УДК 550.34.01 doi 10.26089/NumMet.v17r329

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗАННОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИНГУЛЯРНОГО АНАЛИЗА

Е. С. Ефимова[1]

Исследуется решение обратной задачи сейсмики в линеаризованной постановке для модели вязкоупругой среды. Для описания сред с поглощением используется обобщенная модель стандартного линейного твердого тела, опирающаяся на τ-метод. Если при численном решении неоднородность одного из искомых параметров переходит в изменчивость другого, то такие параметры называются связанными. Связанность параметров является одним из проявлений некорректности изучаемой задачи. Для ее преодоления необходимо привлечение регуляризующей процедуры. В качестве таковой в работе предлагается использовать усечение сингулярного разложения для одновременного определения скорости продольных волн и их поглощения. В качестве параметризации среды рассматривается комбинация параметров Ламе и добротности.

Ключевые слова: вязкоупругость, сейсмическое поглощение, сингулярное разложение, обратные задачи, неоднозначность решения.

Введение. Поглощение сейсмической энергии присуще всем реальным геологическим средам и представляет собой один из наиболее важных параметров при изучении резервуаров углеводородов, так как именно оно во многом характеризует флюидонасыщенность. В этой связи знание пространственного распределения поглощения заметно повышает достоверность интерпретации результатов сейсмических наблюдений, особенно с использованием не только кинематической, но и динамической информации.

Таким образом, важность развития теории и численных методов решения обратной динамической задачи сейсмики не вызывает сомнения и открывает возможность существенного повышения информативности сейсмических методов. Однако, как и для многих других обратных задач, ее решение требует введения дополнительной процедуры регуляризации, обеспечивающей корректность постановки. Причина некорректности обратной динамической задачи сейсмики заключается в необходимости решения интегрального уравнения первого рода с гладким ядром. Как известно, эта задача является некорректной, и для ее численного решения в работе вводится регуляризующий оператор, основанный на усечении сингулярного разложения (с английского Singular Value Decomposition, сокращение SVD) матричного представления линейного приближения обратного оператора [1, 3, 9].

Одно из проявлений некорректности — *связанность* параметров. Под этим термином мы будем понимать описанный в работе [5] эффект, когда возмущение, присущее только одному параметру, например добротности среды, проявляется и в другом неизвестном параметре, например скорости распространения продольных волн. Естественно, что наличие такой связанности неизбежно ведет к ошибочной интерпретации результатов, полученных при обработке сейсмических наблюдений, и, следовательно, к ошибочным заключениям о строении среды. Более того, теоретически эквивалентные параметризации могут отличаться именно за счет связанности, когда, например, вариации добротности будут проявляться как изменчивость в скоростях продольных волн [19]. Поэтому при численном решении задачи по определению характеристик среды *связанность* параметров используемой модели среды необходимо оценить уже на предварительном этапе при постановке задачи. Изучение возможности независимого восстановления параметров вязкоупругой среды, а именно плотности, параметров Ламе и поглощающих свойств, является предметом нашего исследования. В настоящей статье получено численное решение обратной динамической задачи сейсмики для вязкоупругих сред, заключающейся в определении параметров Ламе и добротности в вязкоупругих средах с использованием сейсмических данных, зарегистрированных на свободной поверхности.

Заметим, что наша работа, безусловно, не первая направленная на решение обратной задачи для вязкоупругих сред. К настоящему времени имеется ряд интересных публикаций. Так, единственность указанной задачи доказана в работе [4]. Решение задачи в нелинейной постановке рассматривается в статье [15]. В работе [8] эта задача решается для сред, незначительно отличающихся от однородных. Невозможность

[1] Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; инженер, e-mail: EfimovaES@ipgg.sbras.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

одновременного определения скоростей и поглощений без дополнительных условий показана в работах [14, 17, 18].

1. Численное моделирование вязкоупругих сред. Уравнением состояния в идеально упругих средах определяется связь между напряжением и деформацией в один и тот же момент времени, в то время как в вязкоупругих средах напряжение в конкретный момент времени зависит от истории деформаций и выражается с использованием свертки по времени в обобщенном законе Гука [10, 11]. В частотной области среда с поглощением математически описывается системой уравнений

$$i\omega\rho\boldsymbol{u} = \operatorname{div}\sigma + \boldsymbol{f}, \quad i\omega\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^*\right), \quad \sigma(x,\omega) = M(\omega)\varepsilon(x,\omega), \tag{1}$$

где ρ — плотность, $\boldsymbol{u}$ — скорости смещений, σ, ε — тензоры напряжений и деформаций, ω — частота, комплекснозначная функция $M(\omega)$ — коэффициент вязкоупругости.

Далее используется обобщенная модель стандартного линейного тела (GSLS — Generalized Standard Linear Solid, см. приложение 1), закон Гука в которой выражается:

$$\begin{cases}
\sigma_{xx} = (\lambda+2\mu)(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{zz})\left(1+\sum\limits_{j=1}^{L}\dfrac{\tau^P_{\varepsilon_j}-\tau^P_{\sigma_j}}{\tau^P_{\sigma_j}}\right) - 2\mu\varepsilon_{zz}\left(1+\sum\limits_{j=1}^{L}\dfrac{\tau^S_{\varepsilon_j}-\tau^S_{\sigma_j}}{\tau^S_{\sigma_j}}\right) + \\
\qquad + \sum\limits_{j=1}^{L}\left(\dfrac{2\mu\tau^S_j\varepsilon_{zz}}{1+i\omega\tau^S_{\sigma_j}} - \dfrac{(\lambda+2\mu)\tau^P_j(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{zz})}{1+i\omega\tau^P_{\sigma_j}}\right), \\
\sigma_{zz} = -2\mu\varepsilon_{xx}\left(1+\sum\limits_{j=1}^{L}\dfrac{\tau^S_{\varepsilon_j}-\tau^S_{\sigma_j}}{\tau^S_{\sigma_j}}\right) + (\lambda+2\mu)(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{zz})\left(1+\sum\limits_{j=1}^{L}\dfrac{\tau^P_{\varepsilon_j}-\tau^P_{\sigma_j}}{\tau^P_{\sigma_j}}\right) + \\
\qquad + \sum\limits_{j=1}^{L}\left(\dfrac{2\mu\tau^S_j\varepsilon_{xx}}{1+i\omega\tau^S_{sigma_j}} - \dfrac{(\lambda+2\mu)\tau^P_j(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{zz})}{1+i\omega\tau^P_{\sigma_j}}\right), \\
\sigma_{xz} = \mu\varepsilon_{xz}\left(1+\sum\limits_{j=1}^{L}\dfrac{\tau^S_{\varepsilon_j}-\tau^S_{\sigma_j}}{\tau^S_{\sigma_j}}\right) - \sum\limits_{j=1}^{L}\left(\dfrac{\mu\tau^S_j\varepsilon_{xz}}{1+i\omega\tau^S_{\sigma_j}}\right),
\end{cases}$$

где $L = 2$ и τ_{σ_l}, τ_{ε_l} — константы, характеризующие времена релаксации напряжения и деформации.

2. Линеаризация. Для определения характеристик вязкоупругих сред используется информация о колебаниях, зарегистрированных в приемниках, расположенных на поверхности Земли.

Систему уравнений, полученную из системы (1) с использованием τ-метода (см. приложение 1), в частотной области можно переписать в виде

$$\begin{cases}
\omega^2\rho u_x + \dfrac{\partial}{\partial x}\left((\lambda+2\mu)\big(1+S^P\tau^P\big)\operatorname{div}\boldsymbol{u} - 2\mu\big(1+S^S\tau^S\big)\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \\
\qquad + \dfrac{\partial}{\partial_z}\left(\mu\big(1+S^S\tau^S\big)\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right) = F_1(\omega)\,\dfrac{\partial\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\partial x}, \\
\omega^2\rho u_z + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu\big(1+S^S\tau^S\big)\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right) + \\
\qquad + \dfrac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\big(1+S^P\tau^P\big)\operatorname{div}\boldsymbol{u} - 2\mu\big(1+S^S\tau^S\big)\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) = F_2(\omega)\,\dfrac{\partial\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}.
\end{cases} \tag{2}$$

Будем теперь считать, что параметры среды $\boldsymbol{m}$ представляются в виде суммы заданной постоянной $\boldsymbol{m}_0$ и малых возмущений $\delta\boldsymbol{m}$: $\boldsymbol{m} = \vec{m}_0 + \delta\boldsymbol{m}$ ($|\delta\boldsymbol{m}| \ll |m_0|$). Тогда и полное волновое поле представимо как $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \delta\boldsymbol{u}$, где u_0 — волна, распространяющаяся в однородной среде, а $\delta\boldsymbol{u}$ — компонента, порожденная малыми возмущениями:

$$\begin{cases} \omega^2\rho_0\delta u_x + (\lambda_0+2\mu_0)\,\dfrac{\partial^2\delta u_x}{\partial x^2} + (\lambda_0+\mu_0)\,\dfrac{\partial^2\delta u_z}{\partial x\partial z} + \mu_0\,\dfrac{\partial^2\delta u_x}{\partial z^2} = f_1\big(x,z,\omega,u^0,\delta\rho,\delta\lambda,\delta\mu,\delta\tau^P,\delta\tau^S\big), \\ \omega^2\rho_0\delta u_z + (\lambda_0+2\mu_0)\,\dfrac{\partial^2\delta u_z}{\partial z^2} + (\lambda_0+\mu_0)\,\dfrac{\partial^2\delta u_x}{\partial xz} + \mu_0\,\dfrac{\partial^2\delta u_z}{\partial x^2} = f_2\big(x,z,\omega,u^0,\delta\rho,\delta\lambda,\delta\mu,\delta\tau^P,\delta\tau^S\big), \\ \omega^2\rho_0 u_x^0 + (\lambda_0+2\mu_0)\,\dfrac{\partial^2 u_x^0}{\partial x^2} + (\lambda_0+\mu_0)\,\dfrac{\partial^2 u_z^0}{\partial x\partial z} + \mu_0\,\dfrac{\partial^2 u_x^0}{\partial z^2} = F_1(\omega)\,\dfrac{\partial\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\partial x}, \\ \omega^2\rho_0 u_z^0 + (\lambda_0+2\mu_0)\,\dfrac{\partial^2 u_z^0}{\partial z} + (\lambda_0+\mu_0)\,\dfrac{\partial^2 u_x^0}{\partial x\partial z} + \mu_0\,\dfrac{\partial^2 u_z^0}{\partial x^2} = F_2(\omega)\,\dfrac{\partial\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}. \end{cases}$$

В общем случае рассматривается решение обратной задачи по определению параметров среды $\delta\rho$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\tau^P$, $\delta\tau^S$ (плотность, параметры Ламе, параметры поглощения) по данным, зарегистрированным в приемниках $\boldsymbol{u}(x,z,x_s,\omega)\big|_{z=0} = \boldsymbol{u}^{obs}$. В настоящей статье ограничимся определением параметров $\delta\lambda$ и $\delta\tau^P$. Далее вводится функция

$$\delta U = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{ik_x x\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{ik_s x\}\delta u(x,z,x_s,\omega)\,dx_s.$$

Считается, что целевая область с определяемыми параметрами среды ограничена слоем $h \leqslant z \leqslant H$. Тогда при ограничениях $|k_x|, |k_s| < \omega^2/V^P$ существует дважды дифференцируемая по z функция $\delta U(z,k_x,k_s,\omega)$, которая удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \omega^2\rho\delta U_x - (\lambda_0+2\mu_0)k_x^2\delta U_x + ik_x(\lambda_0+\mu_0)\,\dfrac{\partial\delta U_z}{\partial z} + \mu_0\,\dfrac{\partial^2\delta U_x}{\partial z^2} = \\ \qquad = \tilde{f}_1\big(k_x,k_s,z,\omega,U^0,\delta\tilde{\lambda}(k_x+k_s,z),\delta\tilde{\tau}^P(k_x+k_s,z)\big), \\ \omega^2\rho\delta U_z + (\lambda_0+2\mu_0)\,\dfrac{\partial^2\delta U_z}{\partial z^2} + ik_x(\lambda_0+\mu_0)\,\dfrac{\partial\delta U_x}{\partial z} - \mu_0 k_x^2\delta U_z = \\ \qquad = \tilde{f}_2\big(k_x,k_s,z,\omega,U^0,\delta\tilde{\lambda}(k_x+k_s,z),\delta\tilde{\tau}^P(k_x+k_s,z)\big), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} (\delta U_x' + ik_x\delta U_z)\big|_{z=0} = 0, \quad \big(\lambda_0 ik_x U_x + (\lambda_0+2\mu_0)\delta U_z'\big)\big|_{z=0} = 0, \\ \Big(\delta U_x' + i\sqrt{\omega^2/V_P^2-k_x^2}\,\delta U_x\Big)\Big|_{z=H} = 0, \quad \Big(\delta U_z' + i\sqrt{\omega^2/V_P^2-k_x^2}\,\delta U_z\Big)\Big|_{z=H} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $U^0 = \begin{pmatrix} k_s/\sqrt{\omega^2/V_P^2-k_s^2} \\ \operatorname{sgn}(z-z_0) \end{pmatrix} \dfrac{\exp\Big(-i\sqrt{\omega^2/V_P^2-k_s^2}\;z\Big)}{2(\lambda_0+2\mu_0)}$, а знак "~" (тильда) обозначает преобразование Фурье и впоследствии опускается.

Таким образом, линеаризованная обратная задача для вязкоупругой среды сводится к решению линейного интегрального уравнения

$$\boldsymbol{u}^{obs} = e^{-i\sqrt{\omega^2/V_P^2-k_x^2}} \begin{pmatrix} k_x \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^H f_j\big(k_x,k_s,z,\omega,U^0,\delta\lambda,\delta\tau^P\big)\phi_i^1(\omega,s)\,ds \\ \sqrt{\omega^2/V_P^2-k_x^2}\,\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^H f_j\big(k_x,k_s,z,\omega,U^0,\delta\lambda,\delta\tau^P\big)\phi_i^2(\omega,s)\,ds \end{pmatrix} +$$
$$+e^{-i\sqrt{\omega^2/V_S^2-k_x^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega^2/V_S^2-k_x^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^H f_j\big(k_x,k_s,z,\omega,U^0,\delta\lambda,\delta\tau^P\big)\phi_i^3(\omega,s)\,ds \\ k_x \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^H f_j\big(k_x,k_s,z,\omega,U^0,\delta\lambda,\delta\tau^P\big)\phi_i^4(\omega,s)\,ds \end{pmatrix}$$

для f_i из (3) и некоторых ϕ_i^j.

3. Связанность набора параметров. Связанность параметров означает, что при решении обратной задачи истинная неоднородность в среде по некоторому параметру ошибочно определяется как неоднородность другого параметра [5]. Поскольку такое решение некорректно, до разработки и реализации алгоритма обращения необходимо определить возможность независимого восстановления параметров. Подобные исследования ранее проводились [12, 14, 17]. Для получения действительнозначного оператора рассматриваемый оператор разделяется на действительную и мнимую части, а параметризация заменяется на

$$x_1 = \mathrm{Re}\left(\delta\lambda + (\lambda_0 + 2\mu_0) S \delta\tau^P\right) = \delta\lambda + (\lambda_0 + 2\mu_0) \sum_{l=1}^{L} \frac{\left(\omega\tau^P_{\sigma_l}\right)^2}{1 + \left(\omega\tau^P_{\sigma_l}\right)^2}\,\delta\tau^P,$$

$$x_2 = \mathrm{Im}\,\frac{\delta\lambda + (\lambda_0 + 2\mu_0) S \delta\tau^P}{(\lambda_0 + 2\mu_0)\mathrm{Im}(S)} = \delta\tau^P.$$

Для изучения связанности и возможности определения параметров вязкоупругой среды используется метод, основанный на сингулярном разложении компактного оператора задачи [9]. Вычисление сингулярного разложения (см. приложение 2) для произвольной среды — очень сложная и дорогостоящая (с точки зрения компьютерных ресурсов) задача. Для построения матричного представления оператора целевая область $z \in (1000, 2000)$ м покрывается сеткой с шагом 1 м, в качестве базиса используются характеристические функции ячейки, т.е. функции, равные единице внутри ячейки и нулю вне нее. Диапазон значимых частот тоже разбивается на конечные интервалы, для которых вводятся аналогичные базисные функции. Для получения матричной аппроксимации интегралы в операторе заменяются конечными суммами. Определение добротности на низких частотах позволяет получить полезную информацию о типе флюида и структуре резервуара [7]. Для последующих вычислений используются частоты (5,100) Гц.

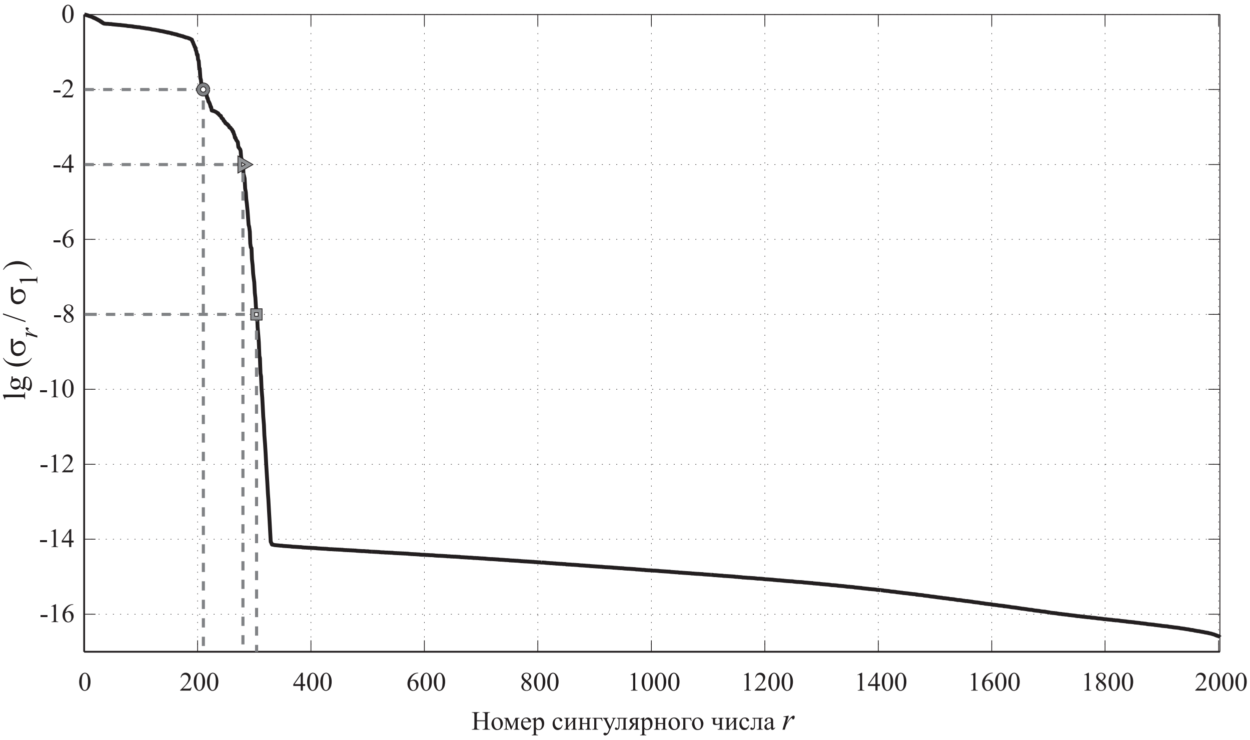

Рис. 1. Сингулярные числа в логарифмической шкале (кружочек соответствует числу обусловленности 10^2 и 210-му сингулярному числу, треугольник — 10^4 и 280, квадрат — 10^8 и 304)

При увеличении размерности конечномерных пространств в процессе аппроксимации приближение исходного бесконечномерного оператора конечномерным становится более точным, а сингулярные спектры этих операторов сближаются и, как следствие, число обусловленности стремится к бесконечности. Стремление к нулю сингулярных чисел σ_i и соответствующее стремление к бесконечности чисел обусловленности (σ_1/σ_n) (рис. 1) подтверждает компактность аппроксимируемого оператора. Таким образом, требование к точности аппроксимации оператора вступает в противоречие с требованием к устойчивости решения. Для разрешения этого противоречия используется метод усечения сингулярного разложения [9],

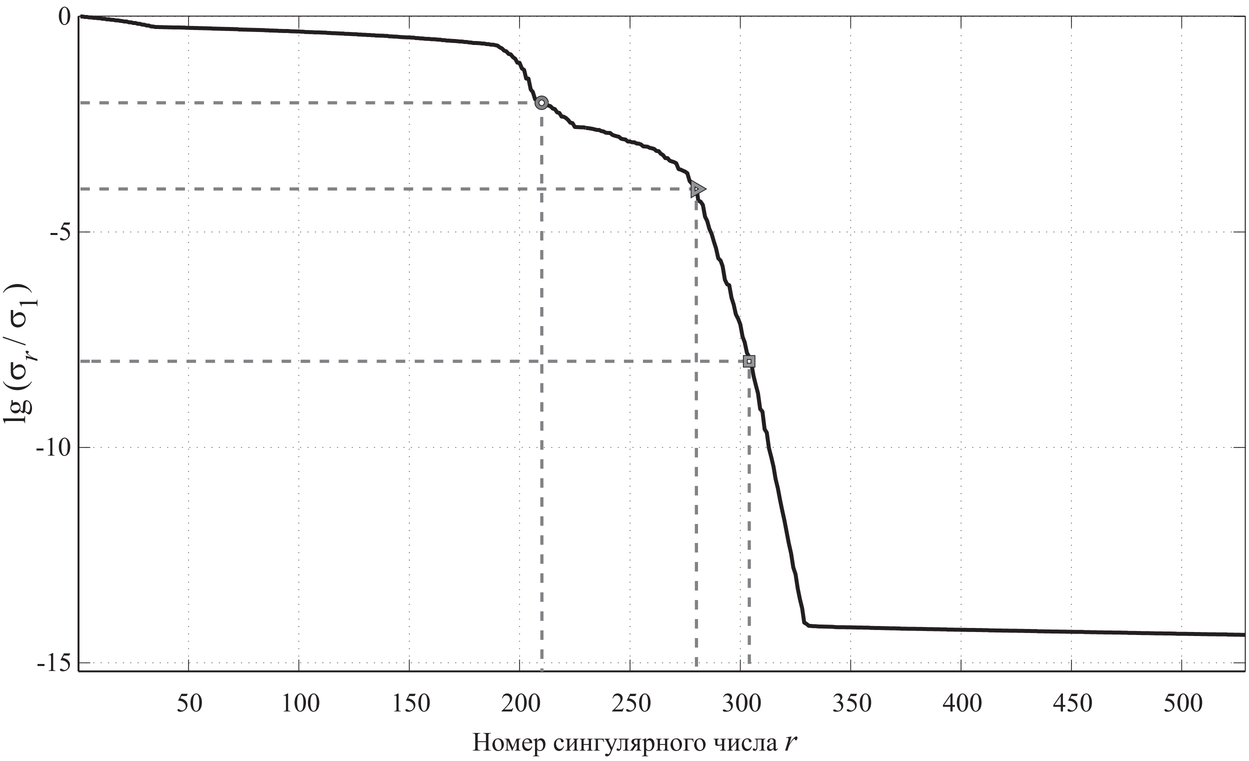

Рис. 2. Первые 500 сингулярных чисел в логарифмической шкале (кружочек соответствует числу обусловленности 10^2 и 210-му сингулярному числу, треугольник — 10^4 и 280, квадрат — 10^8 и 304)

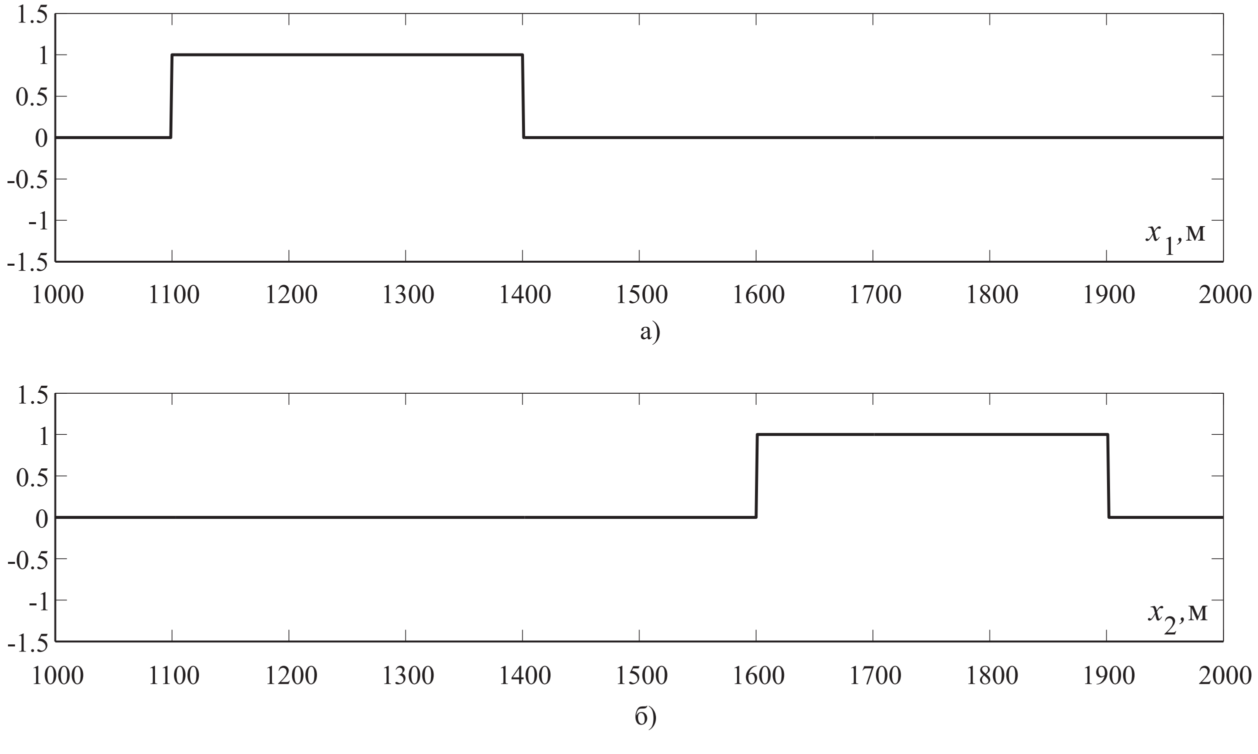

Рис. 3. Искомое решение: параметр x_1 возмущен на промежутке [1100, 1400] м, параметр x_2 возмущен на промежутке [1600, 1900] м

основанный на построении r-решения, которое является проекцией искомого решения на линейную комбинацию r-старших правых сингулярных векторов (см. приложение 2). Число r привлекаемых сингулярных векторов контролирует обусловленность задачи и позволяет построить решение с приемлемой точностью, если известна относительная ошибка во входных данных. Здесь рассматриваются случаи, когда число обусловленности составляет 10^2, 10^4 и 10^8 (рис. 1, 2).

Пусть целевая область содержит две подобласти, в каждой из которых возмущен только один параметр, что обеспечивает наглядное определение связанности параметров (рис. 3). Более подробно случаи среды с вязкоупругими включениями рассмотрены в статье [2]. На рис. 4 изображены проекции на 210, 280, 304 старших сингулярных векторов. Несмотря на то что параметр x_1 возмущен только на промежутке [1100, 1400] м, на рис. 4 видны возмущения и вне этого промежутка (для чисел обусловленности 10^2 и 10^4), т.е. r-решения отражают и возмущения параметра x_2. Аналогичный эффект наблюдается и для параметра x_2. Причем при обусловленности задачи 10^8 (рис. 4) влияние возмущения одного параметра на другой существенно уменьшается. Иными словами, с увеличением числа обусловленности связанность между параметрами уменьшается.

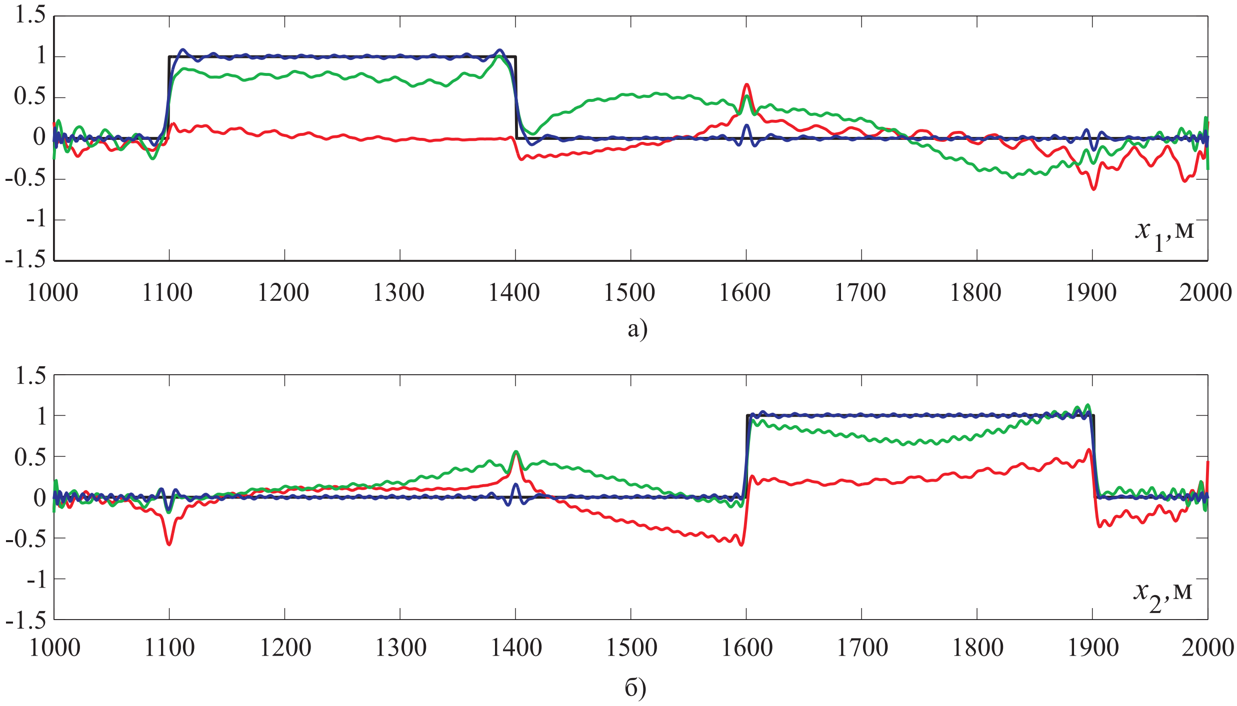

Рис. 4. r-решения: в верхнем слое — возмущение параметра x_1, в нижнем — x_2. Красный цвет соответствует числу обусловленности 10^2, зеленый — 10^4, синий — 10^8, черный — искомое решение

4. Заключение. Поглощающие свойства вязкоупругой среды определены с использованием обобщенной модели стандартного линейного тела (Generalized Standard Linear Solid), τ- метода и борновского приближения при условии, что модель зависит только от вертикальной переменной. Задача по определению параметров вязкоупругой среды сводится к интегральному уравнению. В качестве параметризации используется комбинация параметра Ламе λ и параметра поглощения τ^P для получения действительнозначного оператора. Связанность между параметрами среды определяется усечением сингулярного разложения линеаризованного оператора [9]. Построенные проекции искомого решения на правые старшие сингулярные векторы (т.е. r-решения) для разных чисел обусловленности показывают связанность параметров, которая значительно уменьшается при увеличении числа обусловленности задачи.

Выражение признательности. Настоящая работа выполнена в рамках проекта “Разработка научных основ технологий сбора и обработки сейсмических данных в условиях развитого ледового покрова в транзитной зоне и на шельфе Северного Ледовитого океана” программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Поисковые фундаментальные научные исследования в интересах развития Арктической зоны Российской Федерации” на 2016 г.

Приложение 1. Обобщенная модель стандартного линейного тела. Для перехода к дифференциальной форме обобщенного закона Гука используется обобщенная модель стандартного линейного тела (Generalized Standard Linear Solid — GSLS) [16]:

$$\sigma = \sum_{l=1}^{L} \sigma_l, \quad \sigma_l + \tau_{\sigma_l} i\omega\sigma_l = M_R(\varepsilon + \tau_{\varepsilon_l} i\omega\varepsilon).$$

Здесь M_R — деформационный модуль среды ($M_R = \lambda + 2\mu$ для P-волны, $M_R = \mu$ для S-волны, где λ и μ — параметры Ламе), а τ_{σ_l}, τ_{ε_l} — времена релаксации напряжения и деформации соответственно.

Это уравнение можно переписать в форме

$$\sigma = \sum_{l=1}^{L} M_R \, \frac{1 + i\omega\tau_{\varepsilon_l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma_l}} \, .$$

Уже при $L \geqslant 2$ такая модель хорошо приближает реальные геологические среды и удовлетворяет условию постоянства добротности на заданном частотном диапазоне [13]. Добротность — это физический параметр, характеризующий поглощающие свойства среды. В частотной области этот параметр выражается формулой

$$Q = \left[1 - L + \sum_{l=1}^{L} \frac{1 + \tau_{\sigma_l}\tau_{\varepsilon_l}\omega^2}{1 + \tau_{\sigma_l}^2\omega^2}\right] \left[\sum_{l=1}^{L} \frac{\tau_{\varepsilon_l} - \tau_{\sigma_l}\omega}{1 + \tau_{\sigma_l}^2\omega^2}\right]^{-1},$$

где ω — частота. Времена релаксации выбираются таким образом, чтобы обеспечить минимальное отклонение добротности от экспериментально измеренной на частотном диапазоне. Для этого используется τ-метод, применяемый при малых поглощениях (т.е. при добротности $Q > 10$): вводится параметр поглощения $\tau = \dfrac{\tau_{\varepsilon_l} - \tau_{\sigma_l}}{\tau_{\sigma_l}}$ [6]. Такой подход упрощает вычисления, уменьшает объемы памяти и позволяет получить более точные результаты при меньших компьютерных затратах. При этом значение добротности меняется в зависимости от τ, а τ_{σ_l} сдвигает добротность по частоте, но не влияет на ее значение, что позволяет подобрать подходящие времена релаксации. Значение добротности определяется соотношением

$$Q^P \approx \sum_{l=1}^{L} \frac{\tau^P \tau_{\sigma_l}\omega^2}{1 + \tau_{\sigma_l}^2\omega^2} \, , \quad Q^S \approx \sum_{l=1}^{L} \frac{\tau^S \tau_{\sigma_l}\omega^2}{1 + \tau_{\sigma_l}^2\omega^2} \, ,$$

где τ^P и τ^S — параметры поглощения, соответствующие P-, S-волнам.

Приложение 2. Сингулярное разложение и его усечение. Любая квадратная матрица $\mathcal{A}$ порядка n может быть представлена в виде $\mathcal{A} = U\Sigma V^T$.

Такое представление называется *сингулярным разложением матрицы* $\mathcal{A}$, где U и V — унитарные матрицы, состоящие из *левых* и *правых сингулярных векторов* соответственно, а Σ — диагональная матрица, элементы которой $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n >= 0$ называются *сингулярными числами. Число обусловленности* характеризует точность численного решения задачи и определяется как $\nu(\mathcal{A}) = \sigma_1/\sigma_n$.

Усечение сингулярного разложения состоит в занулении наименьших сингулярных чисел σ_j для $j > r$. В результате получается диагональная матрица Σ_r, а усеченное сингулярное разложение матрицы $\mathcal{A}$ принимает вид $\mathcal{A}_r = U\Sigma_r V^T$.

Как известно, r-псевдообратная матрица для $\mathcal{A}$ записывается выражением $\mathcal{A}_r^+ = V\Sigma_r^+ U^T$, где Σ_r^+ — диагональная матрица с элементами $\sigma_1^{-1} \leqslant \sigma_2^{-1} \leqslant \ldots \leqslant \sigma_r^{-1}$. Тогда r-решение, т.е. проекция искомого решения на линейную комбинацию правых старших сингулярных векторов (соответствующих бóльшим по величине сингулярным числам), формально запишется следующим образом: $x_r = \mathcal{A}_r^+ y$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев А.С., Костин В.И., Хайдуков В.Г., Чеверда В.А.* Восстановление двумерных возмущений скорости вертикально-неоднородной акустической среды по данным многократного перекрытия (линеаризованная постановка) // Геология и геофизика. 1997. **38**, № 12. 1980–1992.
2. *Вишневский Д.М., Лисица В.В., Решетова Г.В.* Численное моделирование распространения сейсмических волн в средах с вязкоупругими включениями // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 155–165.
3. *Гадыльшин К.Г., Чеверда В.А.* Обращение полных волновых полей нелинейным методом наименьших квадратов: SVD-анализ // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 499–513.
4. *Романов В.Г.* Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // Сибирский математический журнал. 2012. **53**, № 6. 1401–1412.

5. *Assous F., Collino F.* A numerical method for the explanation of sensitivity: the case of the identification of the 2D stratified elastic medium // Inverse Problems. 1990. **6**, N 4. 487–513.
6. *Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Symes W.W.* Modeling of a constant Q: methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique // Geophysics. 1995. **60**, N 1. 176–184.
7. *Carcione J.M., Picotti S.* P-wave seismic attenuation by slow-wave diffusion: effects of inhomogeneous rock properties // Geophysics. 2006. **71**, N 3. O1–O8.
8. *Carcione J.M.* Seismic modeling in viscoelastic media // Geophysics. 1993. **58**, N 1. 110–120.
9. *Cheverda V.A., Kostin V.I.* R-pseudoinverses for compact operators in Hilbert spaces: existence and stability // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 1995. **3**, N 2. 131–148.
10. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity: an introduction. Academic Press: New York, 1982.
11. *Coleman B.D., Noll W.* Foundations of linear viscoelasticity // Review of Modern Physics. 1961. **33**, N 2. 239–249.
12. *Efimova E.S., Cheverda V.A.* Reliability of attenuation properties recovery for viscoelastic media // Open Journal of Applied Sciences. 2013. **3**, N 1B. 84–88.
13. *Futterman W.I.* Dispersive body waves // J. Geophysics Res. 1962. **67**, N 13. 5279–5291.
14. *Hak B., Mulder W.A.* Seismic attenuation imaging with causality // Geophys. J. Int. 2011. **184**, N 1. 439–451.
15. *Hicks G.J., Pratt R.G.* Reflection waveform inversion using local descent methods: Estimating attenuation and velocity over a gas-sand deposit // Geophysics. 2001. **66**, N 2. 598–612.
16. *Liu H.-P., Anderson D.L., Kanamori H.* Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition // Geophys. J. Int. 1976. **47**, N 1. 41–58.
17. *Mulder W.A., Hak B.* An ambiguity in attenuation scattering imaging // Geophys. J. Int. 2009. **178**, N 3. 1614–1624.
18. *Mulder W.A., Hak B.* Velocity and attenuation perturbations can hardly be determined simultaneously in acoustic attenuation scattering // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 2009. 3078–3082.
19. *Tarantola A.* A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data // Geophysics. 1986. **51**, N 10. 1893–1903.

Поступила в редакцию
28.06.2016

A Study of Coupling between Viscoelastic Parameters Using the Singular Value Decomposition Analysis

E. S. Efimova[1]

[1] *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Engineer, e-mail: EfimovaES@ipgg.sbras.ru*

Received June 28, 2016

Abstract: The solution of a linearized inverse seismic problem of viscoelasticity is studied. The generalized standard linear solid model and the τ method are used to describe media with attenuation. If the heterogeneity of one of the sought parameters influence the variability of another one during the process of numerical solution, then such parameters are said to be called coupled. Such a coupling is a sign of ill-posedness of the original problem. A regularization is necessary to overcome this difficulty. To accomplish this, we propose the truncation of the singular value decomposition to simultaneously determine the P-velocity and its attenuation. A combination of the Lame parameters and the quality factor are used as the parametrization of the medium under consideration.

Keywords: viscoelasticity, seismic attenuation, singular value decomposition, inverse problems, ambiguity of solution.

References

1. A. S. Alekseev, V. I. Kostin, V. G. Khaidukov, and V. A. Cheverda, "Recovery of Two-Dimensional Perturbations of the Velocity of a Vertically Inhomogeneous Medium from Multicoverage Data (Linearized Formulation)," Geolog. Geofiz. **38** (12), 1980–1992 (1997) [Russ. Geol. Geophys. **38** (12), 2012–2025 (1997)].
2. D. M. Vishnevsky, V. V. Lisitsa, and G. V. Reshetova, "Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation in Media with Viscoelastic Intrusions," Vychisl. Metody Programm. **14**, 155–165 (2013).
3. K. G. Gadylshin and V. A. Tcheverda, "Nonlinear Least-Squares Full Waveform Inversion: SVD Analysis," Vychisl. Metody Programm. **15**, 499–513 (2014).

4. V. G. Romanov, “A Two-Dimensional Inverse Problem for the Viscoelasticity Equation,” Sib. Mat. Zh. **53** (6), 1401–1412 (2012) [Sib. Math. J. **53** (6), 1128–1138 (2012)].

5. F. Assous and F. Collino, “A Numerical Method for the Explanation of Sensitivity: The Case of the Identification of the 2D Stratified Elastic Medium,” Inverse Probl. **6** (4), 487–513 (1990).

6. J. O. Blanch, J. O. A. Robertsson, and W. W. Symes, “Modeling of a Constant Q: Methodology and Algorithm for an Efficient and Optimally Inexpensive Viscoelastic Technique,” Geophysics **60** (1), 176–184 (1995).

7. J. M. Carcione and S. Picotti, “P-Wave Seismic Attenuation by Slow-Wave Diffusion: Effects of Inhomogeneous Rock Properties,” Geophysics **71** (3), O1–O8 (2006). doi: 10.1190/1.2194512

8. J. M. Carcione, “Seismic Modeling in Viscoelastic Media,” Geophysics **58** (1), 110–120 (1993).

9. V. A. Cheverda and V. I. Kostin, “R-Pseudoinverses for Compact Operators in Hilbert Spaces: Existence and Stability,” J. Inverse Ill-Posed Probl. **3** (2), 131–148 (1995).

10. R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity: An Introduction* (Academic, New York, 1982).

11. B. D. Coleman and W. Noll, “Foundations of Linear Viscoelasticity,” Rev. Mod. Phys. **33** (2), 239–249 (1961).

12. E. Efimova and V. Cheverda, “Reliability of Attenuation Properties Recovery for Viscoelastic Media,” Open J. Appl. Sci. **3** (1B), 84–88 (2013).

13. W. I. Futterman, “Dispersive Body Waves,” J. Geophys. Res. **67** (13), 5279–5291 (1962).

14. B. Hak and W. A. Mulder, “Seismic Attenuation Imaging with Causality,” Geophys. J. Int. **184** (1), 439–451 (2011).

15. G. J. Hicks and R. G. Pratt, “Reflection Waveform Inversion Using Local Descent Methods: Estimating Attenuation and Velocity over a Gas–Sand Deposit,” Geophysics **66** (2), 598–612 (2001).

16. H.-P. Liu, D. L. Anderson, and H. Kanamori, “Velocity Dispersion due to Anelasticity; Implications for Seismology and Mantle Composition,” Geophys. J. Int. **47** (1), 41–58 (1976).

17. W. A. Mulder and B. Hak, “An Ambiguity in Attenuation Scattering Imaging,” Geophys. J. Int. **178** (3), 1614–1624 (2009).

18. W. A. Mulder and B. Hak, “Velocity and Attenuation Perturbations Can Hardly Be Determined Simultaneously in Acoustic Attenuation Scattering,” SEG Technical Program Expanded Abstracts, 3078–3082 (2009). doi: 10.1190/1.3255494

19. A. Tarantola, “A Strategy for Nonlinear Elastic Inversion of Seismic Reflection Data,” Geophys. **51** (10), 1893–1903 (1986).