УДК 517.956.37 doi 10.26089/NumMet.v17r328

ПОВЫШЕНИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Д. А. Иванов[1]

Для волнового уравнения на промежутках докритической длины рассмотрены задачи с двусторонними граничными управлениями трех основных типов в классах слабых обобщенных решений. Для устойчивого приближенного вычисления граничных управлений предложен метод, основанный на предварительном сглаживании фазовых траекторий, применении вариационного метода в классах сильных обобщенных решений и финальном дифференцировании найденных сглаженных управлений. Приведены вычислительные иллюстрации.

Ключевые слова: волновое уравнение, обобщенное решение, граничное управление, докритический промежуток, неточные данные, приближенное решение, сходимость.

1. Введение. В настоящей статье для волнового уравнения рассматриваются задачи с двусторонними граничными управлениями, форма записи введена в [1, 2]:

$$y_{tt} = y_{xx} - \theta(x)\, y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$-\beta_0 y_x + \sigma_0 y \,\big|_{\,x=0} = u_0(t), \quad \beta_1 y_x + \sigma_1 y \,\big|_{\,x=l} = u_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$y \,\big|_{\,t=0} = 0, \quad y_t \,\big|_{\,t=0} = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Требуется найти пару граничных управлений $u = \big(u_0(t), u_1(t)\big)$, переводящих систему (1)–(3) в заданный момент $t = T$ в заданное целевое состояние $f = \big(f^0(x), f^1(x)\big)$:

$$y \,\big|_{\,t=T} = f^0(x), \quad y_t \,\big|_{\,t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l. \tag{4}$$

Параметры задачи T, l, β_0, β_1, σ_0, σ_1 и функция $\theta(x)$ предполагаются заданными, причем, как и в [1, 2],

$$T > 0, \quad l > 0, \quad \beta_i = 0 \vee 1, \quad \beta_i + |\sigma_i| > 0, \quad i = 0, 1, \quad \theta(x) \in C[0, l].$$

Как и в [2], под $y = y(t, x)$ понимается *слабое* обобщенное решение начально-краевой задачи (1)–(3). Длину T временнóго промежутка будем считать строго докритической: $T < T_*$. Для таких T не все цели f достижимы, но управления, приводящие систему в достижимые состояния, обязательно единственны [2]. В рассматриваемом здесь случае уравнения (1) с единичными коэффициентами при старших производных критический момент равен $T_* = l$. Приближения к граничным управлениям, решающим задачу (1)– (4) в классическом смысле или в смысле наименьших квадратов, можно находить непосредственно в исходных слабых классах с помощью вариационного метода [3, 4], извлекая необходимую для этого априорную информацию из полученных в [2] конструктивных оценок непрерывной обратимости оператора управления.

В настоящей статье исследуются возможности альтернативного подхода к отысканию приближенных граничных управлений, состоящего из следующих трех этапов. Сначала осуществляется переход к задаче граничного управления в классе *сильных* обобщенных решений, затем применяется вариационный метод [3, 4] со значениями параметров алгоритма, взятыми из полученных в [1] оценок для сильных обобщенных решений, после чего с помощью дифференцирования осуществляется возврат к исходным слабым классам. Ниже будет установлена сильная сходимость управлений, конструируемых описанным способом, и приведены результаты соответствующих численных экспериментов.

Укажем на мотивы поиска и исследования альтернативных путей решения задачи (1)–(4), которые инициировали написание данной статьи. Во-первых, появляется возможность использовать для вычислений уже готовый программный модуль, решающий задачу (1)–(4) в более гладких классах. Во-вторых,

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; аспирант, e-mail: deniaru91@gmail.com

представляет интерес раскрытие связей между постановками задач управления (1)–(4) и их решениями в сильных и слабых классах, о чем пойдет речь в разделе 3.

2. Уточнение постановки задачи и процедура сглаживания. Как и в [2], будем рассматривать слабые классы H_0 и H_1 левосторонних и правосторонних управлений:

$$u_0(t) \in H_0, \quad u_1(t) \in H_1, \quad u = (u_0, u_1) \in H = H_0 \times H_1.$$

Выбор пространств H_0 и H_1 будет зависеть от типа соответствующего граничного условия, точнее, от значений входящих в эти условия коэффициентов β_0 и β_1:

$$H_i = L^2(0,T) \quad \text{при} \quad \beta_i = 0; \quad H_i = \big(H^1(0,T)\big)^* \quad \text{при} \quad \beta_i = 1, \quad i = 0,1. \tag{5}$$

Здесь $L^2(0,T)$ — пространство Лебега, а $\big(H^1(0,T)\big)^*$ — пространство, сопряженное к пространству Соболева $H^1(0,T)$. Основные пространства наделяются следующими скалярными произведениями:

$$\langle f,\, g\rangle_{L^2(0,T)} = \int\limits_0^T f(t)\, g(t)\, dt\,, \quad \langle f,\, g\rangle_{H^1(0,T)} = \int\limits_0^T f'(t)\, g'(t)\, dt + \frac{1}{l}\, f(T)g(T). \tag{6}$$

Изоморфизм между пространствами $\big(H^1(0,T)\big)^*$ и $H^1(0,T)$ осуществляется оператором Рисса $J_{H^1(0,T)}$: $\big(H^1(0,T)\big)^* \to H^1(0,T)$, действие $\xi = J_{H^1(0,T)}\, u$ которого при выборе скалярных произведений (6) и принятии договоренности об отождествлении $\big(L^2(0,T)\big)^* \simeq L^2(0,T)$ описывается краевой задачей

$$-\xi''(t) = u(t), \quad 0 < t < T, \quad \xi'(0) = 0, \quad \xi'(T) + \frac{1}{l}\, \xi(T) = 0.$$

При этом $\|\xi\|_{H^1(0,T)} = \|u\|_{(H^1(0,T))^*}$ и для регулярных управлений $u \in L^2(0,T)$ имеем

$$\|u\|^2_{(H^1(0,T))^*} = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^t u(\tau)\, d\tau\right)^2 dt + l\, \left(\int\limits_0^T u(t)\, dt\right)^2. \tag{7}$$

Управлениям $u = u(t)$ класса (5), (6) соответствуют финальные состояния $y(T,x) \in L^2(0,l)$ и финальные скорости $y_t(T,x) \in \big(F^1\big)^*$, где $L^2(0,l)$ — пространство Лебега со скалярным произведением

$$\langle f,\, g\rangle_{L^2(0,l)} = \int\limits_0^l f(x)\, g(x)\, dx\,, \tag{8}$$

а $\big(F^1\big)^*$ — пространство, сопряженное к пространству Соболева,

$$F^1 = \Big\{ f(x) \in H^1(0,l) \,\Big|\, (1-\beta_0)\, f(0) = 0, \quad (1-\beta_1)\, f(l) = 0 \Big\}. \tag{9}$$

С учетом этих свойств при выборе в (4) целевых состояний f целесообразно соблюдать условие

$$f = \big(f^0(x), f^1(x)\big) \in F = L^2(0,l) \times \big(F^1\big)^*.$$

Скалярное произведение в пространстве F^1 можно задавать по-разному. Одним из удобных вариантов является его привязка к виду дифференциального уравнения (1) и граничных условий (2). Вместо явных требований знакоопределенности коэффициентов $\theta(x)$ и σ_i потребуем, чтобы выполнялось следующее

Условие A1. Пусть при некоторых $\sigma_i^+ \geqslant \sigma_i$, $i = 0,1$, билинейная форма

$$\langle f,\, g\rangle_{F^1} = \int\limits_0^l \big(f'(x)g'(x) + \theta(x)f(x)g(x)\big)\, dx + \beta_0\sigma_0^+ f(0)g(0) + \beta_1\sigma_1^+ f(l)g(l) \tag{10}$$

является скалярным произведением в пространстве F^1.

Тогда после принятия обычной договоренности об отождествлении $\big(L^2(0,l)\big)^* \simeq L^2(0,l)$ изоморфизм Рисса $J_{F^1} : \big(F^1\big)^* \to F^1$, $\eta = J_{F^1}\, f^1$, $\|\eta\|_{F^1} = \big\|f^1\big\|_{\left(F^1\right)^*}$, между пространствами $\big(F^1\big)^*$ и F^1 в соответствии с (8), (10) может быть описан краевой задачей

$$\eta''(x) - \theta(x)\eta(x) = -f^1(x), \quad 0 < x < l; \quad -\beta_0\eta'(0) + \sigma_0^+\eta(0) = 0, \quad \beta_1\eta'(l) + \sigma_1^+\eta(l) = 0\,. \tag{11}$$

Запишем задачу управления (1)–(4) в форме операторного уравнения

$$\mathcal{A}u = f, \quad \mathcal{A}u = \big(y(T,x), y_t(T,x)\big), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F). \tag{12}$$

В работе [2] в классах слабых обобщенных решений $y = y(t,x)$ дифференциальной задачи (1)–(3) при $T < T_*$ были получены конструктивные оценки вида

$$\|\mathcal{A}u\|_F^2 \geqslant \nu\|u\|_H^2 \quad \forall u \in H, \quad \nu = (T_* - T)/\mathcal{N},$$

в которых значение постоянной $\mathcal{N}$ известно. Данные оценки пригодны для организации устойчивых вычислений управления $u(t)$ с помощью вариационного метода [3, 4] по схеме, описанной в [1]. Напомним, что соответствующий алгоритм представляет собой двухэтапную вычислительную процедуру. На первом этапе вариационным методом находится проекция $w = \big(w^0(x), w^1(x)\big)$ целевой пары $f = \big(f^0(x), f^1(x)\big)$ на область значений $R(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$, а на втором этапе тем же вариационным методом находится управление $u(t)$, приводящее систему в состояние w.

В данной работе исследуются возможности альтернативного способа вычисления оптимальных граничных управлений в предположении, что цель $f \in F$ достижима за время $T < T_*$, т.е. $w = f$ и первый этап алгоритма пропускается. В этом случае оптимальные управления $u(t)$ могут быть построены с помощью сглаживания — приема, хорошо известного для гиперболических уравнений:

$$Y(t,x) = \int\limits_0^t y(\tau,x)\,d\tau. \tag{13}$$

Введем обозначение для задействованного в (13) оператора интегрирования:

$$\mathcal{I}: \quad v(\cdot) \longmapsto \mathcal{I}v(t) = \int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Определенные в (13) функции $Y = \mathcal{I}y$ будут сильными (т.е. на порядок более регулярными по сравнению с y) обобщенными решениями начально-краевой задачи

$$Y_{tt} = Y_{xx} - \theta(x)\,Y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \tag{15}$$

$$-\beta_0 Y_x + \sigma_0 Y\,\big|_{\,x=0} = \mathcal{I}u_0(t), \quad \beta_1 Y_x + \sigma_1 Y\,\big|_{\,x=l} = \mathcal{I}u_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{16}$$

$$Y\,\big|_{\,t=0} = 0, \quad Y_t\,\big|_{\,t=0} = 0, \quad 0 < x < l, \tag{17}$$

удовлетворяющими финальным условиям

$$Y\,\big|_{\,t=T} = \mathcal{I}y\,\big|_{\,t=T}, \quad Y_t\,\big|_{\,t=T} = f^0(x), \quad 0 < x < l. \tag{18}$$

Поясним, что понимается в граничных условиях (16) под интегралами $\mathcal{I}u_i(t) = \int\limits_0^t u_i\,d\tau$ в случае нерегулярных управлений $u_i \in \big(H^1(0,T)\big)^*$, $u_i \notin L^2(0,T)$. Заметим, что на всюду плотном в $\big(H^1(0,T)\big)^*$ подмножестве регулярных функционалов $w = w(t) \in L^2(0,T)$ оператор интегрирования (14) является линейным непрерывным отображением из $\big(H^1(0,T)\big)^*$ в $L^2(0,T)$:

$$\|\mathcal{I}w\|^2_{L^2(0,T)} = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^t w(\tau)\,d\tau\right)^2 dt \leqslant \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^t w(\tau)\,d\tau\right)^2 dt + l\left(\int\limits_0^T w(t)\,dt\right)^2 \overset{(7)}{=} \|w\|^2_{(H^1(0,T))^*}.$$

В таком случае у оператора $\mathcal{I}$ существует единственное продолжение по непрерывности на все пространство $\big(H^1(0,T)\big)^*$. Именно его значения и подразумеваются в записи граничных условий (16). Введем обозначения для сглаженных управлений:

$$\widehat{u} = \widehat{u}(t) = \big(\widehat{u}_0(t), \widehat{u}_1(t)\big), \quad \widehat{u}_i(t) = \mathcal{I}u_i(t), \quad i = 0,1. \tag{19}$$

В исходной слабой постановке задачи (1)–(4) граничные управления $u(t)$ выбираются из описанного в (5), (6) пространства H. При этом в сильной постановке (15)–(18) управления и целевые состояния в соответствии с (19), (18) окажутся в следующих классах, в точности совпадающих с рассмотренными в [1]:

$$\begin{gathered} \widehat{u} \in \widehat{H} = \widehat{H}_0 \times \widehat{H}_1, \qquad \widehat{f} \in \widehat{F} = H^1(0,l) \times L^2(0,l), \\ \widehat{H}_i = H^1\big(\overset{\circ}{0},T\big) \quad \text{при} \quad \beta_i = 0, \quad \widehat{H}_i = L^2(0,T) \quad \text{при} \quad \beta_i = 1, \quad i = 0,1. \end{gathered} \tag{20}$$

3. Связь между исходной и сглаженной постановками. При $\beta_i = 0$, когда $H_i = L^2(0,T)$ и $\widehat{H}_i = H^1\big(\overset{\circ}{0},T\big)$, оператор интегрирования $\mathcal{I}$ является непрерывно обратимым, так как

$$\|\mathcal{I}u_i\|^2_{H^1\left(\overset{\circ}{0},T\right)} = \int\limits_0^T (\mathcal{I}u_i)'(t)\,dt = \|u_i\|^2_{L^2(0,T)} \quad \forall u_i \in L^2(0,T), \quad i = 0,1. \tag{21}$$

При $\beta_i = 1$, когда $H_i = \big(H^1(0,T)\big)^*$, $\widehat{H}_i = L^2(0,T)$, оператор $\mathcal{I}$ теряет свойство обратимости, поскольку его ядро $N(\mathcal{I})$ содержит, например, нетривиальный функционал $\delta(t-T) \in \big(H^1(0,T)\big)^*$ — дельта-функцию Дирака, сосредоточенную в концевой точке T временно́го промежутка $(0,T)$. Для однозначного восстановления управлений $u_i \in \big(H^1(0,T)\big)^*$ в исходной задаче (1)–(4) по решениям $\widehat{u}_i(t) \in L^2(0,T)$ сглаженной задачи (15)–(18) нам понадобятся специальные разложения сопряженных пространств $\big(F^1\big)^*$ и $\big(H^1(0,T)\big)^*$. Напомним, что основное пространство F^1 определено в (9), а скалярные произведения в F^1 и $H^1(0,T)$ введены по правилам (10) и (6). Начнем с разложения пространства $\big(F^1\big)^*$, в котором будет участвовать пространство Соболева $H^1_0(0,l) = \Big\{f(x) \in H^1(0,l) \,\big|\, f(0) = f(l) = 0\Big\}$ и сопряженное к нему пространство $H^{-1}(0,l) = (H^1_0(0,l))^*$. Обратим внимание на то, что при $\beta_0 = \beta_1 = 0$ пространства F^1 и $H^1_0(0,l)$ совпадают, поэтому интерес представляет случай, когда хотя бы один из коэффициентов β_i отличен от нуля.

Лемма 1. *Пусть $\beta_0 + \beta_1 > 0$. Тогда пространство $\big(F^1\big)^*$ раскладывается в ортогональную сумму*

$$\big(F^1\big)^* = \big(F^1\big)^*_0 \oplus \operatorname{span}\big\{\beta_0\delta(x),\, \beta_1\delta(x-l)\big\}, \quad \big(F^1\big)^*_0 = J^{-1}_{F^1} H^1_0(0,l), \tag{22}$$

т.е. произвольный функционал $f^1 \in \big(F^1\big)^*$ единственным образом представим в виде

$$f^1 = f^1_0 + c_0\beta_0\delta(x) + c_1\beta_1\delta(x-l), \quad f^1_0 \in \big(F^1\big)^*_0, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0,1, \tag{23}$$

причем для компоненты f^1_0 этого разложения выполняется равенство норм:

$$\big\|f^1_0\big\|_{(F^1)^*} = \big\|f^1_0\big\|_{H^{-1}(0,l)}. \tag{24}$$

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{span}\big\{\beta_0\delta(x),\, \beta_1\delta(x-l)\big\} = \Big(\big(F^1\big)^*_0\Big)^\perp$.

Если $h \in \operatorname{span}\big\{\beta_0\delta(x),\, \beta_1\delta(x-l)\big\}$, то $\big\langle h, g^1\big\rangle_{(F^1)^*} = \big\langle h, J_{F^1}g^1\big\rangle = 0$ $\forall g^1 \in \big(F^1\big)^*_0$, следовательно, $\operatorname{span}\big\{\beta_0\delta(x), \beta_1\delta(x-l)\big\} \subseteq \Big(\big(F^1\big)^*_0\Big)^\perp$. Если же $h \in \Big(\big(F^1\big)^*_0\Big)^\perp$, то $0 = \big\langle h, g^1\big\rangle_{(F^1)^*} = \big\langle h, J_{F^1}g^1\big\rangle$ $\forall g^1 \in \big(F^1\big)^*_0$; следовательно, $\Big(\big(F^1\big)^*_0\Big)^\perp \subseteq \operatorname{span}\big\{\beta_0\delta(x),\, \beta_1\delta(x-l)\big\}$ и, тем самым, разложение (22) и представление (23) установлены. Для доказательства равенства (24) запишем определение норм, входящих в обе его части, и учтем вид скалярного произведения (10) в пространстве F^1, а также равенство $\|\varphi\|_{F^1} = \|\varphi\|_{H^1_0(0,l)}$ $\forall\,\varphi(x) \in H^1_0(0,l)$: $\big\|f^1_0\big\|_{(F^1)^*} = \big\|J_{F^1}f^1_0\big\|_{F^1} = \big\|J_{F^1}f^1_0\big\|_{H^1_0}$,

$$\big\|f^1_0\big\|_{H^{-1}} = \sup_{\varphi\in H^1_0,\ \varphi\neq 0} \frac{\big\langle f^1_0, \varphi\big\rangle}{\|\,\varphi\|_{H^1_0}} = \sup_{\varphi\in H^1_0,\ \varphi\neq 0} \frac{\big\langle J_{F^1}f^1_0, \varphi\big\rangle_{F^1}}{\|\varphi\|_{H^1_0}} = \sup_{\varphi\in H^1_0,\ \varphi\neq 0} \frac{\big\langle J_{F^1}f^1_0, \varphi\big\rangle_{H^1_0}}{\|\varphi\|_{H^1_0}} = \big\|J_{F^1}f^1_0\big\|_{H^1_0}.$$

Лемма 1 доказана.

Выясним, какие именно управления генерируют краевые дельта-всплески в разложении (23) финальной скорости. Для определенности рассмотрим случай, когда $\beta_0 = \beta_1 = 1$, оба управления выбираются из пространства $\big(H^1(0,T)\big)^*$, а финальные скорости принадлежат пространству $\big(H^1(0,l)\big)^*$.

Лемма 2. *Управления вида* $u = \big(\alpha_0\,\delta(t-T),\, \alpha_1\,\delta(t-T)\big) \in H = \big(H^1(0,T)\big)^* \times \big(H^1(0,T)\big)^*$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1$, *и только они, приводят систему* (1)–(3) *за докритическое время* $T < T_* = l$ *в финальное состояние* $f^0(x) \equiv 0$ *с финальной скоростью* $f^1(x) = \alpha_0\,\delta(x) + \alpha_1\,\delta(x-l) \in \big(H^1(0,l)\big)^*$.

Доказательство. Действие сопряженного к оператору $\mathcal{A}$ из (12) отображения $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(F^* \to H^*)$ описывается следующей начально-краевой задачей с обратным течением времени:

$$p_{tt} = p_{xx} - \theta(x)\,p, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \tag{25}$$

$$-\beta_0 p_x + \sigma_0 p\,\big|_{x=0} = 0, \quad \beta_1 p_x + \sigma_1 p\,\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \tag{26}$$

$$p\,\big|_{t=T} = v^0(x), \quad p_t\,\big|_{t=T} = -v^1(x), \quad 0 < x < l. \tag{27}$$

В рассматриваемом здесь случае $\beta_0 = \beta_1 = 1$ имеем $v = \big(v^0(x),\, v^1(x)\big) \in F^* = H^1(0,l) \times L^2(0,l)$; соответствующие таким v функции $p = p(t,x)$ будут сильными обобщенными решениями задачи (25)–(27), и через их граничные следы будут выражаться значения сопряженного оператора:

$$\mathcal{A}^* v = \big(p(t,0),\, p(t,l)\big) \in H^* = H^1(0,T) \times H^1(0,T).$$

Запишем тождество из определения сопряженного оператора и зафиксируем в нем управление u из условия леммы:

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \langle u, \mathcal{A}^* v\rangle \quad \forall\, v \in F^*. \tag{28}$$

Преобразуем правую часть (28):

$$\langle u, \mathcal{A}^* v\rangle = \alpha_0 p(T,0) + \alpha_1 p(T,l) \overset{(27)}{=} \alpha_0 v^0(0) + \alpha_1 v^0(l) =$$
$$= \big\langle \alpha_0\delta(x) + \alpha_1\delta(x-l),\, v^0\big\rangle = \Big\langle \big(0,\, \alpha_0\delta(x) + \alpha_1\delta(x-l)\big),\, \big(v^0,\, v^1\big)\Big\rangle \quad \forall\, v = \big(v^0, v^1\big) \in F^*.$$

Отсюда и из (28) следует, что $\mathcal{A}u = \big(0,\, \alpha_0\delta(x) + \alpha_1\delta(x-l)\big)$. Лемма 2 доказана.

Для пространства $\big(H^1(0,T)\big)^*$, из которого при $\beta_i = 1$ в задаче (1)–(4) выбираются граничные управления $u_i(t)$, справедливо разложение, аналогичное (22). В нем будут участвовать пространство Соболева $H^1\big(0,\overset{\circ}{T}\big) = \Big\{f(t) \in H^1(0,T)\,\big|\, f(T) = 0\Big\}$ и дельта-функция $\delta(t-T)$. Соответствующую формулировку приведем без доказательства, поскольку оно аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. *Пространство* $\big(H^1(0,T)\big)^*$ *раскладывается в ортогональную сумму*

$$\big(H^1(0,T)\big)^* = \big(H^1(0,T)\big)^*_0 \oplus \operatorname{span}\big\{\delta(t-T)\big\}, \quad \big(H^1(0,T)\big)^*_0 = J_{H^1}^{-1} H^1\big(0,\overset{\circ}{T}\big), \tag{29}$$

т.е. произвольный элемент $v \in \big(H^1(0,T)\big)^*$ *единственным образом представим в виде*

$$v = v_0 + c\,\delta(t-T), \quad v_0 \in \big(H^1(0,T)\big)^*_0, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

причем для компоненты v_0 *этого разложения выполняется равенство* $\|v_0\|_{\left(H^1(0,T)\right)^*} = \|v_0\|_{\left(H^1(0,\overset{\circ}{T})\right)^*}$.

В случае $\beta_0 = \beta_1 = 1$, когда оба разложения (22) и (29) содержательны, укажем связь между представителями их главных компонент из подпространств $\big(F^1\big)^*_0$ и $\big(H^1(0,T)\big)^*_0$.

Лемма 4. *Пусть* $\beta_0 = \beta_1 = 1$ *и цель* $f = \big(f^0, f^1\big) \in F = L^2(0,l) \times \big(F^1\big)^*$ *достижима за время* $T < T_*$ *под действием (единственного) управления* $u = (u_0,\, u_1) \in H = \big(H^1(0,T)\big)^* \times \big(H^1(0,T)\big)^*$, *а скоростная компонента* f^1 *цели* f *представлена в виде* (23). *Тогда каждое из управлений* u_i, $i = 0,1$, *представимо в виде* (30): $u_i(t) = u_i^0 + c_i\,\delta(t-T)$, $u_i^0 \in \big(H^1(0,T)\big)^*_0$, *причем значения коэффициентов* c_i, $i = 0,1$, *в точности такие же, что и в разложении* (23) *для* f^1. *Под действием управлений* $u^0 = \big(u_0^0,\, u_1^0\big) \in \big(H^1(0,T)\big)^*_0 \times \big(H^1(0,T)\big)^*_0$ *система* (1)–(3) *за то же самое время* $T < T_*$ *перейдет в состояние* $\big(f^0, f^1_0\big) \in L^2(0,l) \times \big(F^1\big)^*_0$.

Доказательство леммы 4 следует непосредственно из лемм 1–3 и единственности управлений на докритических промежутках $T < T_*$.

Теперь уточним характер действия оператора интегрирования (14) на подпространстве $\big(H^1(0,T)\big)^*_0$.

Лемма 5. *Сужение оператора интегрирования* (14) *на подпространство* $\big(H^1(0,T)\big)^*_0$ *является изометричным, а значит, непрерывно обратимым отображением:*

$$\|\mathcal{I}g\|^2_{L^2(0,T)} = \|g\|^2_{\left(H^1(0,T)\right)^*} \quad \forall\, g \in \big(H^1(0,T)\big)^*_0. \tag{31}$$

Для доказательства достаточно заметить, что для любого функционала $g \in \big(H^1(0,T)\big)^*_0$ имеем

$$\|\mathcal{I}g\|^2_{L^2(0,T)} = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^t g(\tau)\,d\tau\right)^2 dt \overset{(7)}{=} \|J_{H^1}g\|^2_{H^1(0,T)} = \|g\|^2_{\left(H^1(0,T)\right)^*}.$$

Введем обратный к $\mathcal{I}$ оператор $\mathcal{D}$. На пространстве Соболева $H^1\big(\overset{\circ}{0},T\big) = \mathcal{I}\big(L^2(0,T)\big)$ определим его как обычный оператор дифференцирования со значениями из $L^2(0,T)$:

$$\mathcal{D}v(t) = v'(t), \quad t \in (0,T). \tag{32}$$

На образе $\mathcal{I}\Big(\big(H^1(0,T)\big)^*_0\Big) \subset L^2(0,T)$ полагаем

$$\mathcal{D}v = \mathcal{I}^{-1}v \in \big(H^1(0,T)\big)^*_0 \quad \forall v(t) \in \mathcal{I}\Big(\big(H^1(0,T)\big)^*_0\Big). \tag{33}$$

Свойства изометрии (21), (31) позволяют по решениям $\widehat{u}(t)$ сглаженных задач (15)–(18) однозначно восстанавливать решения исходной задачи (1)–(4) с помощью операции дифференцирования (32) или (33) при условии, что в случае $\beta_i = 1$ соответствующие управления u_i будут выбираться из подпространства $\big(H^1(0,T)\big)^*_0$, а проблема определения в их конструкции составляющих $c_i\,\delta(t-T)$ решается отдельно с помощью леммы 4. Итак, в исходной постановке (1)–(4) происходит смена класса граничных управлений H на $\mathcal{H}$ и целевых состояний F на $\mathcal{F}$ (при $\beta_0 = \beta_1 = 0$ фактически ничего не меняется):

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_1, && \mathcal{H}_i = L^2(0,T) \ \text{ при } \ \beta_i = 0, && \mathcal{H}_i = \big(H^1(0,T)\big)^*_0 \ \text{ при } \ \beta_i = 1,\\ &\mathcal{F} = L^2(0,l)\times\mathcal{F}^1, && \mathcal{F}^1 = H^{-1}(0,l) \ \text{ при } \ \beta_0 = \beta_1 = 0, && \mathcal{F}^1 = \big(F^1\big)^*_0 \ \text{ при } \ \beta_0 + \beta_1 > 0. \end{aligned}$$

Целевая скорость $f^1 \in \big(F^1\big)^*$ из исходной постановки (1)–(4) при $\beta_0 + \beta_1 > 0$ замещается компонентой $f^1_0 \in \mathcal{F}^1$ из разложения (23). Формируется новая задача управления, которая кратко записывается в операторном виде, подобном (12): $\mathcal{A}u^0 = f_0$, $u^0 = \big(u^0_0, u^0_1\big) \in \mathcal{H}$, $f_0 = \big(f^0, f^1_0\big) \in \mathcal{F}$.

Пусть $z = z(t,x)$ — решение дифференциальной задачи (1)–(3), соответствующее граничным управлениям $u^0 = \big(u^0_0, u^0_1\big) \in \mathcal{H}$ и удовлетворяющее финальным условиям

$$z\,\big|_{\,t=T} = f^0(x) \in L^2(0,l), \quad z_t\,\big|_{\,t=T} = f^1_0(x) \in \mathcal{F}^1. \tag{34}$$

Рассмотрим сглаженные интегрированием функции $Z = \mathcal{I}z$, являющиеся сильными обобщенными решениями дифференциальной задачи, подобной (15)–(17):

$$Z_{tt} = Z_{xx} - \theta(x)\,Z, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \tag{35}$$

$$-\beta_0 Z_x + \sigma_0 Z\,\big|_{\,x=0} = \mathcal{I}u^0_0(t), \quad \beta_1 Z_x + \sigma_1 Z\,\big|_{\,x=l} = \mathcal{I}u^0_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{36}$$

$$Z\,\big|_{\,t=0} = 0, \quad Z_t\,\big|_{\,t=0} = 0, \quad 0 < x < l. \tag{37}$$

В финальный момент $t = T$ функции Z будут удовлетворять условиям

$$Z\,\big|_{\,t=T} = \mathcal{I}z\,\big|_{\,t=T}, \quad Z_t\,\big|_{\,t=T} = f^0(x), \quad 0 < x < l. \tag{38}$$

Установим связь между финальной скоростью $f^1_0(x)$ из (34) и финальным состоянием $\mathcal{I}z\,\big|_{\,t=T}$ из (38).

Пусть $\zeta(x) = J_{F^1} f^1_0$ — образ Рисса функционала $f^1_0 \in \big(F^1\big)^*_0 = J^{-1}_{F^1} H^1_0(0,l)$. Для регулярных функционалов соответствие между $f^1_0(x)$ и $\zeta(x)$ описывается краевой задачей (11), но с учетом принадлежности $\zeta(x) \in H^1_0(0,l)$ функция $\zeta(x)$ будет удовлетворять условиям

$$\zeta''(x) - \theta(x)\zeta(x) = -f^1_0(x), \quad 0 < x < l, \quad \zeta(0) = 0, \quad \zeta(l) = 0\,. \tag{39}$$

Заметим, что финальные состояния $Z(T,x)$ достаточно гладких классических решений $Z(t,x)$ задачи (35)–(37) удовлетворяют при $x \in (0,l)$ условию

$$Z_{xx}(T,x) - \theta(x)Z(T,x) = \int\limits_0^T \big(z_{xx}(\tau,x) - \theta(x)z(\tau,x)\big)\,d\tau = \int\limits_0^T z_{tt}(\tau,x)\,d\tau = z_t(T,x) = f_0^1(x). \tag{40}$$

При переходе от классических к сильным обобщенным решениям $Z(t,x)$ с финальными следами $Z(T,x) \in H^1(0,l)$ равенство (40) будет выполняться на промежутке $x \in (0,l)$ в сильном обобщенном смысле. Сравнивая (40) с (39), делаем вывод, что сумма функций $\zeta(x) + Z(T,x) \in H^1(0,l)$ является сильным обобщенным решением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$p'' - \theta(x)p = 0, \quad 0 < x < l. \tag{41}$$

Поскольку $\theta(x) \in C[0,l]$, то все обобщенные решения уравнения (41) на самом деле будут его классическими решениями. Эти решения образуют в пространстве $C^2[0,l]$ линейное подпространство $\mathcal{P}$, $\dim\mathcal{P} = 2$. С помощью подходящей функции $P(x) \in \mathcal{P}$ запишем финальные условия (38) в виде

$$Z\,\Big|_{\,t=T} = -\zeta(x) + P(x), \quad Z_t\,\Big|_{\,t=T} = f^0(x), \quad 0 < x < l. \tag{42}$$

Постановку задачи управления (35)–(37), (42) завершим описанием функциональных пространств:

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 \times \widehat{\mathcal{H}}_1, && \widehat{\mathcal{H}}_i = H^1\big(\overset{\circ}{0},T\big) \quad \text{при} \quad \beta_i = 0, \\ &\widehat{\mathcal{H}}_i = \mathcal{I}\Big(\big(H^1(0,T)\big)_0^*\Big) \subset L^2(0,T) \quad \text{при} \quad \beta_i = 1, && \widehat{\mathcal{F}} = H^1(0,l) \times L^2(0,l). \end{aligned} \tag{43}$$

Из пространства $\widehat{\mathcal{H}}$ будут выбираться граничные управления $\widehat{u}(t) = \big(\widehat{u}_0^0(t), \widehat{u}_1^0(t)\big)$, а в пространстве $\widehat{\mathcal{F}}$ будут находиться целевые состояния $\widehat{f}(x) = \Big(\widehat{f}^{\,0}(x), \widehat{f}^{\,1}(x)\Big)$. Заметим, что на пространстве $\widehat{\mathcal{H}}$ в (32), (33) корректно определен обратный по отношению к $\mathcal{I}$ оператор $\mathcal{D}$, а целевая пара $\widehat{f} = \Big(\widehat{f}^{\,0}, \widehat{f}^{\,1}\Big)$ связана с исходной постановкой (1)–(4) соотношениями

$$\widehat{f}^0(x) = -\zeta(x) + P(x), \quad P(x) \in \mathcal{P}, \quad \widehat{f}^1(x) = f^0(x),$$

в которых функция $\zeta(x)$ взята из (39), а $f_0^1(x)$ — из разложения (23). Операторная форма записи сформировавшейся задачи управления будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{A}\widehat{u} = \widehat{f}, \quad \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{H}}, \quad \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{F}}. \tag{44}$$

4. Приближенные управления и их сходимость. Чтобы найти управления $u(t) = \big(u_0(t), u_1(t)\big) \in H$ для достижимой в момент $T < T_*$ цели $f(x) = \big(f^0(x), f^1(x)\big) \in F$, предлагается следующая трехэтапная процедура.

I. По заданной целевой скорости $f^1 \in \big(F^1\big)^*$ строим разложение (23), т.е. определяем составляющую $f_0^1 \in \big(F^1\big)_0^*$ и значения коэффициентов c_0, $c_1 \in \mathbb{R}$, после чего находим решение $\zeta(x) \in H_0^1(0,l)$ краевой задачи (39).

II. Находим $P(x) \in \mathcal{P}$ из условия достижимости цели $\big(-\zeta(x) + P(x), f^0(x)\big)$ в момент времени T и формируем правую часть $\widehat{f}$ уравнения (44).

III. Находим решение $\widehat{u}(t) = \big(\widehat{u}_0(t), \widehat{u}_1(t)\big)$ операторного уравнения (44) и полагаем $u(t) = \big(\mathcal{D}\widehat{u}_0(t) + c_0\beta_0\delta(t-T),\ \mathcal{D}\widehat{u}_1(t) + c_1\beta_1\delta(t-T)\big)$.

При практической реализации описанной схемы действий будем предполагать, что вместо точных целевых функций $f^0(x) \in L^2(0,l)$, $f^1(x) \in \big(F^1\big)^*$ доступны некоторые их приближения $\widetilde{f}^0(x) \in L^2(0,l)$, $\widetilde{f}^1(x) \in \big(F^1\big)^*$ и известен соответствующий уровень погрешности $\delta > 0$:

$$\Big\|\widetilde{f}^0 - f^0\Big\|_{L^2(0,l)} \leqslant \delta, \quad \Big\|\widetilde{f}^1 - f^1\Big\|_{\left(F^1\right)^*} \leqslant \delta. \tag{45}$$

Приведем более подробное изложение выполняемых на каждом этапе вычислительных процедур и докажем сходимость итоговых приближений.

I. Подействовав на разложение (23) оператором Рисса J_{F^1}, получим

$$\eta(x) = \zeta(x) + c_0\beta_0 d_0(x) + c_1\beta_1 d_1(x), \quad d_0(x) = J_{F^1}\delta(x), \quad d_1(x) = J_{F^1}\delta(x-l). \tag{46}$$

Образы Рисса $\eta(x)$, $d_0(x)$, $d_1(x)$ могут быть найдены приближенно тем или иным численным методом решения краевой задачи (11). Будем считать, что параметры численной процедуры (например, шаги разностной сетки) согласованы с уровнем погрешности δ из (45) и найденные приближения $\widetilde{\eta}(x)$, $\widetilde{d}_0(x)$, $\widetilde{d}_1(x)$ при $\delta \to 0$ обладают сходимостью

$$\left\|\widetilde{\eta} - \eta\right\|_{F^1} \to 0, \quad \left\|\widetilde{d}_0 - d_0\right\|_{F^1} \to 0, \quad \left\|\widetilde{d}_1 - d_1\right\|_{F^1} \to 0. \tag{47}$$

Рассмотрим для определенности случай $\beta_0 = \beta_1 = 1$, когда в разложении (46) присутствуют обе функции $d_0(x)$ и $d_1(x)$. Тогда точные значения коэффициентов c_0, c_1 находятся из системы двух линейных алгебраических уравнений, получающихся из (46) при $x = 0$ и $x = l$ с учетом того, что $\zeta(0) = \zeta(l) = 0$:

$$c_0 = \frac{d_1(l)\eta(0) - d_1(0)\eta(l)}{\Delta}, \quad c_1 = \frac{d_0(0)\eta(l) - d_0(l)\eta(0)}{\Delta}, \quad \Delta = d_0(0)d_1(l) - d_1(0)d_0(l). \tag{48}$$

Заметим, что в (48) значение $\Delta \neq 0$ в силу линейной независимости функций $d_0(x)$ и $d_1(x)$. Из сходимости в пространстве F^1 следует равномерная на $[0,l]$ сходимость, поэтому из (47) и аналогичных (48) выражений для приближенных значений коэффициентов $\widetilde{c}_0$, $\widetilde{c}_1$ получаются предельные соотношения при $\delta \to 0$:

$$\left|\widetilde{c}_0 - c_0\right| \to 0, \quad \left|\widetilde{c}_1 - c_1\right| \to 0, \quad \left\|\widetilde{\zeta} - \zeta\right\|_{F^1} \to 0. \tag{49}$$

II. Согласно [5], условие достижимости системой (35)–(37) цели $\big(-\zeta(x)+P(x), f^0(x)\big)$ в момент времени $T < T_*$ имеет вид $Z(t,x) \equiv 0$, $(t,x) \in \omega_T$, где $\omega_T = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |t - T/2| + |x - l/2| \leqslant (l-T)/2\Big\}$ — квадрат, являющийся пересечением зон влияния начальных и финальных условий (37) и (42). Посмотрим на $Z(t,x)$ как на решение дифференциального уравнения (35) с данными Коши (42) в квадрате $\Omega_T = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |t-T| + |x-l/2| \leqslant l/2\Big\}$ и представим его в виде суммы $Z(t,x) = \Psi(t,x) + P(x)$, где $P(x) \in \mathcal{P}$, а $\Psi = \Psi(t,x)$ — решение задачи Коши

$$\Psi_{tt} = \Psi_{xx} - \theta(x)\Psi, \quad (t,x) \in \Omega_T, \quad \Psi\big|_{t=T} = -\zeta(x), \quad \Psi_t\big|_{t=T} = f^0(x), \quad x \in (0,l). \tag{50}$$

Функцию $P(x)$ будем искать в виде линейной комбинации

$$P(x) = \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) \tag{51}$$

базисных решений $P_1(x)$, $P_2(x)$ уравнения (41), которые выберем из условий

$$P_1(0) = 1, \quad P_1(l) = 0, \quad P_2(0) = 0, \quad P_2(l) = 1. \tag{52}$$

Коэффициенты α_i в (51) будем определять из условий равенства нулю функции $Z(t,x)$ в угловых точках $(t = T/2,\, x = T/2)$ и $(t = T/2,\, x = l - T/2)$ квадрата ω_T:

$$\alpha_1 P_1(T/2) + \alpha_2 P_2(T/2) = -\Psi(T/2, T/2), \quad \alpha_1 P_1(l-T/2) + \alpha_2 P_2(l-T/2) = -\Psi(T/2, l-T/2).$$

Эта система из двух линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение, поскольку ее определитель отличен от нуля в силу линейной независимости выбранных базисных решений $P_1(x)$, $P_2(x)$. Таким образом, определена составляющая $P(x)$ целевого состояния (42) вида (51).

На практике приближенное решение $\widetilde{\Psi}(t,x)$ задачи Коши (50) можно вычислять по схеме, предложенной в [5]. Приближенные решения $\widetilde{P}_i(x)$ уравнения (41), удовлетворяющие краевым условиям (52), можно находить многими различными способами. Предположим, что найденные нами приближения обладают сходимостью:

$$\max_{(t,x)\in\Omega_T} \left|\widetilde{\Psi}(t,x) - \Psi(t,x)\right| \to 0, \quad \left\|\widetilde{P}_i - P_i\right\|_{F^1} \to 0, \quad i = 1,2. \tag{53}$$

Тогда для приближений $\widetilde{P}(x)$, построенных по описанной схеме, при $\delta \to 0$ будет выполняться предельное соотношение

$$\left\|\widetilde{P} - P\right\|_{F^1} \to 0. \tag{54}$$

III. Близость найденных нами целевых состояний $\widehat{f}_{\text{num}} = \left(-\widetilde{\zeta}(x) + \widetilde{P}(x),\ \widetilde{f}^0(x)\right)$ к точной правой части $\widehat{f}$ уравнения (44) будет следовать из (49) и (54): $\left\|\widehat{f}_{\text{num}} - \widehat{f}\right\|_{\widehat{\mathcal{F}}} \to 0$ при $\delta \to 0$.

В [3, 4] описан вариационный метод, а в [5–7] — схема его применения к задачам граничного управления вида (1)–(4) в классах сильных обобщенных решений. Следуя [5–7] при организации вычислений, находим приближенные решения $\widehat{u}_{\text{num}}(t)$ уравнения (44), такие, что $\widehat{u}_{\text{num}}(t) \overset{(43)}{\in} \widehat{\mathcal{H}} \overset{(20)}{\subset} \widehat{H}$, $\left\|\widehat{u}_{\text{num}} - \widehat{u}\right\|_{\widehat{H}} \to 0$.

Включение $\widehat{u}_{\text{num}}(t) \in \widehat{\mathcal{H}}$ позволяет корректно выполнить заключительную операцию дифференцирования (32), (33) и объявить итоговыми приближениями элементы

$$\widetilde{u}(t) = \mathcal{D}\widehat{u}_{\text{num}}(t) + \widetilde{c}_0\beta_0\delta(t-T) + \widetilde{c}_1\beta_1\delta(t-T). \tag{55}$$

Их состоятельность подтверждает

Теорема. *Приближенные управления* $\widetilde{u}(t)$ *вида* (55)*, построенные с помощью описанной процедуры* I–III*, при выполнении условий* (45)*,* (47)*,* (53) *сходятся по норме исходного пространства* H *из* (5) *к точному решению* $u(t)$ *задачи* (1)–(4)*:* $\left\|\widetilde{u} - u\right\|_H \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

5. Численные эксперименты. Для демонстрации возможностей предложенного алгоритма решения задачи управления (1)–(4) в классе слабых обобщенных решений рассмотрим простой пример с данными $l = 1$, $\theta(x) \equiv 0$ и граничными коэффициентами $\beta_i = 0$, $\sigma_i = 1$, $i = 0, 1$, которым соответствуют управления типа Дирихле из пространства $L^2(0,T)$:

$$y_{tt} = y_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$y\,\big|_{x=0} = u_0(t), \quad y\,\big|_{x=l} = u_1(t), \quad t > 0,$$
$$y\,\big|_{t=0} = 0, \quad y_t\,\big|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

$T = 0.5$

τ	$\dfrac{\|\widetilde{f} - f\|}{\|f\|}$	$\dfrac{\|\widetilde{u} - u\|}{\|u\|}$	$\dfrac{\|\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{u} - f\|}{\|f\|}$
0.01	4%	5.10%	2.51%
0.005	2%	3.68%	1.66%
0.0025	1%	3.13%	1.18%
0.00125	0.5%	2.64%	0.99%

В качестве финального момента возьмем $T = 0.5 < T_* = 1$, а в качестве (единственных) оптимальных управлений — пару $u = \big(u_0(t), u_1(t)\big)$, $u_0(t) = u_1(t) = \sin(\pi t)$, $t \in [0,T]$, которой соответствует целевая пара $f = \big(f^0(x), f^1(x)\big)$, $f^0(x) = \big|\cos(\pi x)\big|$, $f^1(x) = \pi\sin(\pi x)$, $x \in [0,1]$. На вход алгоритма подавались зашумленные целевые функции $\widetilde{f} = \left(\widetilde{f}^0, \widetilde{f}^1\right)$. Для численного решения дифференциальной задачи для y, как и в [6, 7], использовалась явная разностная схема с шаблоном типа “крест” на равномерной сетке с близкими значениями $\tau \approx h$, $\tau < h$, шагов сетки по t и по x. Варьировались шаги сетки и уровень шума δ. В таблице указаны значения τ и относительных погрешностей $\dfrac{\left\|\widetilde{f} - f\right\|}{\|f\|}$, $\dfrac{\|\widetilde{u} - u\|}{\|u\|}$ и $\dfrac{\left\|\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{u} - f\right\|}{\|f\|}$ задания целевых функций, вычисления управлений и наведения на цель, соответствующие вырабатываемым алгоритмом приближениям $\widetilde{u}$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору М. М. Потапову за постановку задачи, внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов М.М., Иванов Д.А.* Задачи двустороннего граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах сильных обобщенных решений // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2013. **19**, № 4. 192–202.
2. *Иванов Д.А., Потапов М.М.* Непрерывная обратимость оператора граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах слабых обобщенных решений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2014. № 4. 5–12.
3. *Потапов М.М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Докл. АН. 1999. **365**, № 5. 596–598.
4. *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010.

5. *Иванов Д.А., Потапов М.М.* Приближенное решение задачи быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями // Тр. Матем. ин-та РАН. 2015. **291**. 112–127.
6. *Потапов М.М.* Приближенное решение задач дирихле-управления для волнового уравнения в классах Соболева и двойственных к ним задач наблюдения // ЖВМ и МФ. 2006. **46**, № 12. 2191–2208.
7. *Потапов М.М.* Разностная аппроксимация задач дирихле-наблюдения слабых решений волнового уравнения с краевыми условиями третьего рода // ЖВМ и МФ. 2007. **47**, № 8. 1323–1339.

Поступила в редакцию
01.07.2016

Increasing Regularity of Generalized Solutions to the Wave Equation for Computing Optimal Boundary Controls

D. A. Ivanov [1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Graduate Student, e-mail: deniaru91@gmail.com*

Received July 1, 2016

Abstract: Problems with two-sided boundary controls of three main types are considered for the wave equation in the classes of weak generalized solutions on intervals of subcritical length. An algorithm is proposed for the stable approximation of boundary controls. This algorithm is based on the preliminary smoothing of phase trajectories, the application of a variational method in the classes of strong generalized solutions, and the final differentiation of the resulting smoothed controls. Numerical results are discussed.

Keywords: wave equation, generalized solution, boundary control, subcritical interval, approximate data, approximate solution, convergence.

References

1. M. M. Potapov and D. A. Ivanov, “Problems of Two-Sided Boundary Control for the Wave Equation on Subcritical Intervals in Classes of Strong Generalized Solutions,” Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN **19** (4), 192–202 (2013) [Proc. Steklov Inst. Math. **287** (Suppl. 1), 145–155 (2014)].

2. D. A. Ivanov and M. M. Potapov, “Continuous Invertibility of a Boundary Control Operator for the Wave Equation on Subcritical Intervals in Classes of Weak Generalized Solutions,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15: Vychisl. Mat. Kibern., No. 4, 5–12 (2014) [Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. **38** (4), 139–146 (2014)].

3. M. M. Potapov, “A Stable Method for Solving Linear Equations with Nonuniformly Perturbed Operators,” Dokl. Akad. Nauk **365** (5), 596–598 (1999) [Dokl. Math. **59** (2), 286–288 (1999)].

4. F. P. Vasil’ev, M. A. Kurzhanskii, M. M. Potapov, and A. V. Razgulin, *Approximate Solution of Dual Control and Observation Problems* (Maks Press, Moscow, 2010) [in Russian].

5. D. A. Ivanov and M. M. Potapov, “Approximate Solution to a Time Optimal Boundary Control Problem for the Wave Equation,” Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Ross. Akad. Nauk **291**, 112–127 (2015) [Proc. Steklov Inst. Math. **291** (1), 102–117 (2015)].

6. M. M. Potapov, “Approximate Solutions to Dirichlet Control Problems for the Wave Equation in Sobolev Classes and Dual Observation Problems,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **46** (12), 2191–2208 (2006) [Comput. Math. Math. Phys. **46** (12), 2092–2109 (2006)].

7. M. M. Potapov, “Finite-Difference Approximation of Dirichlet Observation Problems for Weak Solutions to the Wave Equation Subject to Robin Boundary Conditions,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **47** (8), 1323–1339 (2007) [Comput. Math. Math. Phys. **47** (8), 1268–1284 (2007)].