксимации:

$$u_x^{j2}(x_i, z_k) = \frac{(u^j(x_{i+1}, z_k) - u^j(x_i, z_k))^2}{\Delta x^2}, \quad u_z^{j2}(x_i, z_k) = \frac{(u^j(x_i, z_{k+1}) - u^j(x_i, z_k))^2}{\Delta z^2}, \tag{9}$$

$$u_x^j(x_M, z_k) = 0, \quad u_z^j(x_i, z_K) = 0, \tag{10}$$

$$u_y^{i2}(y_j, z_k) = \frac{(u^i(y_{j+1}, z_k) - u^i(y_j, z_k))^2}{\Delta y^2}, \quad u_z^{i2}(y_j, z_k) = \frac{(u^i(y_j, z_{k+1}) - u^i(y_j, z_k))^2}{\Delta z^2}, \tag{11}$$

$$u_y^i(y_N, z_k) = 0, \quad u_z^i(y_i, z_K) = 0. \tag{12}$$

Граничное условие для $U_0^j(x_i) \equiv U_0(x_i, \text{const}_j)$, $U_0^i(y_j) \equiv U_0(\text{const}'_i, y_j)$ при $i = 0, \dots, M$, $j = 0, \dots, N$:

$$u^j(x_i, 0) = u^j(x_i, z_0) = U_0^j(x_i), \quad u^i(y_j, 0) = u^i(y_j, z_0) = U_0^i(y_j). \tag{13}$$

Перед основным циклом по $k = 0, \dots, K - 1$ с целью определения поля на высоте шага Δz над дневной поверхностью $z = 0$ используем следующие формулы:

$$u(x_i, z_{-1}) = \frac{\Delta z \Delta x}{\pi} \sum_{m=0}^M \frac{u(x_m, z_0)}{(x_m - x_i)^2 + \Delta z^2}, \quad u(y_j, z_{-1}) = \frac{\Delta z \Delta y}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{u(y_n, z_0)}{(y_n - y_j)^2 + \Delta z^2}. \tag{14}$$

Конечно-разностные аппроксимации уравнения Лапласа (1) при $\Delta x = \Delta z$, $\Delta y = \Delta z$ ($0 \leq k \leq K - 1$) имеют следующий вид:

$$u^j(x_i, z_{k+1}) = 4u^j(x_i, z_k) - u^j(x_i, z_{k-1}) - u^j(x_{i+1}, z_k) - u^j(x_{i-1}, z_k), \quad 1 \leq i \leq M - 1, \quad (15)$$

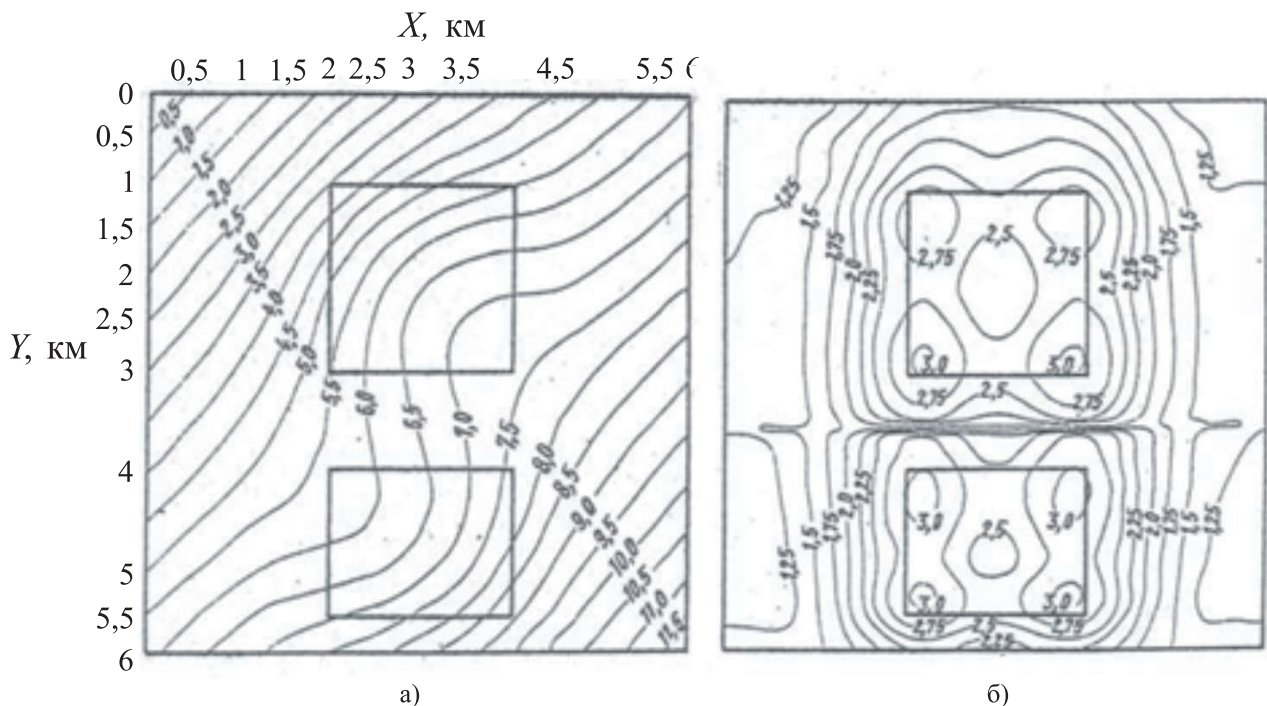
$$u^i(y_j, z_{k+1}) = 4u^i(y_j, z_k) - u^i(y_j, z_{k-1}) - u^i(y_{j+1}, z_k) - u^i(y_{j-1}, z_k), \quad 1 \leq j \leq N - 1. \quad (16)$$

Они дополняются условиями отсутствия потоков через грани соответствующих прямоугольников:

$$u^j(x_0, z_{k+1}) = u^j(x_1, z_{k+1}), \quad u^j(x_M, z_{k+1}) = u^j(x_{M-1}, z_{k+1}), \quad (17)$$

$$u^i(y_0, z_{k+1}) = u^i(y_1, z_{k+1}), \quad u^i(y_N, z_{k+1}) = u^i(y_{N-1}, z_{k+1}). \quad (18)$$

Алгоритм можно рассмотреть и для системы сеток вида треугольников либо трапеций.



Гравитационное поле над двумя уступами (а), поле полного градиента на глубине $H = 4500$ м (б)

5. Модельный пример. Применим 3D ПНГ (8)–(18) для обработки гравитационного поля. Рассмотрим два параллелепипеда, верхняя (по оси аппликат) грань каждого из которых расположена на глубине 4.5 км, высота каждого из них 0.5 км. Размеры по осям абсцисс и ординат 2 км \times 2 км и 2 км \times 1.6 км. Параллелепипеды расположены на расстоянии 1 км по оси ординат. Заданы избыточные плотности 0.2 г/см³ и -0.2 г/см³, которые соответствуют границе фундамента — осадочному чехлу. Таким образом, объекты представляют два выступа в фундаменте.

Гравитационное поле рассчитывалось для площади $S = 6$ км \times 6 км при шаге $h_x = h_y = 0.5$ км. На рисунке (а) представлено гравитационное поле от описанных объектов на площади S дневной поверхности $z = 0$. Эффект от образующих аномалию поля объектов проявляется в виде изгиба изолиний. Таким образом, определить расположение аномальных объектов весьма затруднительно. На рисунке (б) представлены значения 3D ПНГ при $z = 4.5$ км. По изолиниям полного нормированного градиента хорошо определяется форма аномалиеобразующих тел.

Вершины параллелепипедов проявляются как локальные максимумы $G_H(x, y, 4.5$ км), ребрам тоже соответствуют повышенные значения полного нормированного градиента. Центру тяжести каждого объекта отвечает относительный локальный минимум.

Приведенный модельный пример показывает высокую разрешающую способность разработанного алгоритма — возможность разделения объектов, расположенных на значительной глубине, уверенное выделение особых точек в 3D-пространстве на заданной глубине, а также возможность определения формы объектов по взаимному расположению особых точек.

6. Заключение. В настоящей статье рассмотрены два варианта алгоритмов 2D- и 3D-интропродолжения. Они реализуются посредством конечно-разностных аппроксимаций полного нормированного градиента, уравнения Лапласа и соответствующих граничных условий. Для конечно-разностного ПНГ строится система изолиний для определения особых точек поля (гравитационного либо магнитного). На модельном примере для гравитационного поля продемонстрирована эффективность рассмотренного подхода при локализации двух геологических объектов — выступов фундамента, расположенных на значительной глубине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 2. М.: Физматлит, 1960.
2. Березкин В.М. Метод полного градиента при геофизической разведке. М.: Недра, 1988.
3. Березкин В.М., Жбанков Ю.В., Филатов В.Г., Трайнин П.Н., Бульчов Е.В., Метиев Р. Методические рекомендации по технологии площадной обработки и интерпретации гравимагнитных данных. М.: Нефтегеофизика, 1992.
4. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
5. Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Е. А. Мудрецовоу. М.: Недра, 1981.
6. Никитин А.А., Петров А.В., Мегеря В.М., Старостенко В.И., Филатов В.Г., Лобанов А.М. Оптимальная фильтрация и интропродолжение геополей с учетом вторичного магнитоминералообразования в нефтегазоразведке. М.: НТ Пресс, 2011.
7. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
8. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Эдиториал, 2004.
9. Страхов В.Н. О выметании масс по Пуанкаре и его использовании при решении прямых и обратных задач гравиметрии // ДАН СССР. 1977. **236**, № 1. 54–57.
10. Страхов В.Н. К теории плоской задачи гравиметрии и магнитометрии — “аналитический мир”, порождаемый выметанием Пуанкаре // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1978. № 2. 47–73.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
12. Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: БИНОМ, 2014.
13. Филатов В.Г. Устойчивые способы обработки и интерпретации потенциальных полей на основе регуляризации и концентрации источников. Автореферат на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Киев: ИГ АН УССР. 1988.
14. Гласко Ю.В. Задача концентрации масс // Физика Земли. 2015. № 2. 37–43.
15. Гласко Ю.В. Численный аспект алгоритма 3.5D концентрации масс // Труды VI Международной научной школы-конференции для молодых ученых по теории и методам решения обратных и некорректно-поставленных задач. Т. 12. Новосибирск: СЭМИ, 2015. 197–205.

Поступила в редакцию
14.06.2016

2D and 3D Algorithms of Introcontinuation

Yu. V. Glasko¹

¹ *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Leading Mathematician, e-mail: glaskoyv@mail.ru*

Received June 14, 2016

Abstract: The introcontinuation of a potential field for the localization of sources in the field’s anomalies is discussed. A mathematical model of the field is proposed on the basis of the Dirichlet problem with a condition on the day surface. New 2D and 3D algorithms are developed to determine the critical points for the field continued into the lower half-plane. These algorithms are based on a finite-difference approximation of Berezkin’s complete normalized gradient and on the determination of its critical points. Two versions of the finite-difference introcontinuation reduce a priori information requiring for the algorithms. A model experiment for the areal version (3D) procedure is considered to illustrate the determination of objects by the observed gravity field.

Keywords: introcontinuation, Berezkin's complete normalized gradient, finite-difference complete normalized gradient, Dirichlet problem, Laplace equation, Poisson equation, mathematical model, inverse problem.

References

1. I. S. Berezin and N. P. Zhidkov, *Computing Methods* (Fizmatgiz, Moscow, 1960; Pergamon, Oxford, 1965), Vol. 2.
2. V. M. Berezkin, *Full Gradient Technique in Geophysical Survey* (Nedra, Moscow, 1988) [in Russian].
3. V. M. Berezkin, Yu. V. Zhbakov, V. G. Filatov, et al., *Technical Recommendations on Technology of Areal Gravimetric Data Processing and Interpretation* (Neftegeofizika, Moscow, 1992) [in Russian].
4. A. B. Vasil'eva and N. A. Tikhonov, *Integral Equations* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1989) [in Russian].
5. E. A. Mudretsova (Ed.), *Gravity Survey. Reference Book* (Nedra, Moscow, 1981) [in Russian].
6. A. A. Nikitin, A. V. Petrov, V. M. Megerya, et al., *Optimal Filtration and Intro-Continuation of Geofields Considering Secondary Magneto-Mineral Genesis in the Oil and Gas Exploration* (NT Press, Moscow, 2011) [in Russian].
7. A. A. Samarskii and V. B. Andreev, *Difference Methods for Elliptic Equations* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
8. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics* (Editorial, Moscow, 2004; Gruyter, Berlin, 2007).
9. V. N. Strakhov, "Sweeping of Masses in the Sense of Poincare and Its Application to the Solution of Direct and Inverse Problems of Gravimetry," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **236** (1), 54–57 (1977).
10. V. N. Strakhov, "On the Theory of the Plane Problems of Gravimetry and Magnetometry: the Analytical World Generated by the Poincare's Balayage," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. Zemli*, No. 2, 47–73 (1978).
11. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1977; Dover, New York, 1990).
12. A. G. Yagola, Wang Yanfei, I. E. Stepanova, and V. N. Titarenko, *Inverse Problems and Methods of Their Solution. Applications to Geophysics* (Binom, Moscow, 2014) [in Russian].
13. V. G. Filatov, *Stable Methods for Processing and Interpretation of the Potential Fields Based on the Regularization and Concentration of Sources* Doctoral Dissertation in Mathematics and Physics (Inst. Geophys., Kiev, 1988).
14. Yu. V. Glasko, "The Problem of Concentration of Masses," *Fiz. Zemli*, No. 2, 37–43 (2015) [*Izv., Phys. Solid Earth* **51** (2), 191–196 (2015)].
15. Yu. V. Glasko, "A Numerical Aspect of the 3.5D Mass Concentration Algorithm," in *Proc. VI Int. Sci. School-Conf. for Young Scientists on Theory and Numerical Methods for Solving Inverse and Ill-Posed Problems, Novosibirsk, Russia, September 15–25, 2014* (Sib. Electron. Mat. Izv., Novosibirsk, 2015), Vol. 12, pp. 197–205.