УДК 517.988.68

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ И АТТРАКТОРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Ю. Кокурин[1]

Строится и исследуется класс методов аппроксимации решений нелинейных уравнений с приближенно заданным гладким оператором в гильбертовом пространстве при отсутствии свойства регулярности у производной оператора. Искомое решение аппроксимируется траекторией нелинейной динамической системы, связанной с рассматриваемым уравнением. Конструкция этой системы определяется линеаризацией исходного уравнения по схеме Гаусса–Ньютона и различными способами ее регуляризации. При выполнении ряда условий установлено существование шара, притягивающего соответствующую область фазового пространства, а также наличие у системы минимального аттрактора, располагающегося в малой окрестности искомого решения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторное уравнение, нерегулярный оператор, регуляризация, динамическая система, аттрактор.

1. Постановка задачи. Объектом исследования в работе являются методы аппроксимации решения уравнения

$$F(x) = 0, \quad x \in H_1, \tag{1.1}$$

где $F:\ H_1 \to H_2$ — нелинейный оператор, действующий в паре гильбертовых пространств (H_1, H_2). Обозначим через x^* интересующее нас решение уравнения (1.1) и положим $\Omega_R(x) = \big\{z \in H_1:\ \|z - x\| < R\big\}$. Предполагается, что оператор $F(x)$ дифференцируем по Фреше, а производная $F'(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\big\|F'(x_1) - F'(x_2)\big\| \leqslant L\,\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1,\ x_2 \in \Omega_R(x^*). \tag{1.2}$$

Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ используется для единообразного обозначения норм соответствующих пространств. От операторов $F'(x)$, $F'^*(x)F'(x)$ не требуется ограниченная обратимость (регулярность) в окрестности решения x^*, поэтому исходная задача (1.1) является в общем случае некорректной и устойчивая аппроксимация ее решения в условиях погрешностей в задании $F(x)$ требует привлечения методов регуляризации (см., например, [1–3]). Будем предполагать, что вместо точного оператора $F(x)$ в (1.1) доступно лишь его приближение $\widetilde{F}:\ H_1 \to H_2$, дифференцируемое по Фреше и удовлетворяющее неравенству (1.2) с той же константой L и условиям

$$\big\|\widetilde{F}(x^*)\big\| \leqslant \delta; \quad \big\|\widetilde{F}'(x) - F'(x)\big\| \leqslant \delta \quad \forall x \in \Omega_R(x^*), \tag{1.3}$$

где $\delta \in [0, \delta_0]$.

Плодотворный и широко используемый подход к построению методов аппроксимации решения x^* уравнения (1.1) заключается в конструировании по данному оператору $F(x)$ дискретной либо непрерывной динамической системы, для которой x^* была бы точкой притяжения. В непрерывном случае для реализации этой идеи требуется построить систему

$$\dot{x} = \Phi(x), \quad x = x(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.4}$$

по отношению к которой x^* была бы асимптотически устойчивой точкой покоя, т.е.

$$\Phi(x^*) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+\infty}\big\|x(t) - x^*\big\| = 0$$

по крайней мере для начальных условий $x(0) = x_0$ из фиксированной окрестности x^*. В регулярном случае, когда оператор $F'(x)$ (либо $F'^*(x)F'(x)$) непрерывно обратим, в качестве (1.4) могут выступать, например, системы

$$\dot{x} = -\big(F'(x)\big)^{-1}F(x), \quad \dot{x} = -\big(F'^*(x)F'(x)\big)^{-1}F'^*(x)F(x), \tag{1.5}$$

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kokurin@marsu.ru

являющиеся непрерывными аналогами классических итерационных методов Ньютона–Канторовича и Гаусса–Ньютона (см., например, [4]). В нерегулярной ситуации схемы вида (1.5) не являются в общем случае реализуемыми и тем более не порождают траектории $x = x(t)$, аппроксимирующие x^* в каком-либо разумном смысле даже при отсутствии погрешностей в задании $F(x)$. Моделью динамических систем, пригодных в этом случае, могут служить предложенные в [5] итерационные процессы $x_0 \in \Omega_R(x^*)$,

$$x_{n+1} = \xi - \Theta\big(\widetilde{F}'^*(x_n)\widetilde{F}'(x_n), \alpha\big)\widetilde{F}'^*(x_n)\big(\widetilde{F}(x_n) - \widetilde{F}'(x_n)(x_n - \xi)\big), \tag{1.6}$$

где $\Theta(\lambda, \alpha)$ — порождающая функция, $\xi \in H_1$ — управляющий параметр, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. К процессу (1.6) приходим, записав линеаризацию приближенно заданного уравнения (1.1) по методу Гаусса–Ньютона

$$\widetilde{F}'^*(x_n)\widetilde{F}'(x_n)(x - x_n) + \widetilde{F}'^*(x_n)\widetilde{F}(x_n) = 0, \quad x \in H_1, \tag{1.7}$$

и применив к некорректному в общем случае уравнению (1.7) схему [6, с. 28] аппроксимации его ξ — нормального решения.

Сходимость процессов (1.6) исследовалась при выполнении следующего условия, имеющего смысл приближенной истокопредставимости начальной невязки $x^* - \xi$.

Условие A. Имеет место представление

$$x^* - \xi = \big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v + w; \quad v,\ w \in H_1, \tag{1.8}$$

где $p \geqslant 1/2,\ \|w\| \leqslant \Delta$.

Величина Δ в условии A имеет смысл погрешности классического истокообразного представления $x^* - \xi \in R\Big(\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p\Big)$, где $R(A)$ есть образ оператора A. Как показано в [5], для определяемых в соответствии с (1.6) приближений $\{x_n\}$ справедливо предельное соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \|x_n - x^*\| \leqslant \frac{C_0}{\sqrt{\alpha}}\big(\delta + \Delta + \|v\|\,\alpha^p\big). \tag{1.9}$$

Согласно (1.9), итерации x_n стабилизируются при $n \to \infty$ в окрестности решения x^* с радиусом, пропорциональным погрешностям δ, Δ.

В настоящей работе изучается непрерывный аналог процесса (1.6), определяемый операторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \xi - \Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x), \alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\big(\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}'(x)(x - \xi)\big) - x, \quad x(0) = x_0 \in \Omega_R(x^*). \tag{1.10}$$

Здесь, как и в (1.6), x_0 — начальное приближение к x^*, $\alpha > 0$. Под решением задачи Коши (1.10) понимается H_1-значная функция $x = x(t)$, определенная на некотором отрезке $[0, \widetilde{T}\,]$ $(\widetilde{T} > 0)$, сильно непрерывно дифференцируемая на нем, обращающая дифференциальное уравнение (1.10) в тождество при $t \in [0, \widetilde{T}\,]$ и удовлетворяющая начальному условию из (1.10).

Согласно (1.2), $\big\|F'(x)\big\|,\ \big\|\widetilde{F}'(x)\big\| \leqslant N \quad \forall x \in \Omega_R(x^*)$, где $N = \big\|F'(x^*)\big\| + LR + \delta_0$. Всюду в дальнейшем считаем, что функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ при каждом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ аналитична по λ в открытой области $D_\alpha \subset \mathbf{C}$, содержащей отрезок $[0, N^2]$ вещественной оси. Требование аналитичности $\Theta(\lambda, \alpha)$ не должно вести к существенному ограничению общности построений, поскольку большинство порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$, используемых в дискретных аналогах (1.6) процесса (1.10), ему удовлетворяет (см. [3]). Помимо этого считаем выполненными следующие основные условия [3, с. 102].

Условие B. Для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ справедливо неравенство

$$\sup_{\lambda\in[0,N^2]} \big|\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}\big| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}}\,. \tag{1.11}$$

Условие C. Для некоторого $p_0 \geqslant 1/2$ (где, возможно, $p_0 = \infty$) при всех $p \in [0, p_0]$ $(p \in [0, \infty)$ в случае $p_0 = \infty)$ выполняется соотношение

$$\sup_{\lambda\in[0,N^2]} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda\big|\,\lambda^p \leqslant C_2\alpha^p \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{1.12}$$

где $C_2 = C_2(p)$.

Здесь и далее через $C_1, C_2, \ldots$ обозначаются положительные абсолютные константы, зависящие, вообще говоря, от L, N, но не зависящие от α, δ, Δ.

Целью работы является исследование асимптотических свойств траекторий $x(t)$ динамической системы (1.10). При условии достаточной близости начального приближения x_0 к x^* будет установлено аналогичное (1.9) соотношение

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\big\|x(t)-x^*\big\| < C_3\Big(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}+\|v\|\,\alpha^p+\|v\|\,\delta+\Delta\Big). \tag{1.13}$$

Неравенство (1.13) означает, что шар с центром в x^* является притягивающим множеством для точек x_0, лежащих в некоторой окрестности x^*. При наложении на оператор $\widetilde{F}(x)$ подходящих условий компактности устанавливается наличие у системы (1.10) связного, компактного и инвариантного минимального аттрактора, который естественно рассматривать в качестве аппроксимирующего x^* множества, генерируемого процессом (1.10).

Структура работы следующая: в п. 2 устанавливаются необходимые промежуточные оценки, п. 3 посвящен доказательству оценки (1.13), в п. 4 устанавливается наличие у системы (1.10) минимального аттрактора.

2. Вспомогательные оценки. Введем обозначение

$$\widetilde{\Phi}(x)=\xi-\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\big(\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}'(x)(x-\xi)\big). \tag{2.1}$$

С учетом (2.1) задача Коши (1.10) принимает вид

$$\dot{x}=\widetilde{\Phi}(x)-x,\quad x(0)=x_0. \tag{2.2}$$

Используя представление Рисса–Данфорда для функций линейных непрерывных операторов [7, с. 455] и условия, наложенные в п. 1 на оператор $\widetilde{F}(x)$ и функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$, убеждаемся, что для любого $z_0\in\Omega_R(x^*)$ найдется такое $\varepsilon_0>0$, что с некоторыми константами N_1, N_2, зависящими, вообще говоря, от z_0, ε_0, выполняются неравенства

$$\big\|\widetilde{\Phi}(x)\big\|\leqslant N_1,\quad \big\|\widetilde{\Phi}(x_1)-\widetilde{\Phi}(x_2)\big\|\leqslant N_2\|x_1-x_2\|\quad \forall x,\ x_1,\ x_2\in\Omega_{\varepsilon_0}(z_0). \tag{2.3}$$

Отсюда следует (см., например, [8, с. 397]), что решение $x=x(t)$ задачи Коши (1.10) существует при $t\in[0,\widetilde{T}\,]$ с некоторым $\widetilde{T}=\widetilde{T}(x_0)>0$ и единственно на этом отрезке времени. Поскольку $x_0\in\Omega_R(x^*)$, а функция $x=x(t)$ непрерывна на $[0,\widetilde{T}\,]$, величина $\widetilde{T}$ может быть выбрана столь малой, что $x(t)\in\Omega_R(x^*)$ для всех $t\in[0,\widetilde{T}\,]$.

С использованием (2.1), (2.2) и представления [8, с. 376]

$$\widetilde{F}(x)=\widetilde{F}(x^*)+\widetilde{F}'(x)(x-x^*)+\widetilde{G}(x),\quad \big\|\widetilde{G}(x)\big\|\leqslant\frac{1}{2}\,L\,\|x-x^*\|^2, \tag{2.4}$$

справедливого для всех $x\in\Omega_R(x^*)$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\,\|x-x^*\|^2\Big)&=\big(\widetilde{\Phi}(x)-x,x-x^*\big)=-\Big(\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}(x^*),x-x^*\Big)-\\&-\Big(\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{G}(x),x-x^*\Big)-\|x-x^*\|^2-\\&-\Big(\Big[E-\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big](x^*-\xi),x-x^*\Big)+\\&+\Big(\Big[\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x)-\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big](x^*-\xi),x-x^*\Big).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь E — единичный оператор в H_1, скобками $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение пространства H_1. Оценим отдельные слагаемые в правой части последнего равенства в (2.5). На основании (1.3), (1.11) и (2.4) справедливы оценки

$$\Big\|\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}(x^*)\Big\|\leqslant\Big\|\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\Big\|\big\|\widetilde{F}(x^*)\big\|\leqslant\frac{C_1\delta}{\sqrt{\alpha}}\,, \tag{2.6}$$

$$\Big\|\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{G}(x)\Big\|\leqslant\frac{C_1L\,\|x-x^*\|^2}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{2.7}$$

Из (1.8), (1.12) далее получаем при $C_2 = \max\{C_2(0), C_2(p)\}$

$$\begin{aligned}
&\left\|\Big[E - \Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big](x^*-\xi)\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|\Big[E - \Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big]\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v\right\| + \\
&+ \left\|\Big[E - \Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big]w\right\| \leqslant C_2\big(\|v\|\,\alpha^p + \Delta\big).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Оценку последнего слагаемого в (2.5) проведем, наложив на порождающую функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$ следующие дополнительные условия.

Условие D. Области аналитичности D_α функций $\Theta(\cdot,\alpha)$ таковы, что существует семейство замкнутых спрямляемых контуров $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$, $\alpha \in (0,\alpha_0]$, охватывающих отрезок $[0, N^2]$ и обладающих свойствами

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\ \sup_{\lambda\in\Gamma_\alpha} |\lambda| < \infty, \qquad \sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\ \sup_{\lambda\in\Gamma_\alpha}\ \sup_{\mu\in[0,N^2]} \frac{|\lambda|+\mu}{|\lambda-\mu|} < \infty.$$

Условие E. Для контуров Γ_α из условия D имеет место соотношение

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]} \int\limits_{\Gamma_\alpha} \frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| < \infty.$$

Требуемое в условиях D, E семейство $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0]}$ легко строится для всех наиболее распространенных порождающих функций $\Theta(\lambda,\alpha)$ (см. [3, с. 109–110]).

Ниже через $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ обозначается резольвента линейного непрерывного оператора $A:\ H_1 \to H_1$. Поскольку спектры операторов $\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x)$, $F'^*(x)F'(x)$, $x \in \Omega_R(x^*)$, принадлежат отрезку $[0, N^2]$, на основании представления Рисса–Данфорда [7, с. 455] имеем

$$\begin{aligned}
&\Big[\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x) - \Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big](x^*-\xi) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\alpha}\big(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big)\Big[R\big(\lambda,\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big)\Big](F'^*(x^*)F'(x^*))^p v\,d\lambda + \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\alpha}\big(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big)\Big[R\big(\lambda,\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big)\Big]w\,d\lambda.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Для первого из подынтегральных выражений в (2.9) в силу (1.2), (1.3), как и в [3, с. 104], получаем оценку

$$\left\|\Big[R\big(\lambda,\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big)\Big]\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v\right\| \leqslant \frac{C_4\|v\|}{|\lambda|}\big(L\,\|x-x^*\|+\delta\big) \tag{2.10}$$

для любых $\lambda \in \Gamma_\alpha$ и $\alpha \in (0,\alpha_0]$. Поскольку в силу условия D

$$\Big\|R\big(\lambda,\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x)\big)\Big\| \leqslant \sup_{\mu\in[0,N^2]}\frac{1}{|\lambda-\mu|} \leqslant \frac{C_5}{|\lambda|} \qquad \forall\lambda\in\Gamma_\alpha, \quad \alpha\in(0,\alpha_0],$$

для всех $\lambda \in \Gamma_\alpha$, $\alpha \in (0,\alpha_0]$, имеем

$$\Big\|R\big(\lambda,\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big)\Big\| \leqslant \frac{2C_5}{|\lambda|}\,. \tag{2.11}$$

Объединяя соотношения (2.9) – (2.11), с учетом условия E получаем

$$\begin{aligned}
&\left\|\Big[\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x),\alpha\big)\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x) - \Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big](x^*-\xi)\right\| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\alpha}\frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big|}{|\lambda|}\Big(C_4\|v\|\big(L\,\|x-x^*\|+\delta\big)+2C_5\Delta\Big)|d\lambda| \leqslant C_6\big(L\,\|v\|\,\|x-x^*\| + \|v\|\,\delta + \Delta\big).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Из (2.5) – (2.8), (2.12) следует

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\,\|x-x^*\|^2\Big) \leqslant \Big(\frac{C_1\delta}{\sqrt{\alpha}} + C_2\|v\|\,\alpha^p + C_6\|v\|\,\delta + C_7\Delta\Big)\|x-x^*\| + \\ + C_6L\,\|v\|\,\|x-x^*\|^2 + \frac{C_1L\,\|x-x^*\|^3}{2\sqrt{\alpha}} - \|x-x^*\|^2. \tag{2.13}$$

Применяя неравенство $|ab| \leqslant 2^{-1}\varepsilon a^2 + (2\varepsilon)^{-1}b^2$, $\varepsilon > 0$, последовательно при $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и $\varepsilon = \dfrac{2\alpha}{C_1L}$, получаем

$$\Big(\frac{C_1\delta}{\sqrt{\alpha}} + C_2\|v\|\,\alpha^p + C_6\|v\|\,\delta + C_7\Delta\Big)\|x-x^*\| \leqslant \frac{1}{4}\,\|x-x^*\|^2 + \Big(\frac{C_1\delta}{\sqrt{\alpha}} + C_2\|v\|\,\alpha^p + C_6\|v\|\,\delta + C_7\Delta\Big)^2, \tag{2.14}$$

$$\frac{C_1L\,\|x-x^*\|^3}{2\sqrt{\alpha}} = C_1L\,\|x-x^*\|^2\Big(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,\|x-x^*\|\Big) \leqslant \frac{1}{4}\,\|x-x^*\|^2 + \frac{(C_1L)^2}{4\alpha}\,\|x-x^*\|^4. \tag{2.15}$$

Объединяя оценки (2.13) – (2.15), окончательно находим

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\,\|x-x^*\|^2\Big) \leqslant -\frac{1}{2}\,\|x-x^*\|^2 + \frac{(C_1L)^2}{4\alpha}\,\|x-x^*\|^4 + \Big(\frac{C_1\delta}{\sqrt{\alpha}} + C_2\|v\|\,\alpha^p + C_6\|v\|\,\delta + C_7\Delta\Big)^2 \tag{2.16}$$

для $0 \leqslant t \leqslant \widetilde{T}$. Введем обозначение $u(t) = \dfrac{1}{2}\,\|x(t)-x^*\|^2$. Непосредственно из (2.16) вытекает следующий промежуточный результат.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* A – E *и соотношения* (1.2), (1.3), (1.8). *Тогда при* $t \in [0, \widetilde{T}\,]$ *имеет место оценка*

$$\dot{u}(t) \leqslant -u(t) + \frac{C_8}{\alpha}\,u^2(t) + C_9\Big(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2\alpha^{2p} + \big(\|v\|\,\delta + \Delta\big)^2\Big). \tag{2.17}$$

Обратимся к доказательству основных утверждений работы.

3. Свойство притяжения. В этом разделе проанализируем характер асимптотического поведения решений $x = x(t)$ задачи (1.10), начинающихся при $t = 0$ в точке x_0 из окрестности решения x^*. Прежде всего надлежит установить существование и единственность решения $x(t)$ при всех $t \geqslant 0$. С этой целью рассмотрим мажорирующее по отношению к неравенству (2.17) уравнение

$$\dot{y}(t) = -y(t) + \frac{C_8}{\alpha}\,y^2(t) + C_9\Big(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2\alpha^{2p} + \big(\|v\|\,\delta + \Delta\big)^2\Big), \quad t \geqslant 0 \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$y(0) = u(0). \tag{3.2}$$

Согласно лемме о дифференциальных неравенствах (см., например, [9, с. 32]) выполняется

$$u(t) \leqslant y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \widetilde{T}. \tag{3.3}$$

Непосредственно проверяется, что при выполнении условия

$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} + \frac{\big(\|v\|\,\delta + \Delta\big)^2}{\alpha} + \|v\|^2\alpha^{2p-1} < \frac{1}{4C_8C_9} \tag{3.4}$$

уравнение

$$-y + \frac{C_8}{\alpha}\,y^2 + C_9\Big(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2\alpha^{2p} + \big(\|v\|\,\delta + \Delta\big)^2\Big) = 0$$

имеет корни $0 < y_1 < y_2$, причем

$$y_1 < 2C_9\Big(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2\alpha^{2p} + \big(\|v\|\,\delta + \Delta\big)^2\Big), \tag{3.5}$$

$$y_2 > \frac{\alpha}{2C_8}. \tag{3.6}$$

Несложный анализ уравнения (3.1) показывает, что любое его решение $y = y(t)$, такое, что $y_1 < y(0) < y_2$, монотонно убывает при $t \geqslant 0$ и

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_1. \tag{3.7}$$

С другой стороны, решения, начинающиеся при $t = 0$ в точке $y(0)$, $0 \leqslant y(0) \leqslant y_1$, являются неубывающими и также удовлетворяют (3.7). Тем самым (3.7) имеет место для любого решения $y(t)$ с $0 \leqslant y(0) < y_2$. Из (3.2), (3.3), (3.6) теперь следует, что если выполняются условия

$$\|x_0 - x^*\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{C_8}}\,, \quad \alpha < C_8 R^2\,, \tag{3.8}$$

то в случае $y_1 < u(0) = 1/2\,\|x_0 - x^*\|^2$ имеем

$$\big\|x(t) - x^*\big\| = \sqrt{2u(t)} \leqslant \sqrt{2y(t)} \leqslant \sqrt{2y(0)} = \sqrt{2u(0)} = \|x_0 - x^*\|, \quad 0 \leqslant t \leqslant \widetilde{T}.$$

Если же $0 \leqslant u(0) \leqslant y_1$, то вновь $\big\|x(t) - x^*\big\| \leqslant \sqrt{2y(t)}$, $0 \leqslant t \leqslant \tilde{T}$. Поскольку в этом случае функция $y(t)$ неубывающая, ввиду (3.4) выполняется

$$y(t) \leqslant \lim_{t\to+\infty} y(t) = y_1 < 2C_9\Big(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|v\|^2\alpha^{2p} + \big(\|v\|\delta + \Delta\big)^2\Big) < \frac{\alpha}{2C_8}\,,$$

$$\big\|x(t) - x^*\big\| < \sqrt{\frac{\alpha}{C_8}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tilde{T}.$$

Следовательно, решение задачи Коши (1.10), начинающееся в замкнутом шаре $\overline{\Omega}_{\sqrt{\alpha/C_8}}(x^*) \subset \Omega_R(x^*)$, не покидает этот шар при $0 \leqslant t \leqslant \tilde{T}$. Обозначим через $T^* = T^*(x_0) \geqslant \widetilde{T}$ полное время существования решения задачи (1.10), так что решение $x = x(t)$ определено при $t \in [0, T^*)$ и не допускает однозначного продолжения вперед по времени через $t = T^*$. Будем считать выполненными условия (3.4) и (3.8). Предположим, что $T^* < \infty$, тогда в силу сказанного выше $\sup\Big\{\big\|x(t) - x^*\big\| :\ t \in [0, T^*)\Big\} < R$, и из (1.10) с учетом неравенств (1.2), (1.11), (1.12) следует

$$\sup\Big\{\big\|\dot{x}(t)\big\| :\ t \in [0, T^*)\Big\} < \infty\,. \tag{3.9}$$

Пользуясь последним соотношением, представлением $x(t) = x_0 + \int\limits_0^t \dot{x}(\tau)\,d\tau$, $t \in [0, T^*)$, и критерием Коши, нетрудно показать, что существует предел $\lim\limits_{t\to T^*-0} \big\|x(t) - \widetilde{x}\big\| = 0$, $\widetilde{x} \in H_1$. Поскольку $\widetilde{x} \in \Omega_R(x^*)$, при $z_0 = \widetilde{x}$ и подходящем $\varepsilon_0 > 0$ справедливы соотношения (2.3), из которых следует возможность продолжить решение $x(t)$ вперед по времени за значение $t = T^*$. Последнее противоречит определению величины T^* и, значит, $T^* = \infty$. Тем самым доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* A$-$E *и соотношения* (1.2), (1.3), (1.8), (3.4), (3.8). *Тогда решение задачи Коши* (1.10) *однозначно определено для всех* $t \geqslant 0$.

Проанализируем теперь характер поведения $x(t)$, когда $t \to +\infty$. При выполнении условий теоремы 2 неравенство (3.3) имеет место для всех $t \geqslant 0$. Поэтому

$$\big\|x(t) - x^*\big\| = \sqrt{2u(t)} \leqslant \sqrt{2y(t)}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Поскольку в наших условиях

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_1,$$

из (3.5), (3.10) следует, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \|x(t) - x^*\| < C_3\Big(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \|v\|\,\alpha^p + \|v\|\,\delta + \Delta\Big), \quad C_3 = 2\sqrt{C_9}. \tag{3.11}$$

При выводе использовалось элементарное неравенство $\sqrt{a_1 + \cdots + a_m} \leqslant \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_m}; a_1, \ldots, a_m \geqslant 0$. Кроме того, в силу сказанного выше

$$\|x(t) - x^*\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{C_8}}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Подытожим полученные результаты.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* A – E *и соотношения* (1.2), (1.3), (1.8), (3.4), (3.8). *Тогда для решение задачи Коши* (1.10) *справедливы неравенства* (3.11), (3.12).

Положим
$$r_1(\delta,\Delta,\alpha) = C_3\Big(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \|v\|\,\alpha^p + \|v\|\,\delta + \Delta\Big), \quad r_2(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{C_8}}. \tag{3.13}$$

Теорема 3 утверждает, что при выполнении условий (3.4), (3.8) шар $\Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}(x^*)$ является притягивающим множеством (см. определение в п. 4) для любой точки шара $\overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*)$ в силу системы (1.10). Если при этом вместо (3.4) выполняется несколько более жесткое условие
$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} + \frac{\big(\|v\|\,\delta + \Delta\big)^2}{\alpha} + \|v\|^2\alpha^{2p-1} < \frac{1}{12C_8C_9}, \tag{3.14}$$
то из (3.13) с учетом неравенства $(a_1 + \cdots + a_m)^2 \leqslant m(a_1^2 + \cdots + a_m^2)$ следует строгое включение
$$\overline{\Omega}_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}(x^*) \subset \overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*).$$
Отметим, что в случае фиксированного $\alpha \in (0,1)$, величины p, значительно превышающей $\frac{1}{2}$, и малых по сравнению с α погрешностей δ, Δ условие (3.14) выполняется, а величина $r_1(\delta,\Delta,\alpha)$ намного меньше $r_2(\alpha)$.

Из (3.11) следует, что для любой точки $x_0 \in \overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}$ найдется такой момент $\bar{t}(x_0)$, что $x(t) \in \Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}$ при всех $t \geqslant \bar{t}(x_0)$. Сказанное означает, что точка $x(t)$, $t \to +\infty$ может рассматриваться в качестве приближения к x^*, адекватного имеющимся погрешностям δ, Δ.

С другой стороны, представляет интерес исследование поведения траектории $x(t)$ после попадания в шар $\Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}$ (при $t \to +\infty$) в зависимости от выбора начальной точки x_0. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

4. Существование минимального аттрактора. В этом параграфе предполагаются выполненными условия теоремы 3 с заменой (3.4) неравенством (3.14). Определим метрическое пространство $X = \overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}$ с метрикой нормы H_1 и обозначим через $V_t: X \to X$, $t \geqslant 0$ (нелинейную) полугруппу, связанную с задачей (1.10): $V_t(x_0) = x(t)$, где $x = x(t)$ есть решение (1.10). Нетрудно видеть, что полугруппа V_t непрерывна, т.е. отображение $(t,y) \to V_t(y)$ непрерывно по $(t,y) \in \{t: t \geqslant 0\} \times X$. Следуя [10], говорим, что множество $B_0 \subset X$ притягивает множество $B \subset X$, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_1(\varepsilon, B)$, что множество $V_t(B) \equiv \{z \in X: \ z = V_t(y),\ y \in B\}$ при всех $t \geqslant t_1(\varepsilon, B)$ лежит в $\cup_{y \in B_0}\Omega_\varepsilon(y)$, т.е. в ε–окрестности B_0. Минимальным аттрактором M полугруппы V_t на пространстве X называется наименьшее по включению непустое замкнутое множество, которое притягивает любое $B \subset X$. Произвольная полугруппа V_t называется точечно диссипативной, если существует множество B_0, притягивающее любую точку X. Из теоремы 3 следует, что полугруппа, порожденная задачей (1.10), является точечно диссипативной, причем в качестве множества B_0 в нашем случае может быть взят шар $\Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}(x^*)$.

Основная цель последующих рассуждений заключается в обосновании наличия у системы (1.10) и отвечающей ей полугруппы V_t минимального аттрактора в смысле вышеприведенного определения.

Ниже будет использоваться известный критерий наличия минимального аттрактора у полугрупп гиперболического типа [10; теорема 3.1, предложение 3.6]. Приведем соответствующий результат в виде, адаптированном к интересующему нас случаю непрерывной точечно диссипативной полугруппы V_t в метрическом пространстве X, совпадающем с конечным шаром.

Лемма 1. *Пусть полугруппа* V_t *представима в виде* $V_t = W_t + U_t$, $t \geqslant 0$, *где семейство операторов* W_t *обладает свойством*
$$\sup_{y \in X}\big\|W_t(y)\big\| \leqslant \nu(t), \quad t \geqslant 0; \quad \lim_{t \to +\infty}\nu(t) = 0, \tag{4.1}$$
а операторы $U_t: X \to H_1$, $t \geqslant 0$, *отображают подмножества* X *в компактные множества. Тогда полугруппа* V_t *имеет минимальный аттрактор* M, *который является связным, компактным и инвариантным относительно* V_t *подмножеством* X [10].

Инвариантность аттрактора M означает, что $V_t(M) = M\ \forall t \geqslant 0$. Убедимся, что при наложении на $\widetilde{F}(x)$ некоторых дополнительных ограничений определяемая (1.10) полугруппа V_t удовлетворяет условиям леммы 1. Следуя [11], напомним, что оператор $G: H_1 \to H_2$ называется равномерно дифференцируемым по Фреше на шаре $\Omega_r(\bar{x})$, если имеет место представление
$$G(x+h) - G(x) = G'(x)h + \omega(x,h), \quad \lim_{h \to 0}\frac{\omega(x,h)}{\|h\|} = 0,$$

где $G'(x) \in L(H_1, H_2)$, и по каждому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|h\| < \delta(\varepsilon)$ выполняется $\|\omega(x,h)\| < \varepsilon\|h\| \quad \forall x,\, x+h \in \Omega_r(\bar{x})$. Здесь и далее $L(H_1, H_2)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из H_1 в H_2. Напомним также, что оператор $G:\ H_1 \to H_2$ называется усиленно непрерывным на выпуклом замкнутом множестве $Y \subset H_1$, если всякую последовательность $\{x_n\} \subset Y$, слабо сходящуюся к x в H_1, он преобразует в последовательность $\{G(x_n)\}$, сильно сходящуюся к $G(x)$ в H_2. В силу липшицевости $\widetilde{F}'(x)$ оператор $\widetilde{F}(x)$ равномерно дифференцируем на $\Omega_R(x^*)$.

Дополнительно к сделанным выше допущениям будем предполагать выполненным следующее

Условие F. Оператор $\widetilde{F}(x)$ усиленно непрерывен на $\overline{\Omega}_\rho(x^*)$, $\rho > r_2(\alpha)$.

Заметим, что при выполнении условия F производная $\widetilde{F}'(x)$ как элемент $L(H_1, H_2)$ является линейным вполне непрерывным оператором при каждом $x \in \Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ [11, с. 93]. Кроме того, эта производная усиленно непрерывна как отображение из $\overline{\Omega}_{r_2(\alpha)}(x^*)$ в $L(H_1, H_2)$ [11, с. 91].

Лемма 2. *Предположим, что выполняется условие* F. *Тогда определенный в* (2.1) *оператор* $\widetilde{\Phi}(x)$ *является вполне непрерывным на* $\Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$.

Доказательство. В силу непрерывности $\widetilde{\Phi}(x)$ (см. (2.3)) достаточно установить, что всякая последовательность $\{x_n\} \subset \Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ имеет подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, вдоль которой $\{\widetilde{\Phi}(x_{n_k})\}$ сходится в норме H_2. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — слабо сходящаяся к $\widetilde{x}$ подпоследовательность $\{x_n\}$. С учетом условия F и предшествующих лемме замечаний $\{\widetilde{F}(x_{n_k})\}$ сильно в H_2 сходится к некоторому элементу $\widetilde{f} \in H_2$, а последовательности вполне непрерывных операторов $\{\widetilde{F}'(x_{n_k})\}$, $\{\widetilde{F}'^*(x_{n_k})\}$ сходятся в нормах $L(H_1, H_2)$, $L(H_2, H_1)$ к некоторым вполне непрерывным операторам $\widetilde{A}$, $\widetilde{A}^*$. Отсюда следует, что последовательность $\Big\{\widetilde{F}'^*(x_{n_k})\big(\widetilde{F}(x_{n_k}) - \widetilde{F}'(x_{n_k})(x_{n_k} - \xi)\big)\Big\}$ сходится в H_1 к элементу $\widetilde{A}^*\big(\widetilde{f} - \widetilde{A}(\widetilde{x} - \xi)\big)$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что последовательность операторов $\Big\{\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x_{n_k})\widetilde{F}'(x_{n_k}), \alpha\big)\Big\}$ сходится в $L(H_1, H_1)$ к $\Theta(\widetilde{A}^*\widetilde{A}, \alpha)$. Это следует из представления

$$\Theta\big(\widetilde{F}'^*(x_{n_k})\widetilde{F}'(x_{n_k}), \alpha\big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha} \Theta(\lambda, \alpha) R\big(\lambda, \widetilde{F}'^*(x_{n_k})\widetilde{F}'(x_{n_k})\big)\, d\lambda$$

с учетом равномерной по $\lambda \in \Gamma_\alpha$ сходимости $R\big(\lambda, \widetilde{F}'^*(x_{n_k})\widetilde{F}'(x_{n_k})\big) \to R(\lambda, \widetilde{A}^*\widetilde{A})$, $k \to \infty$ в $L(H_1, H_1)$. Лемма доказана.

Обратимся теперь к исследованию полугруппы V_t, порождаемой задачей (1.10) или, что то же, задачей (2.2), при выполнении условия F. Рассмотрим полугруппу линейных операторов W_t, $W_t(x) = \exp(-t)x$, $t \geqslant 0$, порождаемую уравнением $\dot{x} = -x$. В данном случае условие (4.1) выполняется, причем в качестве $\nu(t)$ можно взять $\nu(t) = \big(\|x^*\| + r_2(\alpha)\big)\exp(-t)$. Установленная в лемме 2 полная непрерывность оператора $\widetilde{\Phi}(x)$ с учетом сказанного в [12, с. 298–299] означает, что оператор $U_t = V_t - W_t$ является вполне непрерывным при каждом $t \geqslant 0$. Непосредственным следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* A–F *и соотношения* (1.2), (1.3), (1.8), (3.8), (3.14). *Тогда динамическая система* (1.10) *имеет на* $\Omega_{r_2(\alpha)}(x^*)$ *минимальный аттрактор* $M \subset \Omega_{r_1(\delta,\Delta,\alpha)}(x^*)$*, который является связным, компактным и инвариантным множеством.*

Аттрактор, существование которого гарантируется теоремой 4, можно рассматривать в качестве аппроксимирующего x^* множества, конструкция которого в отличие от индивидуальной траектории не зависит от выбора начальной точки x_0.

Пример 1. Всем вышеприведенным условиям на $\Theta(\lambda, \alpha)$ удовлетворяет функция

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \lambda^{-1}\big[1 - (1 - \mu_0\lambda)^{1/\alpha}\big], \quad \lambda \neq 0,$$

доопределенная по непрерывности значением $\alpha^{-1}\mu_0$ при $\lambda = 0$, если значение $\alpha^{-1} \in \{1, 2, \dots\}$ и величина $0 < \mu_0 < N^{-2}$. При этом в условии C можно положить $p_0 = \infty$. Оператор $\widetilde{\Phi}(x)$ в данном случае имеет вид (см. [3, с. 110])

$$\widetilde{\Phi}(x) = x^{(n)},$$

где $n = \alpha^{-1}$, $x^{(0)} = \xi$ и $x^{(k+1)} = \big(E - \mu_0\widetilde{F}'^*(x)\widetilde{F}'(x)\big)x^{(k)} - \widetilde{F}'^*(x)\big(\widetilde{F}'(x)x - \widetilde{F}(x)\big)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

В заключение приведем пример оператора $\widetilde{F}(x)$, удовлетворяющего наложенным выше ограничениям.

Пример 2. Пусть D — конечномерная область с регулярной границей, функции $\widetilde{K} \in C(\overline{D} \times \overline{D})$,

$\widetilde{g} \in L_2(D)$. Определим оператор $\widetilde{F}: H^1(D) \to L_2(D)$,

$$\big[\widetilde{F}(x)\big](t) = \int\limits_D \widetilde{K}(t,s)x^2(s)\,ds - \widetilde{g}(t), \quad t \in D.$$

Усиленная непрерывность $\widetilde{F}(x)$ является следствием компактности вложения $H^1(D) \subset L_2(D)$ и условие Липшица (1.2) проверяется непосредственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 03–01–00352).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
2. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
3. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал УРСС, 2002.
4. *Гавурин М.К.* Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итерационных методов // Изв. вузов. Матем. 1958. № 5. 18–31.
5. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* Итерационные методы ньютоновского типа с проектированием для решения нелинейных некорректных операторных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. **5**, № 2. 101–111.
6. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
7. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1961.
10. *Ладыженская О.А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнения Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. **42**, № 6. 25–60.
11. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
12. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию
13.06.2003