УДК 519.622 doi 10.26089/NumMet.v18r324

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯТОРА ДЛЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. А. Грачев[1], **Е. А. Михайлов**[2]

Статья посвящена двухточечным моментам решений, возникающих в простых лагранжевых моделях для уравнения индукции в случае конечного корреляционного времени случайной среды. Рассматривается вопрос о связи коммутационных свойств соответствующих алгебраических операторов с минимальным объемом выборки независимых случайных реализаций, который необходим в численном эксперименте для моделирования двухточечного коррелятора решения. Показано, что, как и для одноточечных моментов, численное исследование двухточечного коррелятора в случае коммутирующих операторов (случайные числа) требует существенно меньших объемов выборки, чем в случае, когда они не коммутируют (случайные матрицы).

Ключевые слова: уравнения со случайными коэффициентами, перемежаемость, статистический момент.

1. Введение. При исследовании эволюционных уравнений со случайными коэффициентами обнаруживается ряд проблем, принципиально ограничивающих возможности аналитической теории. В первую очередь это связано с тем, что аналитические результаты, как правило, носят асимптотический характер и формулируются в виде некоторых предельных утверждений, из которых неясно, начиная с каких значений асимптотического параметра они справедливы. Одним из характерных параметров такого рода является минимальный объем выборки независимых случайных реализаций решения, требуемый для исследования его среднего и высших статистических моментов.

Проблема объема выборки тесно связана со свойствами перемежаемости, обусловленной появлением очень редких, но при этом аномально быстро растущих реализаций, которые вносят определяющий вклад в формирование среднего решения и его высших статистических моментов [1, 2]. Редкость подобных реализаций приводит к тому, что в численном эксперименте для адекватного воспроизведения свойств статистических моментов приходится использовать чрезвычайно большие объемы выборки, причем это обстоятельство имеет место даже для достаточно простых линейных уравнений. Показательным примером подобного рода служит уравнение Якоби

$$y'' + A(x)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{1}$$

со случайным коэффициентом $A(x) = A(x, \omega)$, предложенное Я.Б. Зельдовичем [3] для описания распространения света во Вселенной с неоднородностями. Оказалось, что для обнаружения предсказанных теорией свойств статистических моментов его решения требуется объем выборки порядка полумиллиона независимых реализаций [4–6]. На сегодняшний день такое колоссальное число случайных реализаций явно недостижимо для прямого численного моделирования соответствующих трехмерных аналогов (в частности, это касается уравнения индукции в задаче турбулентного динамо, см., например, [6]).

Еще одним примером уравнения, воспроизводящего эффекты перемежаемости, служит простейшее уравнение первого порядка

$$y' = a(x)y, \quad y(0) = 1 \tag{2}$$

со случайным коэффициентом $a(x) = a(x, \omega)$. В [7] было проведено численное моделирование уравнения (2) в предположении, что коэффициент $a(x)$ является случайным процессом с обновлением (см. ниже), после чего результаты сравнивались с некоторыми аналитическими предсказаниями о свойствах его решения из [1]. В частности, было установлено, что для воспроизведения прогрессивного роста нормированных

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; науч. сотр., e-mail: dengrac@mail.ru

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; ассистент, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

статистических моментов $\left\langle y^p \right\rangle^{1/p}$ в численном эксперименте требуется усреднять порядка 10^3 независимых случайных реализаций. Этот объем тоже очень велик, хотя и существенно меньше аналогичного объема, требуемого при моделировании моментов решения уравнения Якоби.

Уравнения (1) и (2) представляют интерес по нескольким причинам. С одной стороны, они являются простыми модельными примерами, позволяющими подробно изучить многие общие свойства, которые присущи решениям более сложных эволюционных уравнений и которые мало зависят от конкретного вида самого уравнения (в частности, это касается явления перемежаемости [2]). С другой стороны, в рамках лагранжева подхода решения уравнений (1) и (2) представляют собой два различных типа решений линейных эволюционных уравнений со случайными коэффициентами, связанных с коммутационными свойствами некоторых алгебраических операторов. Поясним, что имеется в виду.

Пусть мы рассматриваем некоторое уравнение вида

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\widehat{u} = \widehat{L}(t, \boldsymbol{x})\widehat{u} + \nu\triangle\widehat{u}. \tag{3}$$

Здесь $\widehat{u}$ — скалярное или векторное (не обязательно трехмерное) поле (для того, чтобы подчеркнуть эту степень свободы, мы снабдили переменную “шляпкой”). Оператор $\widehat{L}$ является алгебраическим, т.е. в скалярном случае сводится к умножению на число, а в векторном — к умножению на матрицу. Мы считаем, что он содержит случайный параметр. Переносной член $(\boldsymbol{v}\nabla)\widehat{u}$ тоже может содержать случайную скорость. Мы интересуемся решением задачи Коши в безграничном пространстве, т.е. эволюцией первоначально заданного распределения $\widehat{u}_0$.

Коэффициент ν при лапласиане мы считаем малым. В силу малости этого коэффициента при вторых производных представляется полезным рассмотреть в качестве начального приближения для интересующей нас задачи так называемое лагранжево решение. Для этого нужно перейти в систему отсчета, движущуюся вместе со средой, и отбросить член со вторыми производными. В результате получается простое уравнение

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = \widehat{L}\widehat{u}, \tag{4}$$

в котором значения пространственной переменной вычисляются вдоль траектории частицы среды. Операторное уравнение (4) легко решается. Если корреляционное время среды δ конечно, то это решение имеет вид $\widehat{u} = \widehat{A}_n\widehat{A}_{n-1}\ldots\widehat{A}_1\widehat{u}_0$, где $\widehat{A}_i = \exp\Big(\widehat{L}(t_i, x_i)\delta\Big)$, $i = 1, \ldots, n$. Другими словами, лагранжево решение представимо как результат действия на начальное условие произведения независимых операторов или скалярных множителей.

Могут представиться две возможности: либо операторы $\widehat{A}_i$ являются некоммутирующими (в этом случае типичная реализация лагранжева решения экспоненциально растет, причем скорость этого роста оказывается неслучайной константой), либо все они коммутируют друг с другом, и тогда экспоненциальный рост не наблюдается. В этом контексте уравнение Якоби представляет интерес тем, что моделирует свойства лагранжева решения для (3) в случае некоммутирующих операторов, поскольку его решение формируется как произведение независимых случайных матриц [8, 9]. Простейшее уравнение (2) моделирует свойства лагранжева решения тогда, когда все $\widehat{A}_i$ коммутируют друг с другом [7].

В нашей работе проведено численное моделирование уравнений (1) и (2). Опираясь на его результаты, мы обнаружим связь между минимальным объемом выборки, необходимым для построения двухточечных корреляторов решений, и коммутационными свойствами $\widehat{A}_i$.

В заключение отметим, что лагранжево решение, являясь приближенным в силу отбрасывания членов со вторыми производными, тем не менее позволяет построить истинное решение. Оно получается путем усреднения лагранжева решения по пучку случайных винеровских траекторий [1, 10].

2. Случайный процесс с обновлением. Очевидно, что как численное, так и аналитическое изучение уравнений (1) и (2) требует конструктивного описания случайных процессов $A(x)$ и $a(x)$. Мы выбираем это описание, ориентируясь на удобные для этих целей модели случайных процессов с обновлением.

Пусть полупрямая $x \geqslant 0$ разбита на равные отрезки длины δ (корреляционная длина, которая используется в качестве единицы длины, сам же отрезок принято называть интервалом обновления). Далее, пусть процесс $A(x)$ (соответственно, $a(x)$) теряет память точно в точках $x_n = n \cdot \delta$, $n = 1, 2, \ldots$. Это означает, что величины $A_n(x)$ на полусегментах $[0; \delta), \ldots, \big[n\delta; (n+1)\delta\big)$ предполагаются статистически независимыми и имеющими одинаковые статистические характеристики (а именно: среднее значение, дисперсию, корреляционную функцию и т.д.). Кроме того, предполагается статистическая независимость точек обновления от всех процессов $A_n(x)$. Это и есть модель процесса с обновлением. Из-за фиксированных точек обновления такой случайный процесс статистически неоднороден (в масштабах, сопоставимых с δ), и корреляционная функция $\big\langle A(x_1), A(x_2)\big\rangle$ зависит от обеих точек x_1 и x_2.

В аналитической теории при выводе моментных уравнений общепринятым является подход, когда длину интервала обновления считают бесконечно малой (так называемое короткокоррелированное приближение, см., например, [2, 11]). Это обусловлено в первую очередь желанием иметь дело с дифференциальными уравнениями, а не с интегро-разностными, которые неизбежно возникают при учете эффектов памяти [12, 13]. В недавних работах показано, что в рамках данного подхода удается решить проблему высших статистических моментов не только для уравнения Якоби [14, 15], но и для более широких классов эволюционных уравнений со случайными коэффициентами [16]. Воспроизведем здесь соответствующие рассуждения для простейшего уравнения (2) и получим связь между моментом 2-го порядка $\big\langle y^2(x)\big\rangle$ и двухточечным коррелятором решения $\big\langle y(x)y(x+\tau)\big\rangle$.

Пусть x — некоторая точка обновления. Рассмотрим точку обновления $x+\tau$, расположенную через n интервалов обновления от x (т.е. $\tau = n\delta$). Запишем связь между значениями решения (2) в этих точках:

$$y(x+\tau) = y(x)\exp\left(\delta\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

Домножая левую и правую части последнего выражения на $y(x)$ и проводя затем усреднение, получим

$$\big\langle y(x+\tau)y(x)\big\rangle = \big\langle y^2(x)\big\rangle\left\langle \exp\left(\delta\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right\rangle.$$

Здесь мы учли, что сомножители в правой части статистически независимы, поэтому их можно расщепить. Далее, требование короткокоррелированности процесса $a(x)$ означает, что мы отвлекаемся от деталей поведения решения на масштабах, сопоставимых с величиной δ, что формально и выражается в предельном переходе при $\delta\to 0$. Для того чтобы вклад случайных коэффициентов в эволюцию решения при таком предельном переходе не обратился в нуль, выполняется перенормировка, т.е. считается, что величина $\big\langle a^2\delta\big\rangle$ имеет конечный предел $\mathcal{A}$ при $\delta\to 0$. По сути это означает, что флуктуации остаются значительными при $\delta\to 0$, а саму величину $\mathcal{A}$ при этом можно понимать как некоторое эффективное значение [11]. Тем самым, случайные величины $\xi_i = \sqrt{\delta}\,a_i$ имеют при $\delta\to 0$ нулевое среднее и единичную дисперсию. Переписывая последнее выражение в виде

$$\big\langle y(x+\tau)y(x)\big\rangle = \big\langle y^2(x)\big\rangle\left\langle \exp\left(\sqrt{\delta n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\delta}\,a_i\right)\right\rangle = \big\langle y^2(x)\big\rangle\left\langle \exp\left(\sqrt{\tau}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right\rangle$$

и переходя к пределу при $\delta\to 0$ (или, что то же самое, при $n\to+\infty$ в силу условия $\tau=\mathrm{const}$), получаем

$$\big\langle y(x+\tau)y(x)\big\rangle = \big\langle y^2(x)\big\rangle\exp\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{5}$$

Здесь мы воспользовались центральной предельной теоремой, а также известной формулой для среднего значения $<\eta>$ функции $\eta = f(\xi)$ от случайной величины ξ, имеющей плотность распределения $p_\xi(x)$:

$$<\eta>=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_\xi(x)\,dx.$$

3. Численный эксперимент. При численном моделировании решений уравнения Якоби и уравнения (2) ради определенности считалось, что случайные процессы $A(x)$ и $a(x)$ кусочно-постоянны на интервалах обновления, т.е. A_n и a_n являются равномерно распределенными случайными величинами на отрезке $[-1;1]$, см. [5, 7]. При этом двухточечные корреляторы решений этих уравнений вычислялись в точках обновления $x_n = n\delta$, $n=1,2,3,\dots$.

В простейшем случае решение уравнений возможно при помощи разностных методов, например с помощью метода Рунге–Кутты. Тем не менее, они обладают рядом недостатков: в частности, как и любой разностный метод, они имеют конечную погрешность аппроксимации. В наших условиях уравнения допускают прямое решение на тех интервалах, где значение случайного коэффициента $A(x)$ и $a(x)$ является постоянным.

Так, для уравнения (1) решение при положительных A может быть выражено в форме [17]

$$y(x+\Delta x) = y(x)\cos\left(\Delta t\sqrt{A}\right) + \frac{1}{\sqrt{A}}\,y'(x)\sin\left(\Delta t\sqrt{A}\right),$$
$$y'(x+\Delta x) = -y(x)\sqrt{A}\,\sin\left(\Delta t\sqrt{A}\right) + y'(x)\cos\left(\Delta t\sqrt{A}\right),$$

а при отрицательных A это решение принимает вид

$$y(x+\Delta x) = y(x)\,\mathrm{ch}\left(\Delta t\sqrt{-A}\right) + \frac{1}{\sqrt{-A}}\,y'(x)\,\mathrm{sh}\left(\Delta t\sqrt{-A}\right);$$
$$y'(x+\Delta x) = y(x)\sqrt{-A}\,\mathrm{sh}\left(\Delta t\sqrt{-A}\right) + y'(x)\,\mathrm{ch}\left(\Delta t\sqrt{-A}\right).$$

Решение уравнения (2) выражается еще более просто: $y(x+\Delta x) = y(x)\exp\big(a(x)\Delta x\big)$.

Описанный метод позволяет, с одной стороны, минимизировать неточность решения, связанную с погрешностью численной схемы (основные ошибки будут связаны с процедурой округления), с другой — существенно сократить время расчета, которое для задач, связанных с усреднением по большому числу решений, будет довольно существенным.

В качестве начальных условий для уравнения (1) мы брали $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Для уравнения (2) бралось начальное условие $y(0) = 1$.

Нами использовался стандартный генератор псевдослучайных чисел, встроенный в среду программирования Borland C++ Builder (версия 6.0). Он генерирует числа с периодичностью порядка 2^{32}, что вполне достаточно для наших целей.

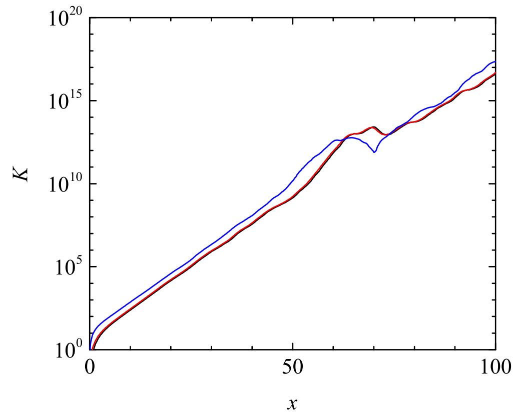

Рис. 1. Корреляционная функция для уравнения Якоби. Черная кривая показывает случай $\tau = 0.1$, красная — случай $\tau = 1.0$, синяя — случай $\tau = 10$

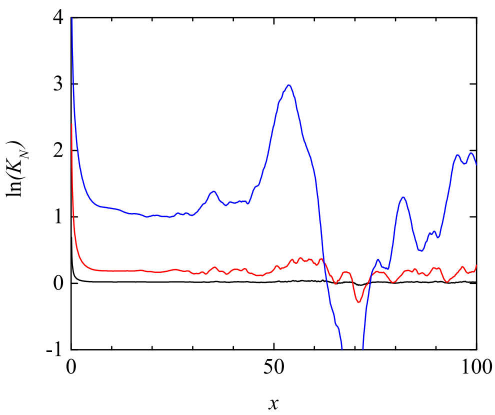

Рис. 2. Нормированная корреляционная функция для уравнения Якоби. Черная кривая показывает случай $\tau = 0.1$, красная — случай $\tau = 1.0$, синяя — случай $\tau = 10$

4. Полученные результаты. Нами были вычислены корреляционные функции для обоих уравнений. Наибольший интерес представляет корреляционная функция при фиксированном τ :

$$K(x,\tau) = \big\langle y(x)y(x+\tau)\big\rangle.$$

Графики корреляционных функций для выборки размером 10^5 в случае задачи (1) при различных значениях τ приведены на рис. 1. Во всех случаях это — экспоненциально растущие функции, поэтому имеет смысл ввести нормированную функцию K_N :

$$K_N = \frac{\big\langle y(x)y(x+\tau)\big\rangle}{\big\langle y^2(x)\big\rangle}.$$

Графики для нее приведены на рис. 2. Нами была проверена устойчивость результатов при увеличении выборки. Так, решения для выборок размером 10^5, 2×10^5 и 5×10^5 приведены на рис. 3.

Корреляционная функция и ее нормированный вариант для уравнения первого порядка (2) показаны на рис. 4 и 5. Мы проверили, что для воспроизведения предсказанного теорией экспоненциального роста двухточечного коррелятора решения уравнения (2) требуется существенно меньший объем выборки, чем для уравнения (1), а именно, достаточно взять порядка 10^3 независимых реализаций решения. Как и для уравнения Якоби, результаты тоже демонстрируют устойчивость при изменении размера выборки (рис. 6).

Заметим, что как для уравнения (1), так и для уравнения (2) величина $\ln K_n$ на начальном этапе близка к константе, которая растет с ростом τ. Как следует из формулы связи (5), для уравнения (2) имеем $\ln K_n = \tau/2$, однако в численном эксперименте коэффициент пропорциональности оказывается явно меньше, чем 1/2 (рис. 5). Это расхождение объясняется тем, что при выводе формулы (5) использовалось приближение коротких корреляций, когда $\delta \to 0$, тогда как в численном эксперименте длина интервала обновления конечна. Аналогичные расхождения наблюдаются и для одноточечных моментов [5].

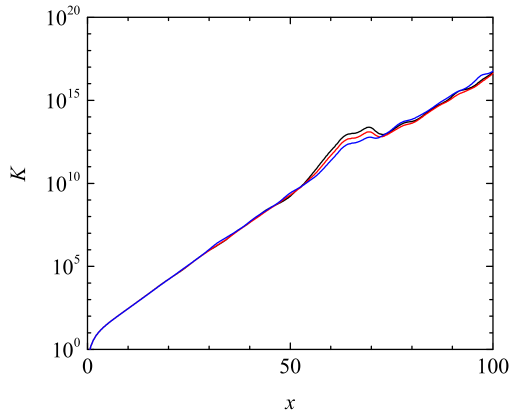

Рис. 3. Корреляционная функция для уравнения Якоби для выборок разного размера. Черная кривая показывает выборку размером 10^5, красная — выборку размером 2×10^5, синяя — выборку размером 5×10^5

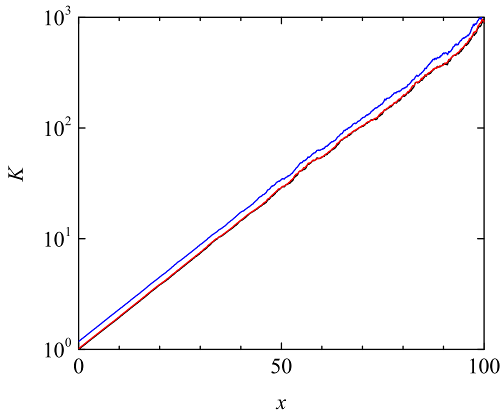

Рис. 4. Корреляционная функция для уравнения первого порядка. Черная кривая показывает случай $\tau = 0.1$, красная — случай $\tau = 1.0$, синяя — случай $\tau = 10$

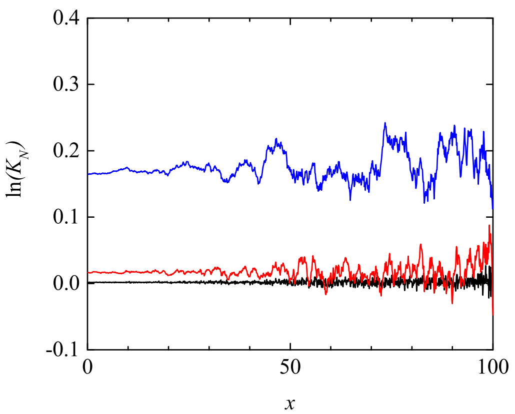

Рис. 5. Нормированная корреляционная функция для уравнения первого порядка. Черная кривая показывает случай $\tau = 0.1$, красная — случай $\tau = 1.0$, синяя — случай $\tau = 10$.

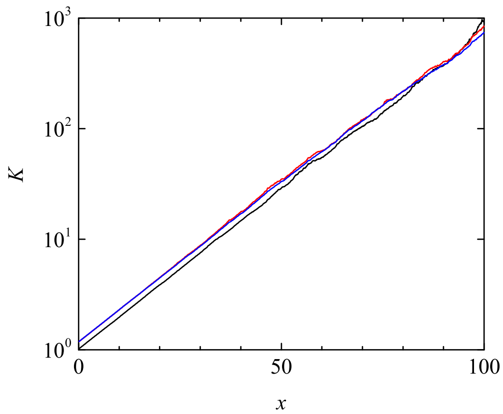

Рис. 6. Корреляционная функция для уравнения первого порядка для выборок разного размера Черная кривая показывает выборку размером 10^3, красная — выборку размером 2×10^3, синяя — выборку размером 5×10^3

Обратим также внимание на то, что с увеличением объема выборки независимых реализаций длина участка экспоненциального роста двухточечного коррелятора $\langle y(x)y(x+\tau)\rangle$ растет. Это обстоятельство имеет место для решений обоих уравнений, и в этом смысле поведение двухточечных корреляторов полностью аналогично поведению одноточечных статистических моментов [5, 6].

5. Выводы. Исследована корреляционная функция для уравнения Якоби со случайными коэффициентами и для аналогичного по смыслу уравнения первого порядка. Показано, что данные функции демонстрируют при фиксированной разнице аргументов экспоненциальный рост. В связи с этим вычислены нормированные корреляционные функции, которые близки к константе на малых промежутках изменения аргумента.

Полученные нами результаты могут быть использованы при исследовании задачи о росте галактического магнитного поля [18, 19] в случае неоднородной межзвездной среды. В этом случае эволюция магнитного поля тоже описывается уравнениями динамо со случайными коэффициентами.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ в рамках проекта № 16–32–00056 мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // Успехи физических наук. 1987. **152**, № 1. 3–32.
2. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* The Almighty chance. Singapore: World Scientific, 1990.
3. *Зельдович Я.Б.* Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Астрон. ж. 1964. **41**, № 1. 19–24.
4. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезической со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**. 291–296.
5. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрон. ж. 2005. **82**, № 7. 584–589.
6. *Artyushkova M.E., Sokoloff D.D.* Modelling small-scale dynamo by the Jacobi equation // Magnetohydrodynamics. 2006. **42**, № 1. 3–20.
7. *Грачев Д.А., Соколов Д.Д.* Численное моделирование роста мультипликативных случайных величин // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**. 1–5.
8. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Матем. заметки. 2003. **74**, № 3. 416–424.
9. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Многообразие переменной кривизны и асимптотические результаты о произведении случайных матриц // Тр. Международной конференции “Математическая физика, математическое моделирование и приближенные методы”. Обнинск: Институт атомной энергетики, 2000. 37–38.
10. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Кинематическое динамо в случайном потоке // Успехи физических наук. 1985. **145**, № 4. 593–628.
11. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Уравнения динамо в случайном короткокоррелированном поле скорости // Магнитная гидродинамика. 1983. **4**. 67–72.
12. *Kleeorin N., Rogachevskii I., Sokoloff D.* Magnetic fluctuations with zero mean field in a random fluid with a finite correlation time and a small magnetic diffusion // Phys. Rev. E. 2002. **65**, N 3. 036303–036307.
13. *Грачев Д.А.* Влияние эффектов памяти в задаче о распространении света во Вселенной с неоднородностями // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2008. № 1. 16–19.
14. *Грачев Д.А., Соколов Д.Д.* Высшие статистические моменты решения уравнения Якоби со случайной кривизной // Математическое моделирование и краевые задачи. Часть 3. Самара: Гос. техн. ун-т, 2008. 83–86.
15. *Grachev D.A.* Averaging of Jacobi fields along geodesics on manifolds of random curvature // Journal of Mathematical Sciences. 2009. **160**, N 1. 128–138.
16. *Грачев Д.А.* Тензорный подход к проблеме усреднения дифференциальных уравнений с δ-коррелированными случайными коэффициентами // Матем. заметки. 2010. **87**, № 3. 359–368.
17. *Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Фундаментальная матрица для уравнения Якоби со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 261–268.
18. *Михайлов Е.А., Модяев И.И.* Уравнения галактического динамо со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 351–358.
19. *Михайлов Е.А., Пушкарев В.В.* Флуктуации коэффициента турбулентной диффузии в уравнениях галактического динамо // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 447–454.

Поступила в редакцию
23.06.2017

Numerical Modeling of a Two-Point Correlator for the Lagrange Solutions of Some Evolution Equations

D. A. Grachev [1] and E. A. Mikhailov [2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Scientist, e-mail: dengrac@mail.ru*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Assistant, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru*

Received June 23, 2017

Abstract: This paper is devoted to the two-point moments of the solutions arising in simple Lagrange models for the induction equations in the case of finite correlation time of a random medium. We consider the question on the connection between the commutative properties of the corresponding algebraic operators and the minimal sample size of independent random realizations necessary in numerical experiments for modeling the two-point correlator of the solution. It is shown that, as for the one-point moments, the numerical study of the two-point correlator in the case of commutating operators (random numbers) requires a much smaller sample size than in the case when they do not commute (random matrices).

Keywords: equations with random coefficients, intermittency, statistical moment.

References

1. Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, "Intermittency in Random Media," Usp. Fiz. Nauk **152** (1), 3–32 (1987) [Sov. Phys. Usp. **30** (5), 353–369 (1987)].

2. Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *The Almighty Chance* (World Scientific, Singapore, 1990).

3. Ya. B. Zel'dovich, "Observations in a Universe Homogeneous in the Mean," Astron. Zh. **41** (1), 19–24 (1964) [Sov. Astron. **8** (1), 13–16 (1964)].

4. M. E. Artyushkova and D. D. Sokoloff, "Numerical Modeling of Conjugated Point Distribution along a Geodesic with Random Curvature," Vychisl. Metody Programm. **5**, 291–296 (2004).

5. M. E. Artyushkova and D. D. Sokoloff, "Numerical Modeling of the Solutions of the Jacobi Equation on a Geodesic with Random Curvature," Astron. Zh. **82** (7), 584–589 (2005) [Astron. Rep. **49** (7), 520–525 (2005)].

6. M. E. Artyushkova and D. D. Sokoloff, "Modelling Small-Scale Dynamo by the Jacobi Equation," Magnetohydrodynamics **42** (1), 3–20 (2006).

7. D. A. Grachev and D. D. Sokoloff, "Numerical Modeling of Growth of Multiplicative Random Quantities," Vychisl. Metody Programm. **8**, 1–5 (2007).

8. V. G. Lamburt, D. D. Sokolov, and V. N. Tutubalin, "Jacobi Fields along a Geodesic with Random Curvature," Mat. Zametki **74** (3), 416–424 (2003) [Math. Notes **74** (3), 393–400 (2003)].

9. V. G. Lamburt, D. D. Sokolov, and V. N. Tutubalin, "Variety of the Variable Curvature and Asymptotic Results on the Production of Random Matrices," in *Proc. Int. Conf. on Mathematical Physics, Mathematical Simulation, and Approximate Methods, Obninsk, Russia, May 15–19, 2000* (Nuclear Power Engineering Inst., Obninsk, 2000), pp. 37–38.

10. S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, "Kinematic Dynamo in Random Flow," Usp. Fiz. Nauk **145** (4), 593–628 (1985) [Sov. Phys. Usp. **28** (4), 307–327 (1985)].

11. S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, "Equations of Dynamo in Random Velocity Field with Short Correlation Time," Magn. Gidrodyn. **4**, 67–72 (1983) [Magnetohydrodynamics **19**, 402–407 (1983)].

12. N. Kleeorin, I. Rogachevskii, and D. Sokoloff, "Magnetic Fluctuations with Zero Mean Field in a Random Fluid with a Finite Correlation Time and a Small Magnetic Diffusion," Phys. Rev. E **65** (3), 036303–036307 (2002).

13. D. A. Grachev, "Memory Effects in the Problem of Light Propagation in a Universe with Inhomogeneities," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 3: Fiz., No. 1, 16–19 (2008) [Moscow Univ. Phys. Bull. **63** (1), 16–19 (2008)].

14. D. A. Grachev and D. D. Sokoloff, "Higher Statistical Moments of the Solution to the Jacobi Equation with Random Curvature," in *Mathematical Models and Boundary Value Problems* (Gos. Tekh. Univ., Samara, 2008), Part 3, pp. 83–86.

15. D. A. Grachev, "Averaging of Jacobi Fields along Geodesics on Manifolds of Random Curvature," J. Math. Sci. **160** (1), 128–138 (2009).

16. D. A. Grachev, "Tensor Approach to the Problem of Averaging Differential Equations with δ-Correlated Random Coefficients," Mat. Zametki **87** (3), 359–368 (2010) [Math. Notes **87** (3–4), 336–344 (2010)].

17. E. A. Mikhailov, D. D. Sokoloff, and V. N. Tutubalin, "The Fundamental Matrix for the Jacobi Equation with Random Coefficients," Vychisl. Metody Programm. **11**, 261–268 (2010).

18. E. A. Mikhailov and I. I. Modyaev, "Galactic Dynamo Equations with Random Coefficients," Vychisl. Metody Programm. **15**, 351–358 (2014).

19. E. A. Mikhailov and V. V. Pushkarev, "Fluctuations of the Turbulent Diffusion Coefficient in Galaxy Dynamo Equations," Vychisl. Metody Programm. **17**, 447–454 (2016).