

УДК 519.6; 517.958:5

doi 10.26089/NumMet.v18r327

О ПРОБЛЕМЕ ВЫБОРА НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ТОМОГРАФИИ

А. В. Гончарский¹, С. Ю. Романов², С. Ю. Серёжников³

Статья посвящена разработке эффективных итерационных методов решения нелинейных обратных задач волновой томографии. Итерационные алгоритмы приближенного решения обратной задачи используют явное представление для градиента функционала невязки между экспериментально измеренным и рассчитанным волновыми полями. Большое значение для сходимости итерационного процесса в нелинейной обратной задаче имеет выбор начального приближения. В статье исследована возможность использования в качестве начального приближения скоростного разреза, полученного из решения обратной задачи в лучевом приближении. Эффективность такого подхода проиллюстрирована решением модельных обратных задач на суперЭВМ. Модельные задачи ориентированы на томографическую ультразвуковую диагностику мягких тканей в медицине.

Ключевые слова: ультразвуковая томография, волновое уравнение, нелинейная коэффициентная обратная задача, итерационные алгоритмы, начальное приближение.

1. Введение. Статья посвящена разработке эффективных методов решения обратных задач томографии в волновых моделях, учитывающих явления дифракции, рефракции и переотражения волн. Обратные задачи волновой томографии описываются дифференциальным гиперболическим уравнением второго порядка. Волновое поле, создаваемое зондирующими источниками, измеряется на некоторой поверхности, которая целиком или частично окружает исследуемый объект. Задача заключается в восстановлении скоростного разреза объекта по данным волнового поля, измеренного на поверхности.

Существуют два подхода в постановке обратных задач волновой томографии. В первом подходе с использованием аппарата функций Грина дифференциальное уравнение переписывается как нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестного скоростного разреза [1, 2]. Во втором подходе обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача для дифференциального уравнения. Для этого подхода в работах [3–7] получено точное представление для градиента функционала невязки между экспериментально измеренным и рассчитанным волновыми полями. Зная значение градиента, можно предложить различные итерационные методы приближенного решения обратной задачи. Независимо от подхода обратная задача является нелинейной, и для ее решения используются итеративные процедуры, эффективность которых напрямую зависит от выбора начального приближения.

Для получения начального приближения и в том, и в другом подходе обычно используют упрощенные модели. Наиболее популярными являются линеаризованные модели, которые в силу своей линейности обычно не содержат проблем, связанных со сходимостью алгоритма. Существуют даже удивительные с математической точки зрения результаты, когда в строгой математической постановке нелинейная задача сводится к линейной. Примером может послужить линеаризованное приближение в подходе, связанном с аппаратом функций Грина. Предельным переходом при частотах, стремящихся к нулю, можно свести нелинейную обратную задачу восстановления скоростного разреза к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода [8]. Проблема состоит в том, что с физической точки зрения такой подход представляется практически неприменимым. Например, все задачи ультразвуковой диагностики в медицине и в неразрушающем контроле используют частоты от 0.1 МГц и выше [9–15].

Понятно, что из реальных экспериментальных данных получить исходную информацию для решения линеаризованной задачи при частоте, стремящейся к нулю, не представляется возможным. Поиски аналогичных “линейных приближений” нелинейной обратной задачи волновой томографии можно найти

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; электроник, e-mail: s2110sj@gmail.com

в работе [16]. С математической точки зрения результат представляет интерес. Однако при практической реализации возникают перечисленные выше проблемы.

Одним из наиболее популярных подходов линейаризации нелинейной обратной задачи волновой томографии является использование борновского приближения [17]. В результате этого подхода приближенное решение находится из линейного интегрального уравнения. Проблема состоит в том, что линейаризацию нелинейной задачи нужно проводить в окрестности точного решения обратной задачи, которое не известно. Борновское приближение можно использовать только для небольших неоднородностей в однородных средах.

Существуют различные методы поиска глобального минимума невыпуклых функционалов [18]. В работах [19, 20] сделана попытка построения глобальных методов (следуя терминологии автора) решения коэффициентных обратных задач.

В настоящей статье предложены эффективные итеративные методы решения нелинейных обратных задач волновой томографии, в которых в качестве начального приближения используется скоростной разрез, полученный из решения линейной обратной задачи в лучевой модели. По мнению авторов статьи, добиться высокого разрешения в рассматриваемой задаче ультразвуковой томографии в лучевой модели очень сложно. Однако, как показано в настоящей статье, скоростной разрез, восстановленный в лучевой модели, может быть с успехом использован в качестве начального приближения итерационного процесса решения нелинейной обратной задачи томографии в волновой модели.

2. Постановка задачи волновой томографии как коэффициентной обратной задачи для уравнения гиперболического типа. Рассмотрим “основную” задачу, которая с помощью волнового уравнения описывает волновое поле $u(r, t)$ в течение времени $(0, T)$ в области $\Omega \subset R^N$ ($N = 2, 3$), ограниченной поверхностью $\partial\Omega$ (рис. 1), с точечным источником в точке r_0 :

$$c(r)u_{tt}(r, t) - \Delta u(r, t) = \delta(r - r_0) g(t). \tag{1}$$

Кроме того, положим, что $u(r, t)$ удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$u(r, t = 0) = u_t(r, t = 0) = 0, \quad \partial_n u(r, t)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь $c^{-0.5}(r) = v(r)$ — скорость волны в среде, $r \in R^N$, Δ — оператор Лапласа по переменной r . Генерируемый источником импульс описывается функцией $g(t)$, $\partial_n u(r, t)|_{\partial\Omega}$ — производная вдоль нормали к поверхности $\partial\Omega$ в области $\partial\Omega \times (0, T)$. Предполагается, что неоднородность среды вызвана изменениями скорости $v(r)$, неоднородность локализована внутри области G , а вне области неоднородности $v(r) \equiv v_0 = \text{const}$, где v_0 — известна. На границе области R ($G \subset R$) проводятся измерения поля $U(s, t)$ (рис. 1). Источники зондируют область неоднородности с разных сторон. Будем предполагать, что источники и область R располагаются достаточно далеко от границы $\partial\Omega$ области Ω таким образом, что выполняется соотношение $\partial_n u(r, t)|_{\partial\Omega} = 0$ из (2).

Рисунок 1 иллюстрирует схему расположения источников и приемников для решения двумерной обратной задачи. Цифрой 1 обозначены положения источника волнового излучения, измерения проводятся на границе ∂R . Диагностируемый объект G расположен в области R , заполненной однородной средой с известной скоростью v_0 .

Обратная задача состоит в нахождении функции $c(r)$ по экспериментальным данным $U(s, t)$, измеренным на границе ∂R области R за время $(0, T)$ при различных положениях r_0 источника. Обратную задачу будем ставить как задачу минимизации функционала невязки

$$\Phi(c) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial R} (u^j(s, t) - U(s, t))^2 ds dt. \tag{3}$$

Здесь $u^j(s, t)$ — решение задачи (1)–(2) при некоторых $c(r)$ и j -м положении источника, $j = 1, \dots, M$. Обратная задача ставится как задача поиска функции $\bar{c}(r)$, минимизирующей функционал невязки $\bar{c}(r) : \min_{c(r)} \Phi(c) = \Phi(\bar{c})$.

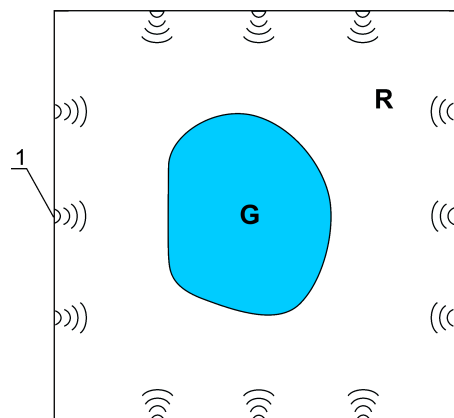


Рис. 1. Схема эксперимента в 2D-задаче

Рассмотрим задачу, которую назовем “сопряженной” к “основной” задаче (1)–(2):

$$c(r)w_{tt}(r, t) - \Delta w(r, t) = u(r, t) - U(r, t)|_{\partial R}, \quad (4)$$

$$w(r, t = T) = w_t(r, t = T) = 0, \quad \partial_n w(r, t)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Здесь на границе ∂R известны экспериментальные данные $U(s, t)$ и решение $u(s, t)$ задачи (1)–(2). Как показано в работах [3, 4, 6, 21–23], градиент функционала $\Phi(c)$, задаваемого выражением (3), имеет вид

$$\Phi'(c, dc) = \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left\{ \left[\int_0^T w_t^j(r, t) u_t^j(r, t) dt \right] dc(r) \right\} dr, \quad (6)$$

где u^j — решение “основной” задачи (1)–(2), а w^j — решение “сопряженной” задачи (5)–(6) для некоторого положения источника j .

Для минимизации функционала невязки (3) можно использовать следующий градиентный итерационный процесс [24–26]. Выберем начальное приближение $c^{(0)}$ итерационного процесса. На каждой итерации m выполняются следующие действия.

1. Решается прямая задача (1)–(2) для текущего итерационного приближения $c^{(m)}$. Расчет распространения ультразвуковой волны $u^{(m)}(r, t)$ выполняется по формуле (7). Вычисляются значения $u(r, t)$ на каждом из детекторов.

2. Вычисляются невязки $\Phi^{(m)} = \Phi(u^{(m)}(r))$ из формулы (3).

3. Решается сопряженная задача (4)–(5) для $w^{(m)}(r, t)$.

4. Вычисляется градиент $\Phi'_c(u^{(m)}(r))$ по формуле (6) для всех источников.

5. Текущее приближение $c^{(m+1)}$ вычисляется по формуле $c^{(m+1)} = c^{(m)} + \lambda^{(m)} \Phi'_c(u^{(m)}(r))$. Процесс возвращается к шагу 1.

Начальный шаг метода градиентного спуска $\lambda^{(0)}$ выбирается из априорных соображений. Если невязка $\Phi^{(m+1)}$ на следующей итерации оказывается больше, чем $\Phi^{(m)}$, то шаг $\lambda^{(m)}$ уменьшается в 1.5 раза.

3. Численные методы решения обратных задач волновой томографии. В силу нелинейности обратных задач волновой томографии результат решения сильно зависит от начального приближения. В настоящей статье предложен алгоритм решения нелинейных обратных задач волновой томографии, в которых в качестве начального приближения используется скоростной разрез, полученный из решения линейной обратной задачи в лучевой модели. Таким образом, алгоритм решения разбивается на два этапа.

На первом этапе решается система линейных алгебраических уравнений, полученная из лучевого приближения ультразвуковой томографии. В лучевом приближении предполагается, что от каждого источника до каждого приемника короткий импульс распространяется вдоль прямолинейного луча. При решении обратной задачи на первом этапе используется только время прихода волны. Вся расчетная область разбивается равномерной сеткой по координатным осям на квадратные ячейки. В пределах каждой ячейки скорость предполагается постоянной. Для составления системы линейных уравнений находится длина отрезка пересечения каждой ячейки и луча между источником и приемником. Размер сетки при решении системы линейных уравнений для обеспечения устойчивости решения выбирался небольшим. Далее, полученное решение подвергалось стандартной процедуре фильтрации высоких частот методом усреднения по окрестности в каждой точке.

На первом этапе для решения системы линейных алгебраических уравнений, полученной в лучевом приближении, был использован пакет вычислительных программ линейной алгебры из Библиотека численного анализа НИВЦ МГУ [27]. Расчеты проводились с помощью программы `ash1d_` с решения системы линейных алгебраических уравнений с положительно определенной симметричной матрицей, записанной в компактной форме, методом квадратного корня (методом Холецкого) с повышенной точностью.

Решение систем линейных уравнений, полученных в задаче волновой томографии в лучевом приближении, вообще говоря, представляет собой некорректно-поставленную задачу. Методы решения некорректных задач линейной алгебры, разработанные еще в работах А.Н. Тихонова [28], позволяют находить приближенное решение независимо от того, является ли линейная задача разрешимой или нет [29]. В рассматриваемых задачах некорректность линеаризованной задачи начинает сказываться при достаточно мелкой сетке.

На втором этапе алгоритма решения нелинейных обратных задач волновой томографии использовался описанный выше градиентный итерационный процесс, в котором в качестве начального приближения принималось решение, полученное на первом этапе. Для решения обратной задачи был применен

конечно-разностный метод во временной области. Приведем дискретизацию задачи в двумерном случае. На области изменения пространственных аргументов (x, y) и времени t введем равномерную дискретную сетку с шагом сетки h по пространственным переменным и шагом τ по времени. Следуя [30], запишем разностную схему четвертого порядка точности вдоль пространственных координатных осей. В области, не содержащей источников, получаем явную разностную схему для дифференциального уравнения (1):

$$u_{ij}^{k+1} + u_{ij}^{k-1} = \lambda^2 \left(\frac{4}{3}(u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k + u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k) - \frac{1}{12}(u_{i+2j}^k + u_{i-2j}^k + u_{ij+2}^k + u_{ij-2}^k) + \left(\frac{2}{\lambda^2} - 5 \right) u_{ij}^k \right). \tag{7}$$

Здесь член u_{ij}^{k+1} соответствует $(k + 1)$ -му слою по времени, u_{ij}^k — значения $u(r, t)$ в точке (i, j) в момент времени k , параметр $\lambda = -v_{ij} \frac{\tau}{h}$ определяется из условия устойчивости Куранта, v_{ij} — значения $v(r)$ в точке (i, j) . Расчет “сопряженной” задачи (4)–(5) выполняется по аналогичным разностным формулам.

При проведении численных расчетов необходимо выбирать достаточно большую область расчетов, чтобы за время T излучение от источников не успевало дойти до границы Ψ . В настоящей работе модельные расчеты проводились в небольшой области, содержащей R с условием “неотражения” на границе. Условие “неотражения” имеет нелокальный характер и его точное выражение вычисляется достаточно сложно. В расчетах использовались приближения второго порядка точности для условия “неотражения”, которое позволило значительно сократить отражение от границы при малых углах падения. Это условие на границе имеет вид [31]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{8}$$

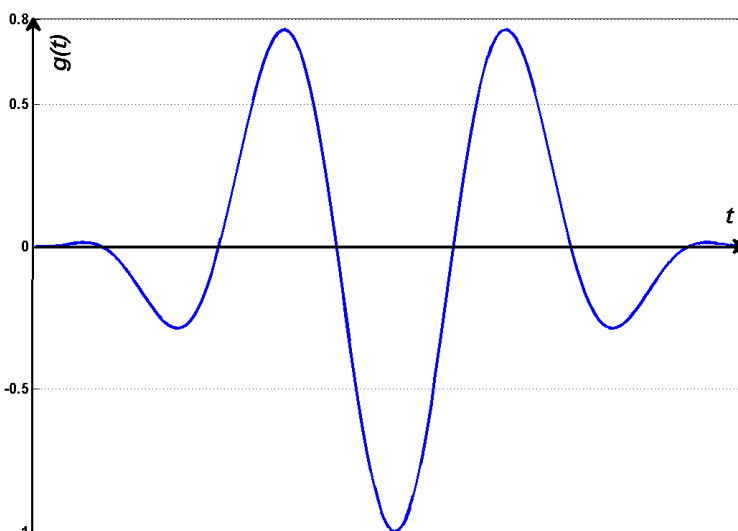


Рис. 2. График функции $g(t)$

В модельной задаче зондирование выполнялось коротким импульсом, размер которого приблизительно равен 2–3 периодам колебаний. График функции $g(t)$ в уравнении (1) приведен на рис. 2.

Вычислительный эксперимент состоял в решении прямой задачи по определению акустического давления $u(r, t)$ на границе расчетной области R , где расположены детекторы, при известном распределении скорости звука $v(r) = c^{-0.5}(r)$. Затем использовались полученные данные $u(r, t)$ на границе для решения обратной задачи по восстановлению распределения скорости $v(r)$.

4. Численное моделирование в задачах 2D-волновой томографии. Модельные расчеты проводились для двумерной задачи ультразвуковой томографии. Схема эксперимента приведена на рис. 1. Сначала решалась прямая задача распространения волны в неоднородной модельной среде для тестового объекта по схеме четвертого порядка (7) для каждого положения источника. На границе области расчетов ставилось граничное условие прозрачности второго порядка (8). Волновое поле по периметру квадрата на рис. 1 сохранялось и использовалось в качестве модельных экспериментальных данных для решения обратной задачи. На первом этапе обратная задача решалась в линейном лучевом приближении. Из модельных экспериментальных данных находилось время первого прихода импульса на приемники, и эти значения подставлялись в систему линейных уравнений для лучевой модели. Далее полученное из лучевой модели решение использовалось в качестве начального приближения градиентного итерационного процесса решения нелинейной обратной задачи.

При проведении расчетов томографическая схема и основные значения параметров выбирались в первую очередь с целью моделирования в задаче ультразвуковой томографии молочной железы. Спецификой рассматриваемых задач ультразвуковой томографии является то, что ультразвуковые характеристики молочной железы мало отличаются друг от друга как для здоровых, так и для пораженных

раком тканей. Скорость распространения звука в воде составляет $v_0 = 1500$ м/с, в то время как скорость распространения звука в человеческих тканях отличается от v_0 не более чем на 10% [32].

В модельных расчетах использовались следующие значения параметров: длина волны центральной частоты импульса $\lambda = 7$ мм, диапазон значений скорости звука в тестовом объекте — 1.35–1.6 км/с, скорости звука в окружающей среде — 1.5 км/с, размер расчетной области — 200×200 мм, размер разностной сетки 350×350 точек. В расчетах использовалось 12 положений источников, располагавшихся равномерно на каждой стороне квадрата, как это показано на рис. 1. Волновое поле измерялось приемниками, расположенными по сторонам квадрата с шагом 0.6 мм.

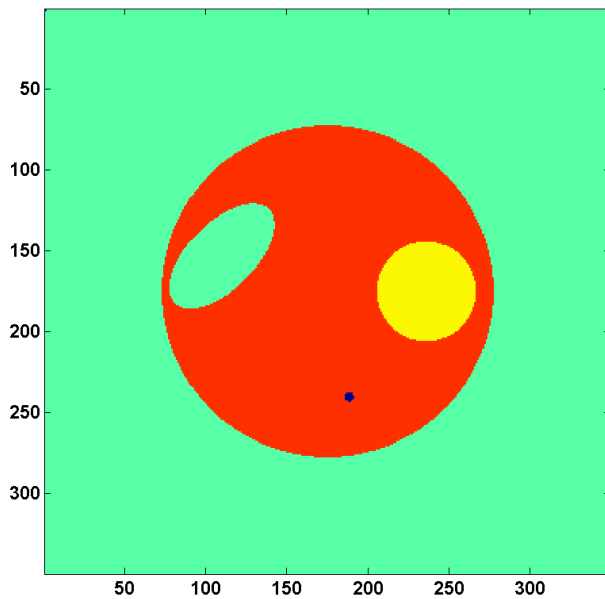


Рис. 3. Модельное изображение — $c(r)$

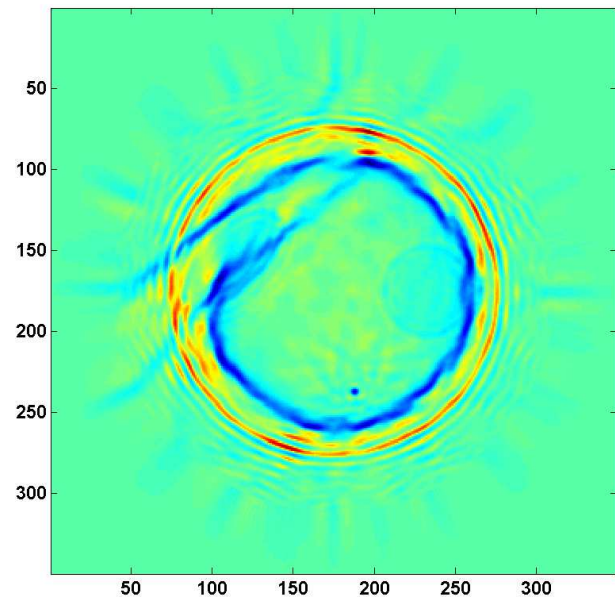


Рис. 4. Скоростной разрез восстановлен в модели (1) с начального приближения $c^0(r) = \text{const}$

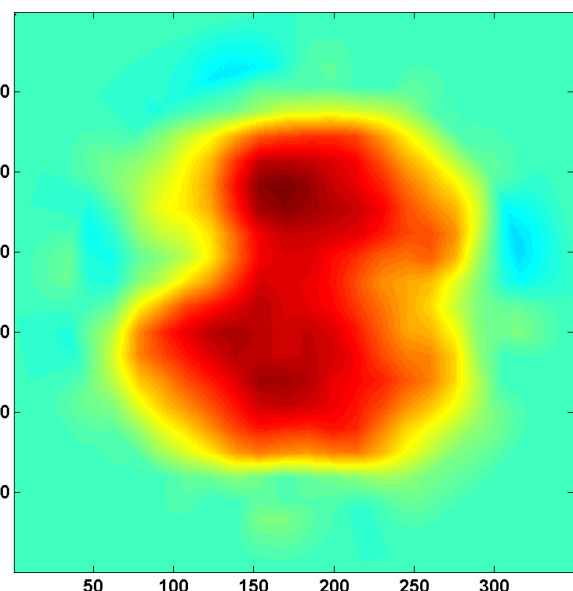
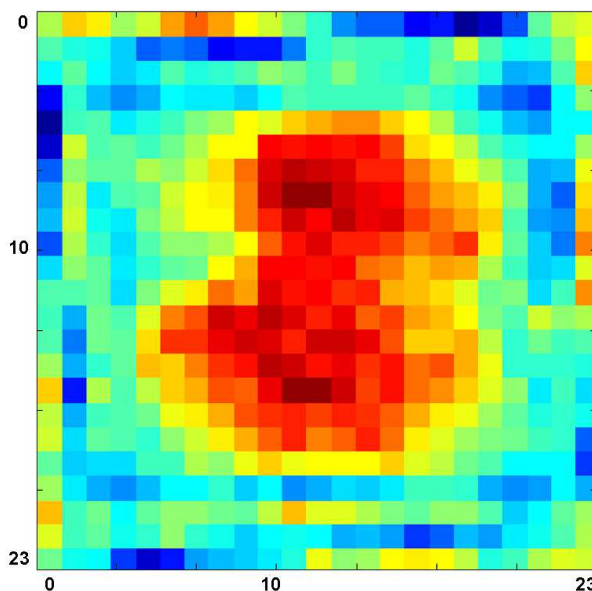


Рис. 5. Восстановленный в лучевой модели скоростной разрез: а) на сетке 23×23 точки, б) после процедуры сглаживания

На рис. 3 показано исходное изображение тестового объекта. На рис. 4 показано полученное изображение при проведении расчетов с начального приближения $v_0 = \text{const} = 1500$ м/с. После 150 итераций невязка перестала уменьшаться, и итерационный процесс был остановлен. Как видно из рис. 4, итерационный процесс минимизации невыпуклого функционала невязки в этом случае остановился в локальном

минимуме. Полученное изображение сильно отличается от модельного.

На рис. 5а приведено восстановленное изображение скоростного разреза при проведении расчетов в линейной лучевой модели на сетке из 23×23 точек. Используемая сетка достаточно грубая и не позволяет получить тонкую структуру модельного изображения.

Однако небольшое число точек сетки обеспечивает устойчивость решения системы линейных уравнений, возникающих в лучевой модели. Используя априорную информацию о локализации исследуемого объекта в круге радиуса 5 см и проведя стандартную процедуру фильтрации высоких частот, приходим к изображению, представленному на рис. 5б.

Скоростной разрез, представленный на рис. 5б, использовался в качестве начального приближения для описанного выше итерационного процесса решения нелинейной обратной задачи. На рис. 6 приведен результат итерационного процесса, полученный после 400 итераций с начального приближения на рис. 5б. Как видно из рис. 6, предложенный двухэтапный алгоритм сходится к точному решению коэффициентной обратной задачи.

При реконструкции с помощью предлагаемого алгоритма с высокой точностью восстанавливается не только форма неоднородностей, но и само значение функции скорости. Хорошо восстанавливаются даже небольшие неоднородности размером 2–3 мм, а значение скорости звука восстанавливается с точностью до 10 м/с и выше. Расчеты 2D-задачи проводились на суперкомпьютере “Ломоносов” Суперкомпьютерного центра МГУ им. М.В. Ломоносова [33].

5. Заключение. Статья посвящена разработке эффективных алгоритмов приближенного решения нелинейных обратных задач волновой томографии. Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача для уравнения гиперболического типа во временной области. Важное значение имеет выбор начального приближения. В качестве начального приближения предложено использовать скоростной разрез, полученный в лучевой модели геометрии.

Математические методы интерпретации томографических данных в лучевой геометрии широко используются в рентгеновской томографии. Рентгеновское излучение уникально тем, что его достаточно просто поглотить, но отклонить рентгеновский луч очень сложно. Это означает, что рефракция в рентгеновской томографии практически отсутствует. Попытки перенести лучевые модели в ультразвуковую томографию связаны с очень большими проблемами. Во-первых, необходимо учитывать рефракцию лучей, что сразу делает задачу интерпретации томографических данных нелинейной. Во-вторых, необходимо учитывать дифракцию ультразвуковых волн. В-третьих, казалось бы самая простая задача регистрации времени прихода импульса из-за волновых эффектов оказывается не такой уж простой. Тем не менее, существует несколько научных групп [34–38], которые проводят исследования в рамках лучевых приближений. По мнению авторов статьи, добиться высокого разрешения в интерпретации томографических данных с ультразвуковыми источниками в лучевой модели очень сложно.

Однако, как показано в настоящей статье, скоростной разрез, восстановленный в лучевой модели, может с успехом быть использован в качестве начального приближения итерационного процесса решения нелинейной обратной задачи томографии в волновой модели. Модельная задача в лучевом приближении решалась на грубой сетке, что, с одной стороны, обеспечивает ее устойчивость, но, с другой стороны, не требует большого количества измерений в эксперименте.

С точки зрения приложений одной из наиболее интересных задач волновой томографии является медицинская диагностика мягких тканей. Модельные расчеты ориентированы непосредственно на эту задачу.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01065). Исследование выполнено в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lavarello R.J., Oelze M.L. Tomographic reconstruction of three-dimensional volumes using the distorted Born

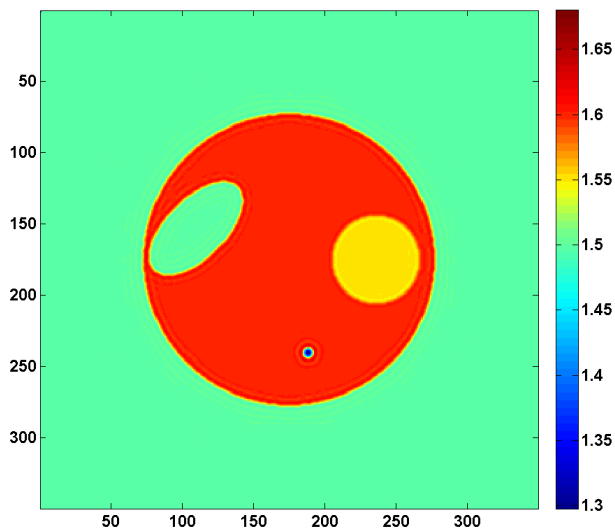


Рис. 6. Скоростной разрез восстановлен в модели (1) с начального приближения, представленного на рис. 5б

- iterative method // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2009. **28**, N 10. 1643–1653.
2. Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Об одной задаче волновой диагностики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2010. № 1. 7–13.
 3. Natterer F. Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging // Contemporary Mathematics. Vol. 559. Providence: American Mathematical Society, 2011. 151–162.
 4. Бейлина Л., Клибанов М.В., Кокурин М.Ю. Адаптивность и релаксация для некорректных задач и глобальная сходимость для коэффициентной обратной задачи // Проблемы математического анализа. 2010. № 46. 3–44.
 5. Гончарский А.В., Романов С.Ю. О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. **52**, № 2. 263–269.
 6. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Problems. 2013. **29**, N 7. doi: 10.1088/0266-5611/29/7/075004.
 7. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Iterative methods for solving coefficient inverse problems of wave tomography in models with attenuation // Inverse Problems. 2017. **33**, N 2. doi: 10.1088/1361-6420/33/2/025003.
 8. Lavrentiev M.M. Some improperly posed problems of mathematical physics. New York: Springer, 1967.
 9. Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д. Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2015. **61**, № 2. 254–273.
 10. Chang C.H., Huang S.W., Yang H.C., Chou Y.H., Li P.C. Reconstruction of ultrasonic sound velocity and attenuation coefficient using linear arrays: clinical assessment // Ultrasound Med. Biol. 2007. **33**, N 11. 1681–1687.
 11. Duric N., Littrup P., Li C., Roy O., Schmidt S., Janer R., Cheng X., Goll J., Rama O., Bey-Knight L., Greenway W. Breast ultrasound tomography: bridging the gap to clinical practice // Proc. SPIE 8320 Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. 2012. doi: 10.1117/12.910988.
 12. Gemmeke H., Berger L., Birk M., Goebel G., Menshikov A., Tcherniakhovski D., Zapf M., Ruiter N.V. Hardware setup for the next generation of 3D ultrasound computer tomography // Proc. IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec. 2010. doi: 10.1109/NSSMIC.2010.5874228.
 13. Wiskin J., Borup D., Andre M., Johnson S., Greenleaf J., Parisky Y., Klock J. Three-dimensional nonlinear inverse scattering: quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design, and clinical results // J. Acoust. Soc. Am. 2013. **133**, N 5. doi: 10.1121/1.4805138.
 14. Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. A computer simulation study of soft tissue characterization using low-frequency ultrasonic tomography // Ultrasonics. 2016. **67**. 136–150.
 15. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серезников С.Ю. Низкочастотная трехмерная ультразвуковая томография // Доклады Академии наук. 2016. **468**, № 3. 268–271.
 16. Leonov A.S., Bakushinsky A.B. Economic numerical method of solving coefficient inverse problem for 3D wave equation // ArXiv preprint: 1703.01216v1 [math.NA] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2017), available at <https://arxiv.org/abs/1703.01216>.
 17. Ramm A.G. Multidimensional inverse scattering problems. London: Longman Group, 1992.
 18. Matveev S.A., Zheltkov D.A., Tyrtysnikov E.E., Smirnov A.P. Tensor train versus Monte Carlo for the multicomponent Smoluchowski coagulation equation // Journal of Computational Physics. 2016. **316**. 164–179.
 19. Beilina L., Klivanov M.V. Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.
 20. Kuzhuget A.V., Beilina L., Klivanov M.V., Sullivan A., Nguyen L., Fiddy M.A. Blind backscattering experimental data collected in the field and an approximately globally convergent inverse algorithm // Inverse Problems. 2012. **28**, N 9. doi: 10.1088/0266-5611/28/9/095007.
 21. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серезников С.Ю. Суперкомпьютерные технологии в задачах проектирования томографических диагностических комплексов. СПб: Издательство Политехнического университета СПб, 2016.
 22. Романов С.Ю. Разработка алгоритмов решения прямых и обратных задач томографии в скалярных волновых моделях. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: Моск. гос. унив. им. М.В. Ломоносова, 2016.
 23. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Суперкомпьютерные технологии в разработке методов решения обратных задач в УЗИ-томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. **13**. 235–238.
 24. Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // Wave Motion. 2014. **51**, N 3. 389–404.
 25. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // Physics in Medicine and Biology. 2014. **59**, N 8. 1979–2004.
 26. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серезников С.Ю. Задачи волновой томографии с неполным диапазоном данных // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2014. **15**. 274–285.
 27. Сайт Библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ. http://num-anal.srcc.msu.ru/lib_na/libnal.htm.
 28. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. **151**, № 3. 501–504.

29. *Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.* Numerical methods for the solution of ill-posed problems. Dordrecht: Springer, 1995.
30. *Bilbao S.* Numerical sound synthesis: finite difference schemes and simulation in musical acoustics. Chichester: Wiley, 2009.
31. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003.
32. *Hendee W.R., Ritenour E.R.* Medical imaging physics. New York: Wiley, 2002.
33. *Sadovnichy V., Tikhonravov A., Voevodin V., Opanasenko V.* "Lomonosov": supercomputing at Moscow State University // Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale. Boca Raton: CRC Press, 2013. 283–308.
34. *Schmidt S., Duric N., Li C., Roy O., Huang Z.F.* Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for acoustic imaging of media and application to tomographic imaging of the breast // Med. Phys. 2011. **38**. 998–1007.
35. *Saha R.K., Sharma S.K.* Validity of a modified Born approximation for a pulsed plane wave in acoustic scattering problems // Phys. Med. Biol. 2005. **50**. doi: 10.1088/0031-9155/50/12/007.
36. *Zeqiri B., Baker C., Alosa G., Wells P.N.T., Liang H.* Quantitative ultrasonic computed tomography using phase-insensitive pyroelectric detectors // Phys. Med. Biol. 2013. **58**. doi: 10.1088/0031-9155/58/15/5237.
37. *Базулин А.Е., Базулин Е.Г., Вовлжкин А.Х., КокOLEV С.А., Ромашкин С.В., Тихонов Д.С.* Применение трехмерной когерентной обработки в ультразвуковом контроле // Дефектоскопия. 2014. **50**, № 2. 46–65.
38. *Базулин Е.Г.* О возможности использования в ультразвуковом неразрушающем контроле метода максимальной энтропии для получения изображения рассеивателей по набору эхосигналов // Акуст. журн. 2013. **59**, № 2. 235–254.

Поступила в редакцию
28.08.2017

The Problem of Choosing Initial Approximations in Inverse Problems of Ultrasound Tomography

A. V. Goncharsky¹, S. Yu. Romanov², and S. Yu. Seryozhnikov³

¹ *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru*

² *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: romanov60@gmail.com*

³ *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Electronic Engineer, e-mail: s2110sj@gmail.com*

Received August 28, 2017

Abstract: This paper is devoted to developing efficient iterative methods to solve nonlinear inverse problems of wave tomography. The iterative algorithms used to obtain an approximate solution of the inverse problem are based on an explicit representation of the gradient of the residual functional between the measured and computed wave fields. The choice of the initial approximation is of great importance for the convergence of the iterative process in a nonlinear inverse problem. The possibility of using an initial approximation to the sound speed obtained via solving the inverse problem in the ray approximation is studied. The efficiency of this approach is illustrated by solving model problems using a supercomputer. These model problems are designed for the ultrasound tomographic imaging of soft tissues in medicine.

Keywords: ultrasound tomography, wave equation, nonlinear coefficient inverse problem, iterative algorithms, initial approximation.

References

1. R. J. Lavarello and M. L. Oelze, "Tomographic Reconstruction of Three-Dimensional Volumes Using the Distorted Born Iterative Method," *IEEE Trans. Med. Imaging* **28** (10), 1643–1653 (2009).
2. A. V. Goncharskii, S. L. Ovchinnikov, and S. Yu. Romanov, "On the One Problem of Wave Diagnostic," *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15: Vychisl. Mat. Kibern.*, No. 1, 7–13 (2010) [*Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.* **34** (1), 1–7 (2010)].

3. F. Natterer, “Possibilities and Limitations of Time Domain Wave Equation Imaging,” in *Contemporary Mathematics* (Am. Math. Soc. Press, Providence, 2011), Vol. 559, pp. 151–162.
4. L. Beilina, M. V. Klibanov, and M. Yu. Kokurin, “Adaptivity with Relaxation for Ill-Posed Problems and Global Convergence for a Coefficient Inverse Problem,” *J. Math. Sci.* **167** (3), 279–325 (2010).
5. A. V. Goncharskii and S. Yu. Romanov, “Two Approaches to the Solution of Coefficient Inverse Problems for Wave Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **52** (2), 263–269 (2012) [*Comput. Math. Math. Phys.* **52** (2), 245–251 (2012)].
6. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Supercomputer Technologies in Inverse Problems of Ultrasound Tomography,” *Inverse Probl.* **29** (7) (2013). doi: 10.1088/0266-5611/29/7/075004
7. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Iterative Methods for Solving Coefficient Inverse Problems of Wave Tomography in Models with Attenuation,” *Inverse Probl.* **33** (2) (2017). doi: 10.1088/1361-6420/33/2/025003
8. M. M. Lavrentiev, *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics* (Springer, New York, 1967).
9. V. A. Burov, D. I. Zotov, and O. D. Rumyantseva, “Reconstruction of the Sound Velocity and Absorption Spatial Distributions in Soft Biological Tissue Phantoms from Experimental Ultrasound Tomography Data,” *Akust. Zh.* **61** (2), 254–273 (2015) [*Acoust. Phys.* **61** (2), 231–248 (2015)].
10. C. H. Chang, S. W. Huang, H. C. Yang, et al., “Reconstruction of Ultrasonic Sound Velocity and Attenuation Coefficient Using Linear Arrays: Clinical Assessment,” *Ultrasound Med. Biol.* **33** (11), 1681–1687 (2007).
11. N. Duric, P. Littrup, C. Li, et al., “Breast Ultrasound Tomography: Bridging the Gap to Clinical Practice,” in *Proc. SPIE 8320 Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy* (2012). doi: 10.1117/12.910988
12. H. Gemmeke, L. Berger, M. Birk, et al., “Hardware Setup for the Next Generation of 3D Ultrasound Computer Tomography,” in *Proc. IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec., Knoxville, USA, October 30–November 6, 2010* doi: 10.1109/NSSMIC.2010.5874228
13. J. Wiskin, D. Borup, M. Andre, et al., “Three-Dimensional Nonlinear Inverse Scattering: Quantitative Transmission Algorithms, Refraction Corrected Reflection, Scanner Design, and Clinical Results,” *J. Acoust. Soc. Am.* **133** (2013). doi: 10.1121/1.4805138
14. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, “A Computer Simulation Study of Soft Tissue Characterization Using Low-Frequency Ultrasonic Tomography,” *Ultrasonics* **67**, 136–150 (2016).
15. A. V. Goncharskii, S. Yu. Romanov and S. Yu. Seryozhnikov, “Low-Frequency Three-Dimensional Ultrasonic Tomography,” *Dokl. Akad. Nauk* **468** (3), 268–271 (2016). [*Dokl. Phys.* **61** (5), 211–214 (2016)].
16. A. S. Leonov and A. B. Bakushinsky, “Economic Numerical Method of Solving Coefficient Inverse Problem for 3D Wave Equation,” arXiv preprint: 1703.01216v1 [math.NA] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2017), available at <https://arxiv.org/abs/1703.01216>.
17. A. G. Ramm, *Multidimensional Inverse Scattering Problems* (Longman Group, London, 1992).
18. S. A. Matveev, D. A. Zheltkov, E. E. Tyrtysnikov, and A. P. Smirnov, “Tensor Train Versus Monte Carlo for the Multicomponent Smoluchowski Coagulation Equation,” *J. Comput. Phys.* **316**, 164–179 (2016).
19. L. Beilina and M. V. Klibanov, *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems* (Springer, New York, 2012).
20. A. V. Kuzhuget, L. Beilina, M. V. Klibanov, et al., “Blind Backscattering Experimental Data Collected in the Field and an Approximately Globally Convergent Inverse Algorithm,” *Inverse Probl.* **28** (9) (2012). doi: 10.1088/0266-5611/28/9/095007
21. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, *Supercomputer Technologies in Development of Diagnostic Tomography Facilities* (Politekh. Univ., St. Petersburg, 2016) [in Russian].
22. S. Y. Romanov, *Development of Algorithms for Solving Direct and Inverse Tomography Problems in Scalar Wave Models*, Doctoral Dissertation in Mathematics and Physics (Moscow State Univ., Moscow, 2016).
23. A. V. Goncharsky and S. Yu. Romanov, “Supercomputer Technologies in the Development of Methods for Solving Inverse Problems in Ultrasound Tomography,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 235–238 (2012).
24. A. V. Goncharsky, S. Y. Romanov, and S. Y. Seryozhnikov, “Inverse Problems of 3D Ultrasonic Tomography with Complete and Incomplete Range Data,” *Wave Motion* **51** (3), 389–404 (2014).
25. A. V. Goncharsky and S. Y. Romanov, “Inverse Problems of Ultrasound Tomography in Models with Attenuation,” *Phys. Med. Biol.* **59** (8), 1979–2004 (2014).
26. A. V. Goncharsky, S. Yu. Romanov, and S. Yu. Seryozhnikov, “Problems of Limited-Data Wave Tomography,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 274–285 (2014).
27. Numerical Analysis Library, Moscow State University. http://num-anal.srcc.msu.ru/lib_na/libnal.htm.

Cited September 19, 2017.

28. A. N. Tikhonov, "Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **151** (3), 501–504 (1963) [*Sov. Math. Dokl.* **5** (4), 1035–1038 (1963)].

29. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems* (Springer, Dordrecht, 1995).

30. S. Bilbao, *Numerical Sound Synthesis: Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics* (Wiley, Chichester, 2009).

31. M. A. Ilgamov and A. N. Gilmanov, *Non-Reflecting Boundary Conditions for Computational Domains* (Fizmatlit, Moscow, 2003) [in Russian].

32. W. R. Hendee and E. R. Ritenour, *Medical Imaging Physics* (Wiley, New York, 2002).

33. V. Sadovnichy, A. Tikhonravov, V. Voevodin, and V. Opanasenko, "'Lomonosov': Supercomputing at Moscow State University," in *Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale* (CRC Press, Boca Raton, 2013), pp. 283–308.

34. S. Schmidt, N. Duric, C. Li, et al., "Modification of Kirchhoff Migration with Variable Sound Speed and Attenuation for Acoustic Imaging of Media and Application to Tomographic Imaging of the Breast," *Med. Phys.* **38**, 998–1007 (2011).

35. R. K. Saha and S. K. Sharma, "Validity of a Modified Born Approximation for a Pulsed Plane Wave in Acoustic Scattering Problems," *Phys. Med. Biol.* **50** (2005). doi: 10.1088/0031-9155/50/12/007

36. B. Zeqiri, C. Baker, G. Alosa, et al., "Quantitative Ultrasonic Computed Tomography Using Phase-Insensitive Pyroelectric Detectors," *Phys. Med. Biol.* **58** (2013). doi: 10.1088/0031-9155/58/15/5237

37. A. E. Bazulin, E. G. Bazulin, A. Kh. Vopilkin, et al., "Application of 3D Coherent Processing in Ultrasonic Testing," *Defektoskopiya* **50** (2), 46–65 (2014) [*Russ. J. Nondestruct. Test.* **50** (2), 92–108 (2014)].

38. E. G. Bazulin, "On the Possibility of Using the Maximum Entropy Method in Ultrasonic Nondestructive Testing for Scatterer Visualization from a Set of Echo Signals," *Akust. Zh.* **59** (2), 235–254 (2013) [*Acoust. Phys.* **59** (2), 210–227 (2013)].