

УДК 523.4-52; 573.552

doi 10.26089/NumMet.v17r434

## К ВОПРОСУ О КОРРЕКТНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ С РАЗВИТИЕМ МНОЖЕСТВЕННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ КОЛЛАПСОВ

В. Н. Снытников<sup>1</sup>, О. П. Стояновская<sup>2</sup>

Изучена корректность численных моделей на основе SPH-метода для нестационарных задач гравитационной газодинамики с развитием гравитационных неустойчивостей, в том числе с формированием множественных коллапсов газа в околозвездном диске. Исходные дифференциальные начально-краевые задачи некорректны из-за своей неустойчивости к изменению входных данных. Показано, что в численном методе на основе SPH для решения этих некорректных задач проводится следующая регуляризация: 1) если решение исходной неустойчивой задачи существует на всей временной оси, то ограниченность области изменения переменных в численном методе позволяет удовлетворить условию его устойчивости к малым изменениям входных данных; 2) если решения исходной неустойчивой задачи существуют только на ограниченном временном интервале, как в случае множественных коллапсов, то устойчивый численный метод строится на классе функций, ограниченных фиксированной постоянной, выбираемой из физических соображений. На этом классе функций исходная задача тоже становится корректной. Комбинация SPH-метода с сеточным методом расчета гравитационных сил позволяет обеспечить такую ограниченность численных решений. Для выяснения смысла приближенных численных решений, получаемых в вычислительных экспериментах, следует использовать интегральные функции, слабо чувствительные к деталям численного алгоритма.

**Ключевые слова:** корректность, численный метод, гравитационная динамика газа, неустойчивость, неустойчивость по входным данным, стохастичность, гидродинамика сглаженных частиц, Smoothed-Particle Hydrodynamics (SPH), околозвездный диск, гравитационный коллапс, сгусток газа.

**1. Введение.** Для многих прямых задач математической физики предполагается корректность их постановки. Корректность определяется как существование и единственность решения, которое непрерывно зависит от параметров задачи, а также от начальных и граничных условий. Это требование непрерывной зависимости решения от входных данных выражается через условия устойчивости по отношению к изменению параметров и начальных-граничных условий. При отсутствии устойчивости задача является некорректной (см. раздел 8.1 настоящей статьи). Тем самым, изучение физических неустойчивостей относится к классу некорректных постановок для прямых задач математической физики.

Такие некорректные задачи широко изучаются для случая развития гравитационных неустойчивостей в околозвездных дисках при образовании планет (см., например, [1–8]). Для их решения привлекаются численные методы, которые дают приближенные решения, весьма чувствительные к изменению самого метода и входных данных (см., например, [9–11]). Внешне парадоксально, но численный метод для изучения исходной задачи с неустойчивостью должен быть устойчив к малым изменениям входных данных. Выход из этого парадокса состоит в том, что устойчивость решения исходной задачи (если оно существует) определяется на полубесконечной временной оси, а устойчивость численного решения этой задачи определяется на конечном интервале по времени (см. раздел 8.4 настоящей статьи). Дополним и поясним сделанные утверждения.

Исходная прямая задача заключается в требовании решить сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных и проанализировать полученный ответ. Решение в настоящее время большинства таких систем проводится с помощью численных методов. Применяемый численный метод связан с исходной задачей через теорему Лакса. По этой теореме ([12], стр. 90) из аппроксимации исходной задачи на сетке численным методом и его устойчивости вытекает сходимость к решению исходной задачи при измельчении сетки. Устойчивость численного метода понимается как непрерывная и равномерная

<sup>1</sup> Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, просп. Лаврентьева, 5, 630090, Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: snyt@catalysis.ru

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, факультет естественных наук, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск; науч. сотр., e-mail: stop@catalysis.ru

относительно шага сетки зависимость решения по входным данным в ограниченной области изменения переменных (см. раздел 8.4). Оценить заранее значения констант, входящих в это определение, во многих задачах очень сложно. Принципиальная ограниченность области изменения переменных в численном методе, в частности на конечном временном интервале, позволяет удовлетворить условию его устойчивости к малым изменениям входных данных для устойчивых и неустойчивых задач.

На практике, когда неизвестно, существует ли численное решение, или границы области изменения переменных четко не определены, для устойчивости численного метода часто принимается более жесткое условие — отсутствие в линейном приближении экспоненциально нарастающих функций в численном методе. Трудности возникают в случае, когда исходная задача для системы дифференциальных уравнений в том же линейном приближении имеет экспоненциально нарастающие решения. Однако именно эта ситуация реализуется для исходных некорректных задач при развитии физических неустойчивостей. Соответственно в численном методе, который аппроксимирует исходную систему уравнений, в том же линейном приближении возникают экспоненциально нарастающие сеточные функции. Экспоненциально нарастающие решения в линеаризованной задаче чаще всего оказываются ограниченными в нелинейной постановке, что во многих случаях выражает наличие физических законов сохранения. Поэтому точность выполнения законов сохранения в нестационарных задачах с развитием физических неустойчивостей служит важным критерием правильности работы численного алгоритма для всей исходной нелинейной задачи.

Наличие нелинейности может привести к нахождению решения в фазовом пространстве в областях детерминированности, глобальной стохастичности или переходной зоне между ними [13, 14]. Более того, для пространственных задач одновременно могут существовать близкие в обычном пространстве области, в одной из которых решение будет детерминированным, а рядом — стохастическим. Именно такие случаи реализуются в задачах гравитационной физики с развитием гравитационных неустойчивостей и с возникновением множественных гравитационных коллапсов вещества в околозвездных аккреционных дисках [1–11]. В таких коллапсах плотность вещества на несколько порядков превышает фоновое значение. Она имеет вид дельтаобразных функций, формирующихся за конечное время и разбросанных по пространству [8, 15]. В этих местах уменьшается гравитационная энергия, а кинетическая и тепловая энергии возрастают при конечном значении суммарной энергии.

Усовершенствование численных алгоритмов для решения подобных нестационарных задач гравитационной физики, применимость к ним основных положений вычислительной математики, выяснение смысла и интерпретация получаемых численных решений представляет предмет современных исследований и дискуссий среди специалистов [10, 16–18]. В этих дискуссиях часто необходимы примеры, для которых можно построить относительно простые, но содержательные аналитические решения. Далее в статье будут приведены примеры, на которых можно обсуждать вопросы по решению этих некорректных задач. Основная цель статьи — изучить корректность численных моделей на основе SPH-метода для задач гравитационной физики, в которых рассматриваются нестационарные решения с развитием гравитационных неустойчивостей.

**2. Математическая модель газового околозвездного диска.** Система уравнений гравитационной газовой динамики для околозвездного диска представляет собой уравнения Эйлера, дополненные гравитационной силой и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала среды с газом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) S = 0, \quad \Delta \Phi = 4\pi G \rho. \quad (1)$$

Модель тонкого околозвездного диска включает в себя уравнения газовой динамики для поверхностной плотности и трехмерное уравнение для самосогласованного гравитационного поля:

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dz; \quad p^* = \int_{-\infty}^{+\infty} p dz, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Sigma \mathbf{v}) = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Sigma(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p^* - \Sigma \nabla \Phi, \quad \frac{\partial S^*}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) S^* = 0, \quad \Delta \Phi = 4\pi G \rho \delta(z) = 4\pi G \Sigma.$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость газа в плоскости диска;  $p^*$  — поверхностное давление газа;  $\gamma^*$  — эффективный показатель политропы для квазитрехмерного случая, связанный с показателем политропы  $\gamma$  соотношением  $\gamma^* = 3 - \frac{2}{\gamma}$ ;  $S^* = \ln \frac{T^*}{\Sigma \gamma^{*-1}}$ ,  $T^* = \frac{p^*}{\Sigma}$  — производные величины, аналогичные температуре и энтропии газа;  $\Phi$  — гравитационный потенциал, который представляет собой сумму потенциала неподвижного центрального тела и потенциала диска:  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , где  $\Phi_1 = -\frac{GM_c}{r}$ ,  $M_c$  — масса центрального тела и

$\Phi_2$  — потенциал самосогласованного гравитационного поля, который определяется как решение уравнения Пуассона  $\Delta\Phi_2 = 4\pi G\rho$ ,  $\Phi_2 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$ , что для тонкого диска эквивалентно решению смешанной задачи для уравнения Лапласа  $\Delta\Phi_2 = 0$ ,  $\Phi_2 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $\left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = 2\pi G\Sigma$ .

Базовые размерные величины:  $G$  — гравитационная постоянная,  $R_0 = 100 \text{ АЕ} = 1.5 \times 10^{13} \text{ м}$ ,  $M_{\text{Solar}} = 2 \times 10^{30} \text{ кг}$  — характерный размер и масса системы.

В начальный момент времени задавалась внешняя и внутренняя граница диска, его масса (по которой определялась поверхностная плотность), а также масса центрального тела. Рассматривались диски с массой от 0.1 до 0.4  $M_{\text{Solar}}$  вокруг центрального тела массы 0.8  $M_{\text{Solar}}$ . Поверхностная плотность была обратно пропорциональна радиальной координате. Начальная температура задавалась обратно пропорциональной квадратному корню радиальной координаты и была равна 90 К на радиусе 10 АЕ и 30 К на радиусе 100 АЕ. Начальное распределение плотности и температуры диска воспроизводит результаты численного моделирования коллапса молекулярного облака [19]. Радиальная скорость газа задавалась равной нулю, а угловая скорость — таким образом, чтобы обеспечить равновесную начальную конфигурацию, т.е. так, чтобы центробежная, центростремительная силы и градиент давления уравнивали друг друга:  $\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{\partial\Phi}{\partial r}$ ,  $v_r = 0$ .

Мы моделировали динамику диска протяженностью от 10 до 100 АЕ. Расчетная область имеет размер  $400 \times 400 \text{ АЕ}^2$ , то есть в 2 раза больший, чем начальный диаметр диска.

**3. Гравитационная неустойчивость в газе тонкого околос звездного диска.** Дисперсионное соотношение для рассматриваемой модели тонкого диска (2) выводится в ряде работ (см, например, [20]):

$$(\omega - m\Omega)^2 = c_s^2 k^2 + \kappa^2 - 2\pi G\Sigma |k|, \quad \kappa^2 = 4\Omega^2 + r \frac{d\Omega^2}{dr}. \quad (3)$$

Здесь  $\kappa$  — эпициклическая частота,  $m$  — число спиральных рукавов в диске,  $\Omega$  — угловая скорость вращения и  $c_s$  — скорость звука. Для кеплерова диска  $\kappa = \Omega$ . Если правая часть соотношения оказывается меньше нуля, то в диске возникают экспоненциально нарастающие в линейном приближении возмущения и создаются условия для развития неустойчивости.

Если диск не вращается, то  $\Omega = 0$  и  $\kappa = 0$ , тогда  $\omega^2 = c_s^2 k^2 - 2\pi G\Sigma |k|$ . Из этого соотношения получается критическая длина Джинса  $\lambda_J$  для тонкого диска, которая характеризует минимальный размер возмущения в среде плотности  $\Sigma$ , которое будет нарастать под действием собственного гравитационного поля:  $k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J} = \frac{2\pi G\Sigma}{c_s^2}$ ,  $\lambda_J = \frac{c_s^2}{G\Sigma}$ .

Для вращающегося диска без спиралей  $m = 0$  следует локальное условие Тоомре маргинальной устойчивости из уравнений  $\frac{d\omega^2}{dk} = 0$ ,  $\omega^2 = 0$ :  $k_T = \frac{\pi G\Sigma}{c_s^2}$ ;  $\Lambda_T = \frac{2\pi}{k_T} = 2\lambda_J$ .

Путем подстановки найденного значения  $k_T$  в  $\omega^2 = 0$  мы получаем критическое значение Тоомре параметра  $Q = \frac{\Omega c_s}{\pi G\Sigma} = 1$ . Для  $Q > 1$  тонкий диск стабилен относительно роста радиальных возмущений. На радиусах с  $Q < 1$  диск неустойчив к нарастанию радиальных флуктуаций.

Развитие в локальной области джинсовской неустойчивости может начать сжимать в ней газ. Область гравитирующего газа с характерным размером  $\lambda > \lambda_J$  собирается и концентрирует свою массу  $M_J$  в меньшем объеме. В случае тонкого диска  $M_J \sim \pi \lambda_J^2 \Sigma$ . При уменьшении  $\lambda$  общая энергия остается постоянной.

Однако тепловая энергия при этом растет, а гравитационная отрицательная энергия  $U \sim -\frac{M_J^2}{\lambda}$  — падает.

Если термодинамические свойства среды таковы, что показатель адиабаты  $\gamma < 4/3$ , то силы давления не могут остановить гравитационного сжатия. Возникает гравитационный коллапс вещества, при котором  $\lambda$  стремится к нулю относительно начальных масштабов. При наличии вращения, при несимметричности растущего возмущения относительно максимума плотности и в ряде других случаев коллапс в точку не происходит, а возникают более сложные течения газа. Многочисленные примеры коллапса газа были рассмотрены ранее аналитически [21]. В плоскости диска такие области с развитием гравитационных коллапсов выглядят как возникновение значений плотности, на несколько порядков превышающих средние значения в близкой окрестности. Такие области называются фрагментами или клампами и представляют собой гравитационно связанные сгустки газа (представлены на рис. 1, 3, 6).

**4. Численный метод и программа.** Разработанный численный метод решения газодинамической системы уравнений общего вида (1) и (2) основан на методе дробных шагов с расщеплением по физическим процессам, подробное описание которого приведено в [22]. Система уравнений Эйлера для тонкого

диска (2) решается в лагранжевых переменных SPH-частиц [23]. Каждая частица имеет свое компактное ядро. Она взаимодействует с ближайшими другими частицами на определенном, в общем случае переменном радиусе. Поскольку в разностной схеме не хватает аппроксимационной вязкости для того, чтобы предотвратить при сверхзвуковых скоростях нефизическое проникновение частиц между собой и развитие численной неустойчивости, то в уравнения вводится искусственная вязкость. Из-за этого в модели для SPH-частиц появляется сила трения. Число SPH-частиц характеризует количество сеточных лагранжевых узлов. Это число является параметром задачи. Каждая SPH-частица несет определенную массу. Чтобы найти гравитационную силу, действующую на каждую из частиц с этой массой, вводится сетка в декартовых координатах. На эту сетку проводится интерполяция плотности газа и происходит усреднение ее мелкомасштабных флуктуаций по ближайшему окружению и, тем самым, короткодействующих сил частица-частица на размере сетки. Интерполяция плотности, определенной в SPH-частицах, на регулярную сетку выполняется с использованием ядра PIC (Particle-in-Cell) [24, 25]. Далее на сетке находится гравитационное поле через решение уравнения Пуассона. Для вычисления гравитационного потенциала используется параллельный метод “свертки” решения уравнения Пуассона на декартовой сетке. Система (2) и уравнение для потенциала диска  $\Phi_2$  решаются на каждом временном шаге. Для метода SPH применялся “operational-based” подход с распараллеливанием процедуры вычисления сумм и пересылкой рассчитанных значений массивов. SPH-частицы, приближающиеся к центральному телу на расстояние меньше, чем  $R_{\text{cell}}$ , считаются упавшими на нее и передавшими ей свою массу. Во избежание использования слишком мелких шагов по времени мы устанавливаем радиус поглощающей ячейки равным  $R_{\text{cell}} = 10 \text{ AE}$ .

В настоящей статье приведены результаты расчетов со стандартными параметрами численной модели: 160 000 SPH-частиц и  $1024 \times 1024$  ячеек сетки. Кроме того, нами проводились расчеты с увеличенным разрешением — 640 000 SPH-частиц и  $2048 \times 2048$  ячеек сетки, а также с уменьшенным разрешением — 40 000 SPH-частиц и  $512 \times 512$  ячеек сетки. В большинстве расчетов использовался шаг по времени, равный  $\tau = 0.03$  года.

**5. Результаты вычислительных экспериментов.** На рис. 1а–1в приведены три распределения логарифма поверхностной плотности в плоскости диска для трех разных расчетов в один момент времени 3000 лет, а расчет, представленный на рис. 1г, — для момента времени 3516 лет.

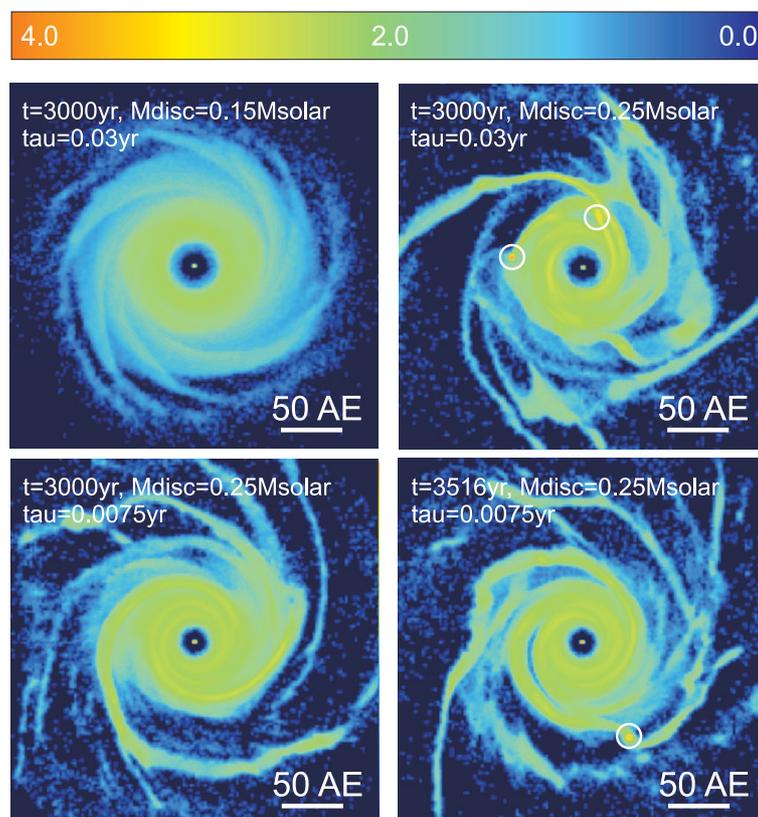


Рис. 1. Логарифм поверхностной плотности газа для моделей с разной массой диска и разным шагом интегрирования по времени  $\tau$

На рис. 1а расчет сделан для маломассивного диска при  $M_{\text{disc}} = 0.15M_{\text{Solar}}$ , на рис. 1б при  $M_{\text{disc}} = 0.25M_{\text{Solar}}$ . Оба эти расчета проведены для шага интегрирования по времени  $\tau = 0.03$  года. На рис. 1в приведен результат расчета для того же  $M_{\text{disc}} = 0.25M_{\text{Solar}}$ , но с меньшим в 4 раза шагом по времени  $\tau = 0.0075$  года.

Как следует из этих рисунков, маломассивный диск при вращении газа вокруг звезды остается в устойчивом состоянии. В нем отсутствуют как локальные неустойчивости Джинса, так и радиальные неустойчивости Тоомре. Наблюдаются лишь неярко выраженные спиральные волны плотности с  $m = 6$  рукавами, а частоты в дисперсионном соотношении (3) имеют вещественные значения. Таким волнам плотности посвящено большое количество работ, ссылки на которые можно найти, к примеру, в [20, 26]. У газа в диске в основном имеется только круговая скорость движения вокруг звезды, поэтому и отдельные SPH-частицы движутся практически по круговым траекториям.

В массивном диске с  $M_{\text{disc}} = 0.25M_{\text{Solar}}$  к тому же моменту времени 3000 лет возникла сложная структура из рукавов и сгустков (клямпов, выделенных на рис. 1б) с высокими значениями плотности. Распределение значений плотности в проекции на плоскость, проходящую через максимум плотности в одном из клямпов, представлено для примера на рис. 2. Из него следует, что газ сжался в сгусток (клямп) диаметра примерно 4 АЕ на 40 расчетных ячейках. Помимо круговой скорости движения вокруг звезды, у газа появилась радиальная скорость. Отдельные SPH-частицы движутся как по круговым, так и по высокоэллиптическим траекториям. Появилось много отдельных SPH-частиц, для которых возможно попадание на звезду. Кроме того, на рисунке хорошо видны SPH-частицы, уходящие из расчетной области по высокоэллиптическим или незамкнутым траекториям.

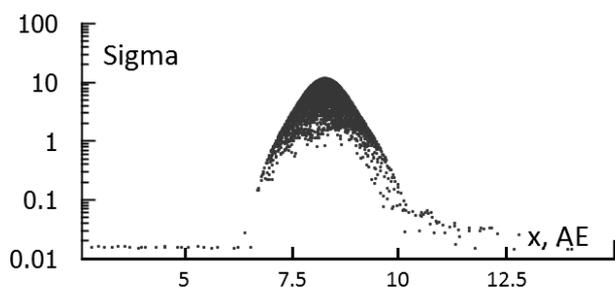


Рис. 2. Поверхностная плотность газа в клямпе в проекции на плоскость оси ординат для модели с  $M_{\text{disc}} = 0.25M_{\text{Solar}}$ . Точки — отдельные SPH-частицы

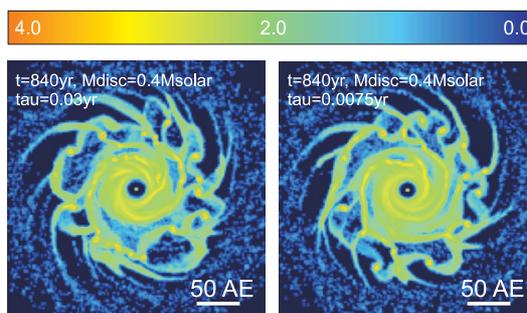


Рис. 3. Логарифм поверхностной плотности газа для модели с  $M_{\text{disc}} = 0.4M_{\text{Solar}}$  и 160 000 SPH-частиц. На правом графике шаг интегрирования  $\tau$  уменьшен в 4 раза по отношению к расчету с левого графика

Сравнение между собой плотностей на рис. 1б и 1в показывает, что распределение плотности в рукавах, положение и количество клямпов на плоскости зависят от счетного параметра — временного шага интегрирования. На рис. 1в для момента времени  $T = 3000$  лет имеет место только формирование тонких нитей плотности и тенденция к сжатию вещества в нитях в сгустки плотности. На этот момент времени нет сформировавшихся сгустков. Они появляются на больших временах — рис. 1г (распределение плотности с клямпом, время  $T = 3516$  лет). При сопоставлении результатов двух расчетов с разными шагами интегрирования по времени (при других одинаковых параметрах задачи), приведенных на рис. 1б и 1г, видно, что на уровне качественного морфологического описания для результатов имеет место определенное подобие распределений плотности и других функций, но для разных моментов времени. Изменение входного физического параметра задачи, увеличение массы диска до  $0.4M_{\text{Solar}}$ , приводит к возникновению многочисленных клямпов. Расчеты с массой диска  $0.4M_{\text{Solar}}$  для различных шагов интегрирования по времени представлены на рис. 3 для времен достаточно полного формирования клямпов. Для одного момента времени в двух разных расчетах эти клямпы различаются своим местоположением и количеством, видом окружающих рукавов. В расчетах с формированием клямпов очевидно отсутствует сближение между собой полученных разностных решений при уменьшении шага по времени. Это показывает, что в расчетах с появлением клямпов для выбранных шагов интегрирования нельзя сделать каких-либо выводов о сходимости численного решения ([12], стр. 137–138). Однако при всех своих различиях распределения на рис. 3 близки между собой в целом, на уровне качественного подобия. Это требует своей интерпретации полученных численных решений и выяснения их смысла. Дополнительные результаты наших многочисленных расчетов с другими значениями параметров и изменением начальных условий можно найти в

статье одного из авторов [27].

Значительное расхождение между собой полученных численных решений для нескольких близких значений физического параметра еще не доказывает, что в математической модели (1) или (2) есть физическая неустойчивость. Вычислительный метод, который определяет наличие физической неустойчивости при решении задач гравитационной физики для 6-мерного фазового пространства, был предложен ранее в [28] через сравнение результатов вычислительных экспериментов по расходимости траекторий частиц с начальными идентичными условиями на процессорах с разными аппаратными способами округления чисел в последних значащих цифрах. При этом минимальная величина для изменения параметра, что требуется в определении неустойчивости по Ляпунову (см. раздел 8.3), определена изменением на бит в последней значащей цифре в представлении чисел на компьютерах. Однако для этого метода необходимы весьма серьезные вычислительные ресурсы. Кроме того, вычислительные эксперименты для задач (1) и (2) ставятся для реальных, а не модельных начальных условий. Для таких условий получение даже дисперсионных уравнений представляет серьезную аналитическую задачу. Заметим, что приведенное выше дисперсионное соотношение по спиральным волнам, неустойчивостям Джинса и Тоомре получено для сильно упрощенных условий. Для решаемой нами задачи (2) с заданными начальными и граничными условиями оно носит лишь ориентировочный характер и позволяет понять, какими параметрами задачи определяется решение.

Не только мы в своих расчетах со сглаженными мелкомасштабными флуктуациями гравитационной силы для отдельной SPH-частицы на размере декартовой сетки, но и другие авторы в своих кодах “частица–частица” обнаруживают подобное поведение решений [17]. По результатам вычислительных экспериментов многие авторы принимают, что при определенном диапазоне значений параметров в диске развиваются физические неустойчивости. Тем самым, явно или неявно считается, что исходная задача (1) некорректна в части отсутствия непрерывной зависимости решения от входных данных (см. раздел 8.2). Практика такова, что в большом количестве работ эти гравитационные неустойчивости в диске изучаются с применением SPH-метода, до некоторой степени ставшим стандартом в вычислительной астрофизике (см., например, обзор численных методов в астрофизике в [29]). Следует ли тогда предположить, что численная SPH-модель, созданная для исходной некорректной задачи, устойчива как численный метод к малым изменениям исходных данных и счетных параметров? А следовательно, выполнены ли условия корректности численного метода по его определению (см. раздел 8.4)? Что фактически было сделано в численной модели с применением SPH-метода, что привело к регуляризации задачи и возможности получения численных решений? Ответ на эти вопросы должен быть увязан с присутствием в решениях возмущений, нарастающих по взрывному типу (гравитационных коллапсов) и приводящих к относительно стабильным множественным сгусткам плотности газа (клампам).

**6. Обсуждение полученных результатов.** Проанализируем полученные численные результаты, для чего рассмотрим три сильно упрощенных случая.

**Пример 1. Неустойчивость.** Для движения SPH-частицы в линейном приближении, в котором учитываются сила трения, пропорциональная скорости, и линейное слагаемое от гравитационной силы, можно написать

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = v + ay, \quad a = 2.$$

Значение константы выбрано из соображений простоты интегрирования. Данная система обыкновенных дифференциальных уравнений переписывается для одного линейного уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - ay = 0, \quad a = 2. \quad (4)$$

Рассмотрим следующие начальные условия задачи Коши для уравнения (4):

$$t = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \quad (5)$$

Единственное решение задачи (4)–(5) имеет вид  $y(t) = \exp(-t)$ , оно существует во всей области  $t \geq 0$  и ограничено  $0 \leq y(t) \leq 1$ . Изменим начальное условие на малую величину  $\epsilon$

$$t = 0, \quad y(0) = 1 + \epsilon, \quad y'(0) = -1. \quad (6)$$

При  $\epsilon \neq 0$  аналитическое решение задачи Коши (4)–(6) имеет вид

$$y(t) = \left(1 + \frac{2}{3}\epsilon\right) \exp(-t) + \frac{\epsilon}{3} \exp(2t) \approx \exp(-t) + \frac{\epsilon}{3} \exp(2t).$$

По сравнению с решением задачи (4)–(5) решение (4)–(6) имеет дополнительное экспоненциальное слагаемое. Это неограниченное решение, причем при  $\epsilon < 0$  оно уходит в минус бесконечность, а при  $\epsilon > 0$  в плюс бесконечность. Графики решений задач с невозмущенными и возмущенными начальными данными приведены на рис. 4. Таким образом, мы получили, что решение  $y = \exp(-t)$  неустойчиво по Ляпунову к малым изменениям начального условия, а траектории между собой экспоненциально расходятся.

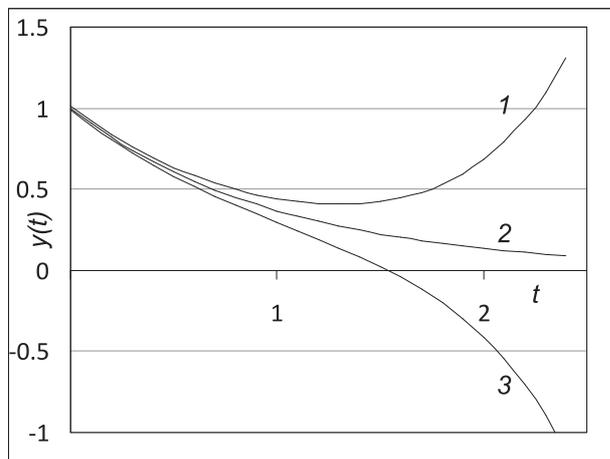


Рис. 4. Решение задачи (4)–(6) с  $\epsilon = 0.01$  — кривая 1; с  $\epsilon = 0.00$  — кривая 2; с  $\epsilon = -0.01$  — кривая 3

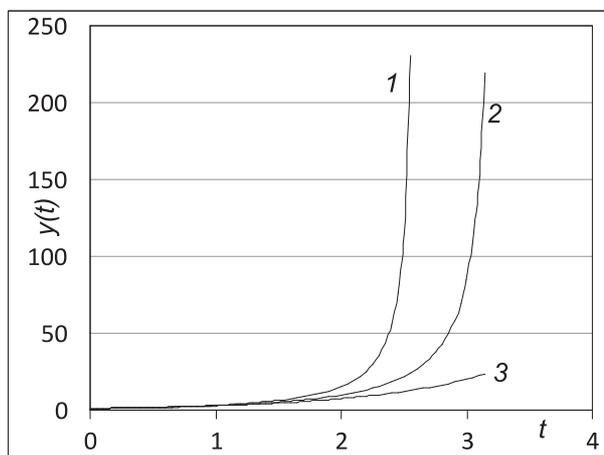


Рис. 5. Решения задачи (8) с  $a = 0.08$  — кривая 1;  $a = 0.04$  — кривая 2;  $a = 0.0$  — кривая 3

В приведенной ниже постановке задачи поменяем входной параметр  $a$  исходной системы (4) на  $a + \epsilon$ :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - ay = 0, \quad a = 2 + \epsilon \tag{7}$$

при невозмущенных начальных условиях (5).

Решение задачи (7) с начальными условиями (5) с точностью до  $\epsilon$  будет иметь вид

$$y(t) \approx \exp(-t) + \frac{\epsilon}{9} \exp(2t).$$

Решение  $y(t) = \exp(-t)$  относительно изменения входного параметра  $a$  тоже неустойчиво. Траектории при изменении  $a$  на  $a + \epsilon$  экспоненциально разбегаются. Таким образом, у задачи (4)–(5), поставленной в области  $t \geq 0$ , существует единственное решение, неустойчивое относительно изменения входных данных. Это некорректная задача.

Экспоненциально нарастающие решения в исходной задаче динамики околозвездного диска проявляются в областях, где у газа быстро возрастают скорости движения. Это зоны столкновения клампов, появления ударных волн, быстрой вспышечной аккреции вещества на звезде и другие высокоскоростные явления. В них могут возникать наблюдаемые в ряде расчетов выбросы одиночных высокоскоростных SPH-частиц из диска и расчетной области. Чтобы рассчитать эти явления, необходимо при увеличении скорости газа сильно уменьшать шаг по времени для выполнения критерия Куранта. Фактически, рост скорости газа по этому примеру приводит к остановке расчета всей задачи.

Воспользуемся далее какой-либо численной схемой, аппроксимирующей исходное уравнение (4), для решения этой задачи Коши. К примеру,

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} - \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} - ay^n = 0, \quad a = 2.$$

Первое дифференциальное приближение (ПДП) этой схемы можно записать в виде

$$y'' - y' - (a + \tau f(\tau, y'''))y = 0.$$

Решение этого уравнения нами уже получено. Оно показывает, что при численном решении происходит изменение параметра задачи  $a$  на  $a + \tau f(\tau, y''')$ . Это изменение зависит от численной схемы посредством функции  $f$  и от счетного параметра  $\tau$ . Численное решение мы получаем на конечном интервале  $0 \leq t \leq T$ .

Для этого  $T$  мы можем выбрать такое  $\tau f(\tau, y''')$ , чтобы  $|y_1(t) - y_2(t)| < M\tau \exp(2T)$ . Тем самым, условие устойчивости численного метода выполнено. Нами построен устойчивый численный метод решения исходно некорректной задачи, подчеркнем — на **конечном** интервале изменения аргумента.

Представим себе, что у нас нет аналитического решения исходной полной задачи с входными данными. Мы получаем численное решение задачи. При выборе некоторого  $\tau$  для заданного интервала интегрирования, на котором проявляются обе экспоненты, решение сначала воспроизведет зависимость  $y(t) = \exp(-t)$ , а затем в зависимости от знака  $f(\tau, y''')$  уйдет в плюс или минус бесконечность, или же возникнут нарастающие от плюса к минусу и обратно колебания. Уменьшение шага  $\tau$ , переход на более точные схемы с изменением  $f(\tau, y''')$  будут сдвигать начало нарастания решения, но само нарастание останется с выходом за пределы представления числа в компьютере. Такое поведение численного решения с изменением входных данных задачи при численном интегрировании в конечном итоге будет интерпретировано как наличие физической неустойчивости в исходной задаче.

**Пример 2. Коллапс.** Взяв уравнение непрерывности для лагранжевой производной  $d\rho/dt$ :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

предполагая поток  $\rho v \sim \text{const}$  и оставляя линейные слагаемые для производной скорости  $\frac{\partial v}{\partial x}$ :

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial x} \approx -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \approx C_1 + C_2 \rho,$$

получим уравнение для плотности в виде  $\frac{d\rho}{dt} = C_1\rho + C_2\rho^2$ . После элементарных преобразований приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{dy}{dt} = y + ay^2, \quad y(0) = 1, \quad t = 0. \quad (8)$$

У задачи (8) при  $a = 0$  очевидное решение  $y(t) = \exp(t)$  во всей области  $t \geq 0$ . Для  $a > 0$  единственное решение задачи (8) (рис. 5):  $y(t) = ((a+1)\exp(-t) - a)^{-1}$ . Оно обращается в бесконечность для момента времени  $T = \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)$ . При  $t > T$  решения не существует, поэтому область существования решения ограничена:  $0 \leq t < T(a)$ .

При  $t \rightarrow T$  у решения есть асимптотика  $y(t) \approx \frac{a^{-1}}{\ln\left(\frac{a+1}{a}\right) - t}$ . Это типичное взрывное решение с

особенностью в знаменателе, характерной для задач с коллапсом. По рис. 5 хорошо видно, что в области, где решение для одного  $a$  уходит на бесконечность, решение с меньшим значением  $a$  имеет конечное значение. То же самое справедливо и для изменения начального условия. В линейном приближении собственное число уравнения в задаче (8) равно  $\lambda = 1 + 2a$ , это означает, что решение в линейном приближении нарастает с этим показателем экспоненты. Траектории расходятся между собой быстрее, чем по экспоненте. Таким образом, для исходной задачи единственное существующее решение неустойчиво по отношению к изменению входных данных. Поэтому данная задача относится к некорректным постановкам.

Применим к решению задачи (8) численный метод. Для простоты анализа используем элементарную схему Эйлера 1-го порядка. Для нее ПДП выглядит следующим образом:  $y' = y + (a + \tau f(\tau, y''))y^2$ . Из него следует, что численный метод изменяет параметр  $a$ . Это изменение зависит от шага интегрирования  $\tau$ . Для других численных схем в ПДП будет меняться функция  $f(\tau)$  и ее зависимость от производных. Меняя  $\tau$ , область существования решения до его ухода на бесконечность можно расширить или сузить. Решая данную задачу численно с любой схемой, аппроксимирующей задачу, и при любом шаге по времени, мы приходим к взрывному росту решения. Этот рост ограничивается максимумом в компьютерном представлении чисел. Ясно, что в этом случае ни один численный метод не будет обладать свойством устойчивости (см. раздел 8.4), и нужно корректировать исходную задачу.

В.С. Владимиров ([30], стр.80) указывает, что можно сделать, чтобы исходная задача стала корректной. Может оказаться, что для этого достаточно рассматривать решения в классе функций, ограниченных фиксированной постоянной. В нашем примере, если в исходной постановке ограничить функции во всей области

$$y' = y + ay^2, \quad y(0) = 1, \quad t = 0; \quad a > 0, \quad t > 0; \quad y \leq M, \quad M > 1, \quad (9)$$

то задача будет корректной в этой области  $t \geq 0$ . В этом случае для численного метода решения задачи условие устойчивости тривиально выполняется, а область существования решения расширяется до любого

значения  $T > 0$ . Отметим, что рассмотрение на классе ограниченных функций не является единственным или универсальным способом регуляризовать некорректную задачу. Дальнейшие сведения по методам решения некорректных задач можно найти в монографиях [31–33].

Применительно для задач гравитационной динамики с развитием коллапсов идея Владимирова представляется весьма плодотворной. По сути именно она реализуется в SPH-методе. В области коллапса по этому методу находится конечное число частиц с конечной массой. При заданном минимальном размере ядра SPH-частицы даже при развитии численного эффекта объединения частиц (клампинговая или парная неустойчивость [34]) плотность газа останется ограниченной величиной. Еще один источник ограничения плотности газа связан с конечным размером ячейки в сеточном методе решения уравнения Пуассона в нашем численном алгоритме. Тем самым, гравитационный потенциал в области коллапса тоже ограничен снизу и всегда приходит к своему насыщению. Аналогичное ограничение потенциала происходит и в других лагранжевых и эйлеровых численных методах [29], включая методы с адаптивными сетками с фиксированной нижней границей для размера сеточной ячейки. Из ограниченности потенциала следует конечность значений скорости при измельчении лагранжевой сетки, т.е. при увеличении числа SPH-частиц. Отсюда также следует, что для интерпретации результатов численного моделирования с развитием коллапсов необходимо определять массу газа, ушедшую в клампы. Эта величина будет более всего отвечать физике процесса и менее всего зависеть от деталей численного алгоритма. Результаты расчетов с анализом этих зависимостей приводятся в статье одного из авторов [27].

**Пример 3. Стохастичность и нелинейность.** Поскольку система уравнений Эйлера для тонкого диска (2) решается в лагранжевых переменных SPH-методом с дискретизацией на количество  $N$  сеточных лагранжевых узлов (частиц), то для них можно записать уравнения движения через гамильтониан системы [13]:

$$dt = \frac{dq_1}{\partial H / \partial p_1} = \dots = \frac{dq_i}{\partial H / \partial p_i} = \dots = \frac{dq_N}{\partial H / \partial p_N}.$$

Здесь  $q_i$  и  $p_i$  — обобщенная координата и импульс  $i$ -й частицы,  $H$  — гамильтониан. Число частиц  $N$  определяет число степеней свободы и является параметром задачи. Каждая SPH-частица несет определенную массу  $m$  и импульсы  $p_r = m\dot{r}$ ,  $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ . В случае, когда гравитационное поле преобладает над силами давления (холодный газ), для одной частицы  $H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) + mV(r)$ . Дальнейшее упрощение в [14] проводится для вращающегося мультиполя  $V(r) = -\frac{g}{|r - r_0|}$ , который соответствует движению клампа по орбите  $r_0(t)$ .

Динамика отдельных SPH-частиц представляет собой классическую задачу движения тела в возмущенном гравитационном поле планеты и звезды. В нашем случае к центральному полю звезды добавляется гравитационное поле от других частиц диска и сила трения (вязкость) от других частиц. Поэтому задача своим потенциалом отличается от кеплерова  $1/r$ . Для маломассивных дисков поле от других частиц для отдельной SPH-частицы можно принять возмущающим с параметром возмущения  $e = \frac{M_{\text{disc}}}{M_{\text{star}}}$ . В этом случае траектории частиц даже в ограниченной области пространства могут отличаться от эллиптических. Они не замкнуты, а в окрестностях сепаратрисс орбиты становятся неустойчивыми [13]. Отсылая читателя к подробному изложению необходимых деталей к монографии [14], приведем основной вывод. Даже при значениях  $e = 10^{-5}$  в системе возникает стохастическая динамика, область существования которой при увеличении этого параметра начинает заполнять весь фазовый объем [13]. При наших значениях параметра  $e \sim 0.001$  по массе клампа в диске или  $e = 5/16$  и  $0.5$  по массе диска заведомо выполнены условия для развития стохастической динамики. Такая динамика самогравитирующего газа в диске может приводить к появлению сильных азимутальных возмущений (высокоэллиптическим орбитам) с выпадением вещества на протозвезду и/или к уходу газа на границы расчетной области (за область звезды с ее околзвездным диском). Это и наблюдается в наших расчетах, что хорошо видно по приведенным распределениям плотности в диске. Таким образом, в нашем случае реализуется стохастическая нерегулярная динамика с расхождением траекторий. Дальнейшее углубление в эту область с вычислением показателей Ляпунова  $\sigma$  движения частиц ([13], стр. 312) как практического критерия стохастичности представляет собой предмет отдельных публикаций. Здесь только отметим, что по этому критерию для регулярного (детерминированного) движения частиц  $\sigma = 0$ , на стохастической компоненте  $\sigma > 0$ .

На рис. 6 приведены результаты расчета динамики диска массы  $0.25 M_{\text{Solar}}$  для трех моментов времени на более подробной сетке с увеличенным числом SPH-частиц относительно расчетов рис. 1. Хорошо видно, что на момент времени  $T = 2400$  сформировались  $m = 3$  четких и узких спиральных рукава, в которых начали проявляться эффекты нелинейности волн и неустойчивости возмущений с большими значениями

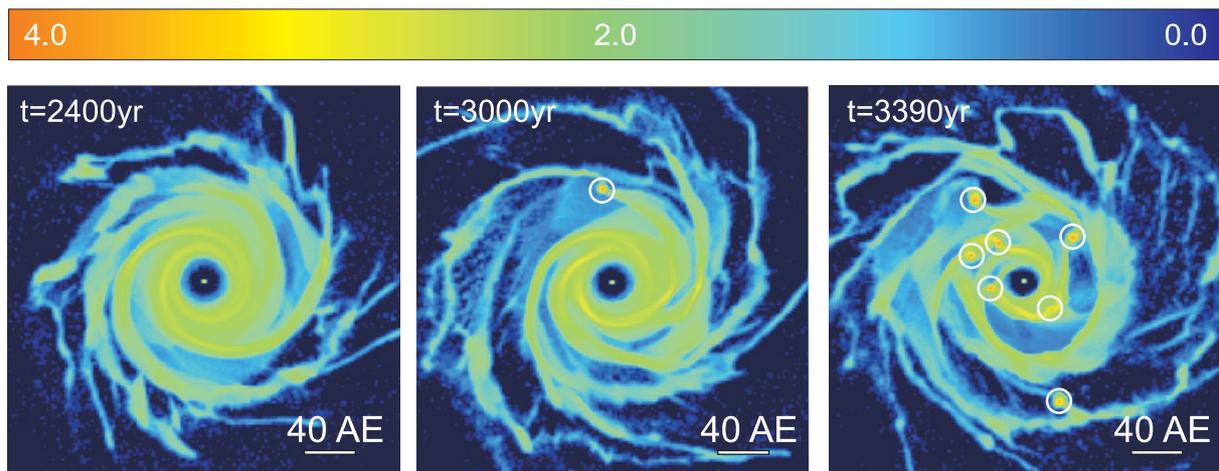


Рис. 6. Развитие неустойчивости в массивном диске с  $M_{\text{disc}} = 0.25$  с 640 000 SPH-частиц на сетке для потенциала  $2048^2$ , более подробной относительно расчетов рис. 1. Логарифм поверхностной плотности газа для моментов времени 2400 лет, 3000 лет и 3390 лет

волновых векторов  $k$  по дисперсионному соотношению (3). Так, спирали начали распадаться с генерацией  $m = 4$  новых спиральных рукавов к моменту времени  $T = 3000$ . Среди частиц появились те, которые ушли с круговых траекторий на более сложные и/или стохастические в результате неустойчивости в холодной окраине диска с формированием фрагментов, что обсуждалось в примере 3. Такая динамика проявляется в виде нитчатой и сеточной структуры на момент  $T = 3000$  на окраинах диска. Появляется ряд частиц, уходящих из области с возрастанием координаты, как было описано в примере 1. На тот же момент  $T = 3000$  в тонком рукаве сформировался первый гравитационно связанный сгусток газа (в англоязычной литературе — кламп). А спустя некоторое время к моменту  $T = 3390$  в диске формируются семь отмеченных на рисунке клампов. Сжатие вещества в этих клампах ограничено размером ячейки для расчета потенциала. Это ограничение обсуждалось в примере 2. Вихревая структура клампов рассматривалась нами ранее в работе [15]. Локальная структура динамики газа в клампе меняется со временем. Такие решения были найдены в трехмерном случае Богоявленским [21]. Существование и динамика клампов оказывает существенное влияние на динамику остального газа в диске, в том числе и на формирование других клампов [5]. Уменьшение шага по времени не меняет общую картину вычислительного эксперимента. Оно сдвигает в определенных пределах, как в примере 2, начало развития неустойчивостей. Из них, в первую очередь, это легко определяемая неустойчивость Джинса формирования клампов в спиральных рукавах, если для этого в диске складываются условия.

Таким образом, для исходной модели (1) и (2) с возможными физическими неустойчивостями нами создана устойчивая численная модель динамики гравитирующего газа на основе лагранжева SPH-метода за счет его комбинирования с сеточным решением уравнения Пуассона для вычисления дальнедействующих гравитационных сил. Эта численная модель имеет следующие важные свойства (не все из которых подробно описаны в этой статье), а также добавления к исходной постановке.

1. Функция плотности сверху ограничена введением конечного радиуса ядра SPH-частицы и размера ячейки у сетки для расчета потенциала.
2. Как следствие, модуль значения скорости ограничен в силу закона сохранения энергии.
3. В модели выполняются интегральные законы сохранения, что служит одним из критериев правильности численного алгоритма, когда решения выходят на свои нелинейные стадии.
4. Выполнены условия пространственной симметрии, которые являются следствием сохранения импульса и момента импульса для изолированного диска.
5. Анализ решений в линейном приближении по дисперсионному соотношению показывает возможность развития физической неустойчивости.
6. В области существования устойчивых решений и корректности исходной задачи алгоритм устойчив, и имеет место воспроизводимость имеющихся аналитических решений.
7. В области существования физической неустойчивости расчеты с изменением физических входных данных и параметров численного метода качественно отвечают представлениям о поведении результатов вычислительных экспериментов в зависимости от их изменения (примеры 1–3).
8. Изменение численной схемы (смена ядра SPH-частицы, изменение метода решения уравнения Пуас-

сона) не приводит к качественно новым результатам вычислительных экспериментов в областях входных данных, при которых развиваются физические неустойчивости.

9. Интегральные физические представления, менее всего чувствительные к численному алгоритму и отвечающие изучаемой физике процесса, должны быть выявлены в первую очередь для выяснения смысла получаемых приближенных решений с множественным развитием локальных гравитационных коллапсов.

**7. Заключение.** Основная трудность в математическом моделировании физических и, в частности, гравитационных неустойчивостей состоит в разработке численного метода, **устойчивого** к малым изменениям входных данных, а также в выяснении смысла получаемых приближенных решений. Нами изучена корректность численных моделей на основе SPH-метода для нестационарных задач гравитационной физики с развитием гравитационных неустойчивостей, в том числе с формированием множественных гравитационных коллапсов в плоскости околос звездного диска. Мы показали, что разработка для этих задач численного метода, устойчивого к малым изменениям входных данных, определяется ограничением области изменения переменных, если решение исходной задачи существует. При отсутствии решения исходной задачи, как в случае множественных коллапсов, устойчивый численный метод для устойчивых и неустойчивых задач строится на классе функций, ограниченных фиксированной постоянной и выбираемой из физических соображений. На этом классе функций исходная задача становится тоже корректной. Для выяснения смысла получаемых приближенных численных решений следует использовать интегральные функции, слабо чувствительные к деталям численного алгоритма.

**8. Приложение.**

**8.1. Корректность [35, стр. 112].** Задача корректна, если она разрешима при любых начальных (или граничных) данных, принадлежащих к некоторому классу, имеет единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных.

Задача некорректна, если она разрешима не при любых начальных (или граничных) данных, либо если она имеет неединственное решение, либо если нельзя выбрать такие нормы для решений и такие нормы для начальных данных, чтобы в этих нормах имела место непрерывная зависимость решения от условий задачи.

**8.2. Непрерывность функции [36].** Функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $x = a$ , непрерывна при  $x = a$  (в точке  $a$ ), если для каждого положительного числа  $\epsilon > 0$  существует такое положительное число  $\delta > 0$ , что при  $|x - a| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . Функция нескольких переменных, непрерывная по каждой переменной, может не быть непрерывной в точке со значениями этих переменных.

**8.3. Устойчивость по Ляпунову [36].** Решение  $y_i = y_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида  $\frac{dy_i}{dt} = f_i(t; y_1, y_2, \dots, y_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), с начальными условиями  $y_i(t_0) = y_{i0}$  называется устойчивым по Ляпунову, если для любого  $\epsilon > 0$  можно найти такое  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , что из системы неравенств  $|x_{i0} - y_{i0}| < \delta$  будут следовать неравенства  $|x_i(t) - y_i(t)| < \epsilon$  для всех  $t \geq t_0$ , где  $x_i(t)$  — решение, определяемое начальными условиями  $x_i(t_0) = x_{i0}$ . В противном случае решение  $y_i(t)$  называется неустойчивым. Вопрос устойчивости по параметру  $a$  системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается ее расширением  $\frac{dy_{n+1}}{dt} = 0, y_{n+1}(t_0) = a$ .

**8.4. Корректность численного метода [12, стр. 138].** Разностная задача поставлена корректно, если при любых достаточно малых шагах сетки выполнено следующее.

1) Численное решение  $y$  исходной дифференциальной задачи существует и единственно при всех входных данных из некоторого допустимого множества.

2) Решение  $y$  непрерывно зависит от входных данных. Эта зависимость равномерна относительно величины шагов сетки  $h, \tau$ . Второе условие означает, что существует такая постоянная  $M_1 > 0$ , не зависящая от  $h, \tau$  (при достаточно малых сеточных шагах  $h, \tau$ ) и от выбора входных данных, что справедливо неравенство  $\|y_1(t) - y(t)\| \leq M_1 \|v_1 - v\|$ . Здесь  $y_1(t)$  и  $y(t)$  — решения разностной задачи с входными данными  $v_1$  и  $v$ ,  $\|\cdot\|$  — некоторые нормы в пространстве сеточных функций. Свойство разностной схемы, выраженное этим неравенством, называется устойчивостью численного метода по входным данным.

Другая оценка устойчивости имеет вид  $\|y^{j+1}\| \leq \rho \|y^j\|$ ,  $\rho = \exp(C_0\tau)$ , где  $C_0 > 0$  — постоянная, не зависящая от шагов сетки, и  $j$  — номер шага по времени. Хотя  $\rho > 1$ , эта оценка обеспечивает выполнение неравенства с константой  $M_1$ , определяемой из условия  $\rho^j \leq \exp(C_0 j\tau) = \exp(C_0 T) = M_1$ , где  $T$  — конечный временной интервал  $0 < t_j \leq T$ , на котором рассматривается решение.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-00916 и грантом Президента РФ МК-5915.2016.1. Работа частично поддержана Министерством образования и науки РФ. Расчеты проведены с использованием

ресурсов ЦКП “Сибирский суперкомпьютерный центр” Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boley A.C., Hayfield T., Mayer L., Durisen R.H.* Clumps in the outer disk by disk instability: why they are initially gas giants and the legacy of disruption // *Icarus*. 2010. **207**, N 2. 509–516.
2. *Boss A.P.* Possible rapid gas giant planet formation in the solar nebula and other protoplanetary disks // *The Astrophysical Journal*. 2000. **536**, N 2. L101–L104.
3. *Nayakshin S., Cha S.-H., Bridges J.C.* The tidal downsizing hypothesis for planet formation and the composition of solar system comets // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011. **416**, N 1. L50–L54.
4. *Machida M.N., Inutsuka S.-I., Matsumoto T.* Recurrent planet formation and intermittent protostellar outflows induced by episodic mass accretion // *The Astrophysical Journal*. 2011. **729**, N 1. doi: 10.1088/0004-637X/729/1/42.
5. *Meru F.* Triggered fragmentation in self-gravitating discs: forming fragments at small radii // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. **454**, N 3. 2529–2538.
6. *Snytnikov V.N., Stoyanovskaya O.P.* Clump formation due to the gravitational instability of a multiphase medium in a massive protoplanetary disc // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013. **428**, N 1. 2–12.
7. *Vorobyov E.I., Basu S.* Formation and survivability of giant planets on wide orbits // *Astrophysical J. Letters*. 2010. **714**, N 1. L133–L137.
8. *Zhu Z., Hartmann L., Nelson R.P., Gammie C.F.* Challenges in forming planets by gravitational instability: disk irradiation and clump migration, accretion, and tidal destruction // *The Astrophysical Journal*. 2012. **746**, N 1. doi: 10.1088/0004-637X/746/1/110.
9. *Young M.D., Clarke C.J.* Dependence of fragmentation in self-gravitating accretion discs on small-scale structure // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. **451**, N 4. 3987–3994.
10. *Takahashi S.Z., Tsukamoto Y., Inutsuka S.* A revised condition for self-gravitational fragmentation of protoplanetary discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. **458**, N 4. 3597–3612.
11. *Meru F., Bate M.R.* Non-convergence of the critical cooling time-scale for fragmentation of self-gravitating discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011. **411**, N 1. L1–L5.
12. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
13. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
14. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику, от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
15. *Стояновская О.П., Снытников В.Н.* Численное моделирование образования уединенных вихрей повышенной плотности в околосредном диске // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 377–383.
16. *Bate M.R., Burkert A.* Resolution requirements for smoothed particle hydrodynamics calculations with self-gravity // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1997. **288**, N 4. 1060–1072.
17. *Nelson A.F.* Numerical requirements for simulations of self-gravitating and non-self-gravitating discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2006. **373**, N 3. 1039–1073.
18. *Truelove J.K., Klein R.I., McKee C.F., Holliman J.H., Howell L.H., Greenough J.A.* The Jeans condition: a new constraint on spatial resolution in simulations of isothermal self-gravitational hydrodynamics // *The Astrophysical Journal*. 1997. **489**, N 2. L179–L183.
19. *Vorobyov E.I.* Embedded protostellar disks around (sub-)solar protostars. I. Disk structure and evolution // *The Astrophysical Journal*. 2010. **723**, N 2. 1294–1307.
20. *Рольфс К.* Лекции по теории волн плотности. М.: Мир, 1980.
21. *Богоявленский О.И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
22. *Стояновская О.П., Снытников Н.В., Снытников В.Н.* Алгоритм для решения нестационарных задач гравитационной газовой динамики: комбинация метода SPH и сеточного метода вычисления гравитационного потенциала // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. **16**. 52–60.
23. *Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics // *Annual review of astronomy and astrophysics*. 1992. **30**. 543–574.
24. *Hockney R.W., Eastwood J.W.* Computer simulation using particles. New York: McGraw-Hill, 1981.
25. *Березин Ю.А., Вишнев В.А.* Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980.
26. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.
27. *Стояновская О.П.* Численное моделирование развития гравитационной неустойчивости и образования сгустков вещества в массивных околосредных дисках с использованием интегральной характеристики для интерпретации результатов // *Вычислительные методы и программирование*. 2016. **17**. 339–352.
28. *Вишнев В.А., Никитин С.А., Снытников В.Н.* Исследование неустойчивостей бесстолкновительных систем по стохастическим траекториям // *Письма в ЖЭТФ*. 2003. **78**, № 6. 810–815.
29. *Бисикало Д.В., Жилкин А.Г., Боярчук А.А.* Газодинамика тесных двойных звезд. М.: Физматлит, 2013.
30. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

31. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
32. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
33. *Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г.* Некорректные задачи астрофизики. М.: Наука, 1985.
34. *Schüessler I., Schmitt D.* Comments on smoothed particle hydrodynamics // *Astronomy and Astrophysics*. 1981. **97**, N 2. 373–379.
35. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
36. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию  
15.08.2016

---

**On the Correctness of Numerical Simulation of Gravitational Instability  
with the Evolution of Multiple Gravitational Collapses**

**V. N. Snytnikov<sup>1</sup> and O. P. Stoyanovskaya<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Boreskov Institute of Catalysis, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt  
Lavrentyeva 5, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: snyt@catalysis.ru*

<sup>2</sup> *Novosibirsk State University, Faculty of Natural Sciences; ulitsa Pirogova 2, Novosibirsk, 630090, Russia;  
Ph.D., Scientist, e-mail: stop@catalysis.ru*

Received August 15, 2016

**Abstract:** We study the correctness of numerical models based on the SPH-method for nonstationary problems of gravitational gas dynamics with the development of gravitational instability, including with the formation of multiple collapses of a gas in a circumstellar disk. The original differential initial boundary value problems are ill-posed because of their instability with respect to variations of input data. It is shown that the following regularization is performed in the SPH-based numerical method of solving such problems: (1) if the solution to the original unstable problem exists on the entire time axis, then the condition of the method's stability with respect to small variations of input data is satisfied due to a bounded range of the variables; (2) if the solution of the original unstable problem exists only on a bounded time interval, as in the case of multiple collapses, then a stable numerical method can be developed on a class of functions bounded by a fixed constant chosen from physical considerations. On this class of bounded functions, the original problem becomes well-posed. A combination of the SPH method with a grid-based method of calculating the gravitational forces allows one to ensure the boundedness of numerical solutions. In order to clarify a meaning of the approximate numerical solutions obtained by computer simulations, it is necessary to use the integral functions weakly sensitive to the details of the numerical algorithm in use.

**Keywords:** well-posedness, numerical methods, gravitational gas dynamics, instability, stability with respect to the input data, stochastics, Smoothed-Particle Hydrodynamics (SPH), circumstellar disc, gravitational collapse, gas clump.

**References**

1. A. C. Boley, T. Hayfield, L. Mayer, and R. H. Durisend, "Clumps in the Outer Disk by Disk Instability: Why They are Initially Gas Giants and the Legacy of Disruption," *Icarus* **207** (2), 509–516 (2010).
2. A. P. Boss, "Possible Rapid Gas Giant Planet Formation in the Solar Nebula and Other Protoplanetary Disks," *Astrophys. J.* **536** (2), L101–L104 (2000).
3. S. Nayakshin, S.-H. Cha, and J. C. Bridges, "The Tidal Downsizing Hypothesis for Planet Formation and the Composition of Solar System Comets," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **416** (1), L50–L54 (2011).
4. M. N. Machida, S.-I. Inutsuka, and T. Matsumoto, "Recurrent Planet Formation and Intermittent Protostellar Outflows Induced by Episodic Mass Accretion," *Astrophys. J.* **729** (1), 1–17 (2011). doi: 10.1088/0004-637X/729/1/42
5. F. Meru, "Triggered Fragmentation in Self-Gravitating Discs: Forming Fragments at Small Radii," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **454** (3), 2529–2538 (2015).
6. V. N. Snytnikov and O. P. Stoyanovskaya, "Clump Formation Due to the Gravitational Instability of a Multiphase Medium in a Massive Protoplanetary Disc," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **428** (1), 2–12 (2013).

7. E. I. Vorobyov and S. Basu, "Formation and Survivability of Giant Planets on Wide Orbits," *Astrophys. J. Lett.* **714** (1), L133–L137 (2010).
8. Z. Zhu, L. Hartmann, R. P. Nelson, and C. F. Gammie, "Challenges in Forming Planets by Gravitational Instability: Disk Irradiation and Clump Migration, Accretion, and Tidal Destruction," *Astrophys. J.* **746** (1), 1–26 (2012). doi: 10.1088/0004-637X/746/1/110
9. M. D. Young and C. J. Clarke, "Dependence of Fragmentation in Self-Gravitating Accretion Discs on Small-Scale Structure," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **451** (4), 3987–3994 (2015).
10. S. Z. Takahashi, Y. Tsukamoto, and S. Inutsuka, "A Revised Condition for Self-Gravitational Fragmentation of Protoplanetary Discs," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **458** (4), 3597–3612 (2016).
11. F. Meru and M. R. Bate, "Non-Convergence of the Critical Cooling Time-Scale for Fragmentation of Self-Gravitating Discs," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **411** (1), L1–L5 (2011).
12. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Difference Methods for Solving the Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
13. A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer, New York, 1983; Mir, Moscow, 1984).
14. G. M. Zaslavskii and R. Z. Sagdeev, *Introduction to Nonlinear Physics. From the Pendulum to Turbulence and Chaos* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
15. O. P. Stoyanovskaya and V. N. Snytnikov, "Numerical Modeling of Formation of High Density Solitary Vortices in a Circumstellar Disk," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 377–383 (2012).
16. M. R. Bate and A. Burkert, "Resolution Requirements for Smoothed Particle Hydrodynamics Calculations with Self-Gravity," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **288** (4), 1060–1072 (1997).
17. A. F. Nelson, "Numerical Requirements for Simulations of Self-Gravitating and Non-Self-Gravitating Discs," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **373** (3), 1039–1073 (2006).
18. J. K. Truelove, R. I. Klein, C. F. McKee, et al., "The Jeans Condition: A New Constraint on Spatial Resolution in Simulations of Isothermal Self-Gravitational Hydrodynamics," *Astrophys. J.* **489** (2), L179–L183 (1997).
19. E. I. Vorobyov, "Embedded Protostellar Disks Around (Sub-)Solar Protostars. I. Disk Structure and Evolution," *Astrophys. J.* 2010. **723** (2), 1294–1307 (2010).
20. K. Rohlfs, *Lectures on Density Wave Theory* (Springer, Berlin, 1977; Mir, Moscow, 1980).
21. O. I. Bogoyavlenskii, *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1980; Springer, Berlin, 1985).
22. O. P. Stoyanovskaya, N. V. Snytnikov, and V. N. Snytnikov, "An Algorithm for Solving Transient Problems of Gravitational Gas Dynamics: A Combination of the SPH Method with a Grid Method of Gravitational Potential Computation," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 52–60 (2015).
23. J. J. Monaghan, "Smoothed Particle Hydrodynamics," *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **30**, 543–574 (1992).
24. R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (McGraw-Hill, New York, 1981).
25. Yu. A. Berezin and V. A. Vshivkov, *Particle-in-Cell Methods in Rarefied Plasma Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1980) [in Russian].
26. V. L. Polyachenko and A. M. Fridman, *Equilibrium and Stability of Gravitating Systems* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
27. O. P. Stoyanovskaya, "Numerical Simulation of Gravitational Instability Development and Clump Formation in Massive Circumstellar Disks Using Integral Characteristics for the Interpretation of Results," *Vychisl. Metody Programm.* **17**, 339–352 (2016).
28. V. A. Vshivkov, S. A. Nikitin, and V. N. Snytnikov, "Studying Instability of Collisionless Systems on Stochastic Trajectories," *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **78** (6), 810–815 (2003) [*JETP Lett.* **78** (6), 358–362 (2003)].
29. D. V. Bisikalo, A. G. Zhilkin, and A. A. Boyarchuk, *Gas Dynamics of Close Binary Stars* (Fizmatlit, Moscow, 2013) [in Russian].
30. V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1971; Marcel Dekker, New York, 1971).
31. S. I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems* (Sibirsk. Nauchn. Izd., Novosibirsk, 2009) [in Russian].
32. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1974; Wiley, New York, 1977).
33. A. V. Goncharskii, A. M. Cherepashchuk, and A. G. Yagola, *Ill-Posed Problems in Astrophysics* (Nauka,

Moscow, 1985) [in Russian].

34. M. Schüssler and D. Schmitt, “Comments on Smoothed Particle Hydrodynamics,” *Astron. Astrophys.* **97** (2), 373–379 (1981).

35. S. K. Godunov, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].

36. G. Korn and T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1968; Nauka, Moscow, 1973).