УДК 517.983.54 doi 10.26089/NumMet.v18r428

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И ПОГРЕШНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. М. Кокурин[1]

Изучаются конечно-разностные схемы решения некорректных задач Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения второго порядка в банаховом пространстве. Получены равномерные по времени оценки скорости сходимости и погрешности этих схем при наложении на искомое решение условия истокопредставимости. Найдены близкие друг к другу необходимые и достаточные условия в терминах показателя истокопредставимости для сходимости класса схем со степенной скоростью относительно шага дискретизации. Построены и изучены схемы полной дискретизации некорректных задач Коши второго порядка, сочетающие полудискретизацию по времени с дискретной аппроксимацией пространства и оператора.

Ключевые слова: некорректная задача Коши, банахово пространство, разностная схема, скорость сходимости, оценка погрешности, операторное исчисление, секториальный оператор, интерполяция банаховых пространств, конечномерная аппроксимация.

1. Постановка задачи. Изучается задача Коши

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in [0,T], \\ &x(0) = f \in D(A), \quad \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

с замкнутым неограниченным оператором $A : D(A) \subset X \to X$ в банаховом пространстве X, $\overline{D(A)} = X$. Работа посвящена конечно–разностным методам аппроксимации классического решения этой задачи. Классическим решением задачи (1.1) называется функция $x : [0,T] \to D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ в смысле нормы X и удовлетворяющая уравнению и начальным условиям из (1.1) [1, с. 291–292].

Всюду ниже $\sigma(A)$ — спектр оператора A, $R(\zeta, A) = (\zeta E - A)^{-1}$ — его резольвента, E — единичный оператор в X. Введем обозначение $K(\varphi) = \Big\{\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \,\Big|\, |\arg\zeta| < \varphi\Big\}$, $\varphi \in (0,\pi)$.

Предполагается, что для оператора A выполнено следующее условие.

Условие 1. Справедливо включение $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$ при $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, а также имеет место оценка $\big\|R(\zeta, A)\big\| \leqslant \dfrac{C_0}{1+|\zeta|}$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0)$, где постоянная C_0 не зависит от ζ.

Здесь и всюду в настоящей работе $\|\cdot\|$ означает норму в пространстве X или операторную норму для операторов из $L(X)$; нормы других пространств указываются явно. Операторы, удовлетворяющие условию 1, будем называть секториальными с углом секториальности φ_0. Отметим, что из секториальности оператора следует существование обратного оператора A^{-1}.

Задача (1.1) в общем случае некорректно поставлена, но при этом имеет не более одного решения [1, с. 320–321; 2, с.105]. В работе изучается класс разностных схем аппроксимации решения $x = x(t)$ в узлах дискретизации $t_n = n\Delta t$:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = (\Delta t)^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j A x_{n+j}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-k, \quad \Delta t = T/N, \quad x_0 = f. \tag{1.2}$$

Здесь $k \geqslant 2$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant j \leqslant k$ — фиксированные параметры, выбор которых определяет конкретную схему. Помимо них необходимо задать еще начальные элементы $x_1, \ldots, x_{k-1}$, тогда схема (1.2) позволяет найти приближения x_n к значениям искомого решения $x(t_n)$ при всех $0 \leqslant n \leqslant N$. Будем считать выполненным следующее условие.

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пл. Ленина, д. 1, 424000, г. Йошкар-Ола; преподаватель, e-mail: kokurin@nextmail.ru

Условие 2. В схеме (1.2) $\alpha_k = 1$, $\beta_k < 0$.

Из (1.2) следует, что приближения x_{n+k}, $0 \leqslant n \leqslant N - k$, определяются по формуле

$$x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \big(\beta_j (\Delta t)^2 A - \alpha_j E\big) \big(E - \beta_k (\Delta t)^2 A\big)^{-1} x_{n+j}. \tag{1.3}$$

Представление (1.3), в отличие от (1.2), определяет приближения x_n, $k \leqslant n \leqslant N$, при произвольных $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in X$, не обязательно принадлежащих $D(A)$. Это позволяет использовать разностную схему для аппроксимации решения задачи (1.1) в практически важном случае, когда вместо точного элемента f известно его приближение f_δ, не принадлежащее, вообще говоря, множеству $D(A)$. При должном выборе количества отрезков дробления N в зависимости от уровня погрешности входных данных разностные схемы изучаемого класса порождают регуляризующий алгоритм для некорректной задачи (1.1) [3].

Разностные методы, подобные (1.2), были первоначально введены в [4, 5] для приближенного решения задачи Коши первого порядка $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = f$. В наиболее общем виде оценки скорости сходимости и погрешности этих методов получены в [6, 7]. Первые результаты по исследованию схем (1.2) в применении к задачам Коши второго порядка изложены в [4, 8]. В статье [3] установлены оценки скорости сходимости и погрешности схем вида (1.2) для задачи (1.1) в том случае, когда ее решение удовлетворяет априорному условию продолжимости (см. условие 6а ниже). В настоящей статье, служащей продолжением работы [3], такие оценки получены для одного класса схем вида (1.2) при наложении более слабого условия истокопредставимости. Кроме того, на основе схем (1.2) построены методы полной дискретизации задачи (1.1), включающие в себя наряду с полудискретизацией по времени также и конечномерную аппроксимацию пространства X и оператора A. В настоящей статье широко используются схемы рассуждений, апробированные в [7, 9, 10] при построении и исследовании методов решения некорректных задач Коши первого порядка.

Вопросу применения схем (1.2) к решению некорректной задачи Коши второго порядка с общими начальными условиями $x(0) = f$, $\dot{x}(0) = g \neq 0$ автор собирается посвятить отдельную публикацию. Некоторые результаты, полученные в этом направлении, были анонсированы в [11, 12].

К виду (1.1) приводятся задачи Коши для эллиптических уравнений в цилиндрической области $\Omega \times [0, T]$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\sigma) \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\sigma) \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} + c(\sigma) x = 0, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Omega$$

с положительно определенной матрицей $\big(a_{ij}(\sigma)\big)_{i,j=1}^{n}$ при соответствующих граничных условиях на $\partial\Omega$ [1, с. 209; 3; 13, гл. 7; 14, гл. 3]. Условию 1 удовлетворяют также некоторые эллиптические дифференциальные операторы высокого порядка [15, 16]. Среди методов решения задач с такими операторами, учитывающих их дифференциальную структуру, назовем метод Козлова–Мазьи–Фомина [17, 18] и метод квазиобращения [19, гл. 4]. В [20–24] развивается подход к решению корректных и некорректных задач Коши первого и второго порядка с произвольным оператором, не обязательно дифференциальным. В рамках этого подхода, в отличие от развиваемого в настоящей работе, вначале производится пространственная дискретизация задачи Коши, а не временна́я. В [25] изложен другой метод для задач вида (1.1) в гильбертовом пространстве, аналогичный методу квазиобращения, и приведен обширный обзор методов решения некорректных задач Коши для эллиптических уравнений.

Настоящая статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся основные результаты статьи [3], посвященные оценкам скорости сходимости скалярных разностных уравнений и связи их решений с решениями абстрактных разностных схем вида (1.2). В разделах 3 и 4 изучаются двушаговые схемы одного специального класса, допускающие степенные по Δt оценки скорости сходимости. В разделе 3 устанавливаются достаточные условия степенной сходимости этих схем в терминах показателя истокопредставимости искомого решения, а в разделе 4 — близкие к ним необходимые условия. Кроме того, в разделе 3 изучаются регуляризующие свойства данных схем и устанавливаются оценки их погрешности в случае, когда начальный элемент f в задаче (1.1) известен приближенно. В разделе 5 исследуются схемы полной дискретизации для задач вида (1.1), сочетающие полудискретизацию по времени с конечномерной аппроксимацией входящего в задачу пространства X и оператора A. Наконец, в разделе 6 приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих эффективность изучаемых схем.

2. О скалярных и абстрактных разностных уравнениях и связи между их решениями.

Наряду с задачей (1.1) будем изучать соответствующую ей скалярную задачу Коши второго порядка

$$\begin{aligned} &\ddot{v}(t) = \lambda v(t), \quad t \in [0, T], \\ &v(0) = 1, \quad \dot{v}(0) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Рассмотрим также скалярную разностную схему, аналогичную (1.2):

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j v_{n+j} = (\Delta t)^2 \lambda \sum_{j=0}^{k} \beta_j v_{n+j}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-k, \quad v(0) = 1. \tag{2.2}$$

Если определены начальные значения $v_j = v_j(\lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, то решение $v_n(\lambda)$ уравнения (2.2) находится по рекуррентной формуле, аналогичной (1.3):

$$v_{n+k}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} \big(\beta_j \lambda (\Delta t)^2 - \alpha_j\big) \big(1 - \beta_k \lambda (\Delta t)^2\big)^{-1} v_{n+j}(\lambda). \tag{2.3}$$

Схема (2.2) аппроксимирует решение $v(t) = \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} t)$ задачи (2.1) с порядком аппроксимации m при выполнении следующего условия [3, 26, с. 36].

Условие 3. Справедливы равенства

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=0}^{k} j \alpha_j = 0, \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=0}^{k} j^{\nu+1} \alpha_j = \nu(\nu+1) \sum_{j=0}^{k} j^{\nu-1} \beta_j, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant m \tag{2.5}$$

с некоторым $m \geqslant 1$.

При $\nu = 1$ равенство (2.5) следует понимать как

$$\sum_{j=0}^{k} j^2 \alpha_j = 2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j.$$

Устойчивость схемы (2.2) обеспечивается следующим условием [27, с. 414].

Условие 4. Многочлен $\rho(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_j x^j$ не имеет корней вне замкнутого единичного круга. Все корни многочлена $\rho(x)$, лежащие на единичной окружности, являются простыми за исключением двукратного корня, равного 1.

В [3] это условие было записано в следующем виде.

Условие 4а. Многочлен $\widetilde{\rho}(x) = \det \sum\limits_{j=1}^{k} x^j A_j$ не имеет корней вне замкнутого единичного круга. Корни многочлена $\widetilde{\rho}(x)$, лежащие на единичной окружности, не более чем двукратны, и для каждого двукратного корня x, лежащего на единичной окружности, $\sum\limits_{j=1}^{k} x^j A_j$ существует нулевая матрица. Здесь

$$A_j = \frac{\widetilde{\alpha}_j}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-2, \quad A_{k-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{k-1} - 1 & -\widetilde{\alpha}_{k-1} - 1 \\ -\widetilde{\alpha}_{k-1} - 1 & \widetilde{\alpha}_{k-1} - 1 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\alpha}_j = -\sum_{\nu=0}^{j-1} \alpha_\nu, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1.$$

Покажем, что при выполненном условии 3 условия 4 и 4а эквивалентны. Имеем

$$\sum_{j=1}^{k} x^j A_j = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} P(x) - x^{k-2} + 2x^{k-1} & -P(x) - x^{k-2} \\ -P(x) - x^{k-2} & P(x) - x^{k-2} + 2x^{k-1} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где $P(x) = \widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\alpha}_2 x + \ldots + \widetilde{\alpha}_{k-1} x^{k-2}$. Путем несложных преобразований получаем

$$\widetilde{\rho}(x) = \det \sum_{j=1}^{k} x^j A_j = x^k (x-1)\bigl(P(x) + x^{k-1}\bigr) = x^k (x-1)\bigl(\widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\alpha}_2 x + \ldots + \widetilde{\alpha}_{k-1} x^{k-2} + x^{k-1}\bigr) =$$
$$= x^k \Bigl(-\widetilde{\alpha}_1 + \bigl(\widetilde{\alpha}_1 - \widetilde{\alpha}_2\bigr)x + \ldots + \bigl(\widetilde{\alpha}_{k-2} - \widetilde{\alpha}_{k-1}\bigr)x^{k-2} + \bigl(\widetilde{\alpha}_{k-1} - 1\bigr)x^{k-1} + x^k\Bigr).$$

Здесь $\widetilde{\alpha}_1 = -\alpha_0$, $\widetilde{\alpha}_j - \widetilde{\alpha}_{j+1} = \alpha_j$, $1 \leqslant j \leqslant k-2$. Кроме того, в силу (2.4) выполнено равенство

$$\widetilde{\alpha}_{k-1} = -\sum_{\nu=0}^{k-2} \alpha_\nu = \alpha_{k-1} + \alpha_k = \alpha_{k-1} + 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(x) &= x^k(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \alpha_{k-1}x^{k-1} + x^k) = x^k \rho(x), \\ \rho(x) &= \frac{\widetilde{\rho}(x)}{x^k} = (x-1)(P(x) + x^{k-1}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Мы видим, что корни многочленов $\rho(x)$ и $\widetilde{\rho}(x)$ совпадают и имеют одинаковые кратности за исключением корня $x = 0$. В частности, все корни этих многочленов, лежащие на единичной окружности, совпадают и имеют одинаковые кратности.

Покажем, что в соответствии с условием 4 корень $x = 1$ всегда не менее чем двукратный. Имеем

$$P(1) = \widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\alpha}_2 + \ldots + \widetilde{\alpha}_{k-1} = -(k-1)\alpha_0 - (k-2)\alpha_1 - \ldots - \alpha_{k-2} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j - (k-1)\sum_{j=0}^{k} \alpha_j - \alpha_k = 0 - (k-1)\cdot 0 - 1 = -1$$

в силу (2.4) и $\alpha_k = 1$. Мы видим, что $P(1) + 1 = 0$, и поэтому $x = 1$ есть корень многочлена $P(x) + x^{k-1}$. Теперь из (2.7) следует, что $x = 1$ есть не менее чем двукратный корень для многочленов $\rho(x)$ и $\widetilde{\rho}(x)$.

Для доказательства эквивалентности условий 4 и 4a осталось убедиться, что равенство $\sum\limits_{j=1}^{k} x^j A_j = O$, где O — нулевая матрица, выполнено для $x = 1$ и не выполнено ни для какого другого корня x на единичной окружности.

Согласно (2.6), $\sum\limits_{j=1}^{k} x^j A_j = O$ справедливо тогда и только тогда, когда $\begin{pmatrix} P(x) = x^{k-2} - 2x^{k-1} \\ P(x) = -x^{k-2} \end{pmatrix}$.

Элементарно устанавливается, что эти два равенства могут одновременно иметь место только для одного значения x на единичной окружности, а именно для $x = 1$. В то же время, при $x = 1$ они справедливы, поскольку $P(1) = -1$. Эквивалентность условий 4 и 4a установлена. Поэтому ниже при ссылке на утверждения из [3], в которых требуется выполнение условий 3 и 4a, мы будем заменять условие 4a на условие 4.

Для использования разностной схемы (2.2) требуется задать начальные данные $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Выберем их в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{gathered} v_j(\lambda) = \widetilde{v}_j\bigl(\lambda(\Delta t)^2\bigr), \quad \widetilde{v}_j(z) = \frac{a_j^0 + a_j^1 z + \ldots + a_j^l z^l}{(1+z)^l}, \\ a_j^\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \frac{l!\, j^{2s}}{(2s)!(\nu-s)!(l-\nu+s)!}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant l, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1; \quad v_0(\lambda) \equiv 1. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь $l = [m/2]$, величина m определена в условии 3, квадратные скобки обозначают целую часть числа.

В [3] доказаны утверждения о функциях $\bigl(v_n(\lambda)\bigr)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, определяемых схемой (2.2)–(2.8).

Лемма 2.1. *При выполнении условий 2–4 для погрешности схемы (2.2)–(2.8) справедлива оценка* $\Bigl|v_n - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t_n\Bigr| \leqslant C_1 e^{Tw\sqrt{|\lambda|}} \Bigl(|\lambda|^{m+1/2}(\Delta t)^m e^{(T+k\Delta t)\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} + |\lambda|^{l+1/2}(\Delta t)^{2l+1}\Bigr)$, $k \leqslant n \leqslant N$, *при таких λ и Δt, что величина $\sqrt{|\lambda|}\Delta t$ достаточно мала.*

Лемма 2.2. *При выполнении условий 2–4 для решения разностного уравнения (2.2)–(2.8) справедлива оценка* $\bigl|v_n(\lambda)\bigr| \leqslant C_2 e^{w\sqrt{|\lambda|}t_n}$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\widetilde{O}(\Delta t)$.

Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ — неотрицательные константы, не зависящие от n, λ, Δt (при этом они могут зависеть от используемой разностной схемы (1.2) или от решения $x(t)$ задачи (1.1)). Под $\sqrt{\lambda}$ понимается непрерывная ветвь квадратного корня, определенная равенством $\sqrt{1} = 1$ на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Показатель w определен в [3] и зависит только от коэффициентов схемы (2.2). Наконец, область $\widetilde{O}(\Delta t)$ определяется следующим образом. Вначале в соответствии с [3] введем область $\widetilde{\mathcal{O}} = \Big\{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |1 - \beta_k z| < \varepsilon_0 |\beta_k|\Big\} \cup \Big\{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |z+1| < \varepsilon_0\Big\}$ с достаточно малым $\varepsilon_0 > 0$. Затем положим $\widetilde{O}(\Delta t) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, \lambda(\Delta t)^2 \in \widetilde{\mathcal{O}}\Big\}$.

Леммы 2.1 и 2.2 использовались в [3] для изучения сходимости абстрактной разностной схемы (1.2) к решению задачи (1.1). Установим связь между решениями разностных уравнений (1.2) и (2.2). Для этого потребуем выполнения следующего условия.

Условие 5. Начальные элементы схемы (1.2) имеют вид $x_j = v_j(A)f$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, причем функции $v_j(\lambda)$ определены формулой (2.8) с $l = [m/2]$, где m — порядок аппроксимации разностного уравнения (2.2), соответствующего схеме (1.2).

Запись $v_j(A)$ в условии 5 понимается в смысле исчисления замкнутых операторов (см. [28, гл. 7]). Это означает, что, если линейный оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ замкнут и его резольвентное множество $\rho(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \backslash \sigma(\mathcal{A})$ непусто, функция $\Phi(\lambda)$ аналитична на бесконечности и в окрестности спектра $\sigma(\mathcal{A})$, то определен ограниченный оператор

$$\Phi(\mathcal{A}) = \Phi(\infty)E + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \Phi(\lambda) R(\lambda, \mathcal{A})\, d\lambda, \tag{2.9}$$

где $\widetilde{\Gamma}$ — контур, охватывающий $\sigma(\mathcal{A})$ и бесконечно удаленную точку, но не охватывающий особые точки функции $\Phi(\lambda)$. В частности, если $\Phi(\lambda) \equiv 1$, то $\Phi(A) = E$. Если $\Phi(\lambda) = P_n(\lambda)/Q_m(\lambda)$, где P_n, Q_m — многочлены степеней n и m соответственно, $n \leqslant m$, то $\Phi(A) = P_n(A)Q_m(A)^{-1}$ [28, с. 643].

Следующая лемма из [3] устанавливает связь между решениями (1.2) и (2.2).

Лемма 2.3. *Пусть задача* (1.1) *и схема* (1.2) *удовлетворяют условиям* 1, 2, 5. *Пусть* x_n, $0 \leqslant n \leqslant N$, *— решение схемы* (1.2), *а* $v_n(\lambda)$, $0 \leqslant n \leqslant N$, *— решение соответствующего разностного уравнения* (2.2). *Тогда определены операторы* $v_n(A) \in L(X)$ *и* $x_n = v_n(A)f$, $0 \leqslant n \leqslant N$.

Лемма 2.3 позволяет исследовать сходимость абстрактной схемы (1.2) на основе результатов о сходимости скалярных разностных уравнений (2.2). При этом требуется наложить на искомое решение $x(t)$ задачи (1.1) некоторые априорные условия. Например, в [3] изучались задачи (1.1), для которых справедливо следующее условие продолжимости.

Условие 6а. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1) существует на отрезке $[0, T_1]$, $T_1 > aT$, где a — характеристический показатель применяемой разностной схемы.

Характеристическим показателем мы будем называть любую величину $a \geqslant 1$, для которой выполняется соотношение

$$\big|v_n(\lambda)\big| \leqslant C_3 e^{at_n \mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad \lambda \in \partial K(\varphi_0) \tag{2.10}$$

с некоторой постоянной C_3. Таким образом, данный показатель характеризует разностную схему (2.2) с начальными условиями (2.8) при фиксированном угле секториальности φ_0 оператора A. Очевидно, если a_0 — характеристический показатель, то и любое значение $a > a_0$ так же будет характеристическим показателем. В силу леммы 2.2 величина $a = \max\left\{\dfrac{w}{\cos(\varphi_0/2)}, 1\right\}$ является характеристическим показателем, не обязательно наименьшим. Ниже в лемме 3.2 приведен пример схем с показателем $a = 1$. Отметим, что данное здесь определение характеристического показателя отличается от приведенного в [3] и аналогично используемому в [7] для схем первого порядка.

При условии 6а справедлива следующая теорема о скорости сходимости схемы (1.2) решения задачи (1.1) в условиях точных входных данных, см. [3].

Теорема 2.1. *При выполнении условий* 1–5, 6а *имеет место оценка скорости сходимости разностной схемы* (1.2):

$$\big\|x_n - x(t_n)\big\| \leqslant C_4 (\Delta t)^{mq_0}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad q_0 \in \left(0, \frac{T_1 - aT}{M + (T_1 - aT)}\right), \quad C_4 = C_4(q_0), \tag{2.11}$$

где $M = T\big(w/\cos(\varphi_0/2) + 2\big)$.

В [3] изучен также практически важный случай, когда вместо точного элемента f в задаче (1.1) задано его приближение $f_\delta \in X$ с известным уровнем погрешности $\delta > 0$, так что $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. В этом случае тоже можно применять схемы (1.2) для аппроксимации решения задачи (1.1). Вместо условия 5 при этом следует использовать условие 5а.

Условие 5а. Начальные элементы схемы (1.2) имеют вид $x_0 = f_\delta$, $x_j = v_j(A)f_\delta$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, причем функции $v_j(\lambda)$ определены формулой (2.8) с $l = [m/2]$.

Тогда из леммы 2.3 следует, что $x_n = v_n(A)f_\delta$, $0 \leqslant n \leqslant N$.

В случае приближенно заданного элемента f количество N отрезков дробления в (1.2) следует выбирать в зависимости от δ. Чтобы описать эту зависимость и получить соответствующую оценку погрешности схемы (1.2), необходимы некоторые дополнительные построения. Следуя [3], обозначим через $\mathcal{G}_1$ проходимый в отрицательном направлении замкнутый контур на комплексной плоскости, состоящий из четырех окружностей O_1, O_2, O_3, O_4 с центрами в точках i, $-i$, $\sqrt{1/|\beta_k|}i$, $-\sqrt{1/|\beta_k|}i$ соответственно и радиусом $\sqrt{\varepsilon_0}$, а также из соединяющих эти окружности отрезков мнимой оси, проходимых по два раза в противоположных направлениях. Величина ε_0 введена в лемме 2.2 (см. также [3]). Теперь определим $\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t) = \Big\{\zeta \in \mathbb{C} \,\big|\, \zeta\Delta t \in \mathcal{G}_1\Big\}$. Для этого контура справедливо следующее утверждение [3].

Лемма 2.4. *При выполнении условий* 2–5 *справедлива равномерная по* n, Δt *и* ζ *оценка*

$$\Big|v_n(\zeta^2)\Big| \leqslant C_5 e^{b_1 n}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad \zeta \in \widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)$$

с константой $b_1 = \left(\max\left\{\sqrt{1/|\beta_k|},\, 1\right\} + \varepsilon_0\right) w$ (*см. леммы* 2.1, 2.2).

Ниже мы будем использовать следующую лемму ([3], см. также [6]).

Лемма 2.5. *При выполнении условий* 2–5, *для решений* $v_n(\lambda)$ *схемы* (1.2) *справедлива оценка, равномерная по* N *и* $0 \leqslant n \leqslant N$: $\big|v_n(\infty)\big| \leqslant C_6 e^{b_2 n}$ *с некоторой константой* $b_2 > 0$.

Используя представление $x_n = v_n(A)f_\delta$, вытекающее из леммы 2.3, получим оценку для погрешности $\big\|x_n - x(t_n)\big\|$ схемы (1.2):

$$\big\|x_n - x(t_n)\big\| \leqslant \big\|v_n(A)(f_\delta - f)\big\| + \big\|v_n(A)f - x(t_n)\big\| \leqslant \big\|v_n(A)\big\|\delta + \big\|v_n(A)f - x(t_n)\big\|.$$

Второе слагаемое в правой части последнего неравенства оценивается согласно теореме 2.1. Кроме того, в [3] на основе лемм 2.4 и 2.5 установлена оценка $\|v_n(A)\| \leqslant C_7 e^{bN}$, где $b = \max\{b_1, b_2\}$. Отсюда

$$\big\|x_n - x(t_n)\big\| \leqslant C_7 \delta e^{bN} + C_4(\Delta t)^q, \tag{2.12}$$

где $q = mq_0$. Положим здесь

$$N(\delta) = \left[\frac{1}{\varkappa b}\,\ln\frac{1}{\delta}\right] \tag{2.13}$$

с произвольным фиксированным $\varkappa > 1$. Мы приходим к следующей теореме [3, 6].

Теорема 2.2. *Пусть вместо элемента* $x(0) = f$ *в задаче* (1.1) *дано его приближение* f_δ *с известным уровнем погрешности* $\delta > 0$. *Пусть выполнены условия* 1–4, 5а, 6а. *При выборе количества* $N = N(\delta)$ *отрезков дробления в схеме* (1.2) *согласно* (2.13) *справедлива следующая оценка погрешности приближенного решения:*

$$\big\|x_n - x(t_n)\big\| \leqslant C_8 \ln^{-mq_0}\frac{1}{\delta}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad q_0 \in \left(0, \frac{T_1 - aT}{M + (T_1 - aT)}\right), \quad C_8 = C_8(q_0, \varkappa).$$

В следующем разделе будут установлены оценки скорости сходимости и погрешности одного класса схем вида (1.2) в предположении, что вместо условия 6а справедливо более слабое условие истокопредставимости.

3. Оценки скорости сходимости и погрешности двушаговых абстрактных разностных схем при условии истокопредставимости. Утверждения теорем 2.1 и 2.2 справедливы для схем (1.2), коэффициенты которых удовлетворяют условиям 2–4. Будем называть такие схемы допустимыми. В [3] введено обозначение $R^{(k_0,m_0)}$ для класса допустимых разностных схем порядка $k = k_0$ с порядком аппроксимации $m = m_0$. В данном разделе нас будут интересовать схемы класса $R^{(2,2)}$, описываемого следующим образом:

$$R^{(2,2)}: \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_0 = -\beta, \quad \beta_1 = 1 + 2\beta, \quad \beta_2 = -\beta \quad (\beta > 0). \tag{3.1}$$

Для схем этого класса при условии точных входных данных f в формулах (2.8) имеем

$$v_0(\lambda) \equiv 1, \quad v_1(\lambda) = \frac{1 + \dfrac{3}{2}\,\lambda(\Delta t)^2}{1 + \lambda(\Delta t)^2}\,. \tag{3.2}$$

Поэтому в соответствии с условием 5 для этих схем следует выбирать начальные элементы

$$x_0 = f, \quad x_1 = \left(E + \frac{3}{2}\,(\Delta t)^2 A\right)\big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} f = \frac{3}{2}\,f - \frac{1}{2}\big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} f. \tag{3.3}$$

Исследуем сходимость схем (1.2)–(3.3), предполагая, что вместо условия 6а искомое решение $x(t)$ удовлетворяет следующему менее ограничительному требованию.

Условие 6. Элемент $x(T)$ допускает истокообразное представление $x(T) = A^{-p}w$ с некоторыми $p \geqslant 1$, $w \in X$.

Отметим, что в силу определения классического решения условие 6 со значением $p = 1$ выполнено всегда.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется выразить элемент f через $x(T)$. Мы будем неоднократно использовать операцию возведения оператора в дробную степень; соответствующая теория изложена в [1, гл. 1; 29, гл. 3].

Следуя [1, гл. 3], введем функции $z(t) = \dfrac{1}{2}\big(x(t) - A^{-1/2}\dot{x}(t)\big)$ и $w(t) = \dfrac{1}{2}\big(x(t) + A^{-1/2}\dot{x}(t)\big)$. Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\dot{z}(t) = -A^{1/2}z(t), \quad \dot{w}(t) = A^{1/2}w(t), \quad t \in [0, T].$$

Оператор $-A^{1/2}$ является генератором аналитической полугруппы, которую мы будем обозначать через $V(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= z(t) + w(t) = V(t)z(0) + V(T-t)w(T), \quad t \in [0, T]; \\ \dot{x}(t) &= \dot{z}(t) + \dot{w}(t) = -A^{1/2}z(t) + A^{1/2}w(t) = -A^{1/2}V(t)z(0) + A^{1/2}V(T-t)w(T), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В частности, $\dot{x}(0) = -A^{1/2}z(0) + A^{1/2}V(T)w(T)$. Согласно (1.1), $\dot{x}(0) = 0$. С учетом обратимости оператора $A^{1/2}$ отсюда следует, что

$$z(0) = V(T)w(T). \tag{3.5}$$

Далее, подставим $t = T$ в (3.4):

$$V(T)z(0) + w(T) = x(T). \tag{3.6}$$

Комбинируя (3.5) и (3.6), получаем

$$w(T) = \big(E + V(2T)\big)^{-1}x(T), \quad z(0) = \big(E + V(2T)\big)^{-1}V(T)x(T). \tag{3.7}$$

Здесь оператор $\big(E + V(2T)\big)^{-1}$ перестановочен с оператором $V(t)$ при любом $t \geqslant 0$. Подставляя равенства (3.7) в (3.4), приходим к следующему представлению для решения $x(t)$ задачи (3.4):

$$x(t) = \big(E + V(2T)\big)^{-1}\big(V(T+t) + V(T-t)\big)x(T), \quad t \in [0, T]. \tag{3.8}$$

В частности, при $t = 0$ получаем

$$f = 2\big(E + V(2T)\big)^{-1}V(T)x(T). \tag{3.9}$$

Комбинируя утверждение леммы 2.3, равенство (3.9) и условие 6, приходим к равенству

$$\begin{aligned} x_N - x(T) &= v_N(A)f - x(T) = \\ &= 2\big(E + V(2T)\big)^{-1}\left(v_N(A)V(T)A^{-p}w - \frac{1}{2}\big(E + V(2T)\big)A^{-p}w\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Получение интегрального представления для элемента $v_N(A)V(T)A^{-p}w - \dfrac{1}{2}\big(E + V(2T)\big)A^{-p}w$ в правой части (3.10) является следующим шагом. Это представление требуется для построения оценок скорости сходимости исследуемых разностных схем. Для этой цели, наряду с исчислением замкнутых операторов, нам понадобится исчисление секториальных операторов в банаховом пространстве [1, гл. 1; 29, гл. 2]. Если оператор $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ удовлетворяет условию 1, функция $F(\zeta)$ аналитична в секторе $K(\varphi_0+\varepsilon)$ с некоторым $\varepsilon > 0$ и убывает на бесконечности быстрее некоторой отрицательной степени $|\zeta|$ равномерно по $\arg\zeta$ в этом секторе, то формула $F(\mathcal{A}) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma(\varphi_0,r_0)} F(\zeta)R(\zeta,\mathcal{A})\,d\zeta$ определяет оператор $F(\mathcal{A}) \in L(X)$. Здесь $\Gamma(\varphi_0,r_0)$ — граница множества $K(\varphi_0)\backslash S(r_0)$, проходимая в направлении убывания мнимой части, $S(r_0)$ — круг с центром в начале координат и достаточно малым радиусом r_0. В частности, справедливо $G(A) = A^{-p}$ для $G(\zeta) = \zeta^{-p}$, $p > 0$. Если $U(t)$ — аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-A$, то $U(t) = F_t(A)$, где $F_t(\zeta) = e^{-\zeta t}$. Кроме того, если определены функции $F(\mathcal{A})$, $G(\mathcal{A})$ от оператора $\mathcal{A}$, то выполняется равенство $F(\mathcal{A})G(\mathcal{A}) = (FG)(\mathcal{A}) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma(\varphi_0,r_0)} F(\zeta)G(\zeta)R(\zeta,\mathcal{A})\,d\zeta$.

Отметим, что функция от оператора может быть определена в одном из вышеописанных исчислений (замкнутых или секториальных операторов) и не определена в другом. Однако если функцию от оператора можно определить обоими способами, то получающиеся операторы совпадают [29, с. 34].

Из того, что оператор A секториален с углом φ_0, следует секториальность оператора $A^{1/2}$ с углом секториальности $\varphi_0/2$ [29, с. 63]. Оператор A^{-p} есть функция $F(\zeta) = \zeta^{-2p}$ от оператора $A^{1/2}$; оператор $V(T)$ есть функция $F_T(\zeta) = e^{-\zeta T}$ от оператора $A^{1/2}$. В силу сказанного, элементы $A^{-p}w$ и $V(T)A^{-p}w$ в правой части (3.10) допускают представления

$$\begin{aligned} A^{-p}w &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widehat{\Gamma}} \zeta^{-2p}R\big(\zeta, A^{1/2}\big)w\,d\zeta,\\ V(T)A^{-p}w &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widehat{\Gamma}} e^{-\zeta T}\zeta^{-2p}R\big(\zeta, A^{1/2}\big)w\,d\zeta. \end{aligned}$$

Здесь $\widehat{\Gamma} = \Gamma(\varphi_0/2, r_0)$ с достаточно малым $r_0 > 0$. Обозначив $-\widehat{\Gamma} = \Big\{-\zeta \,\big|\, \zeta \in \widehat{\Gamma}\Big\}$ и используя равенство $R\big(-\zeta, A^{1/2}\big) = -R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)$, получаем

$$A^{-p}w = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\widehat{\Gamma}} (-\zeta)^{-2p}R(\zeta, -A^{1/2})w d\zeta, \tag{3.11}$$

$$V(T)A^{-p}w = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\widehat{\Gamma}} e^{\zeta T}(-\zeta)^{-2p}R(\zeta, -A^{1/2})w d\zeta. \tag{3.12}$$

Аналогично,

$$V(2T)A^{-p}w = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\widehat{\Gamma}} e^{2\zeta T}(-\zeta)^{-2p}R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)w\,d\zeta. \tag{3.13}$$

Здесь и далее в выражениях типа $(-\zeta)^{-2p}$ имеется в виду главное значение степенной функции.

В силу свойств дробных степеней операторов и того, что $v_N(\lambda)$ есть дробно-рациональная функция, оператор $v_N(A)$ является функцией $v_N\big(\zeta^2\big)$ от оператора $A^{1/2}$ в смысле исчисления замкнутых операторов. Покажем, что в соответствующем интегральном представлении (2.9) в качестве $\widetilde{\Gamma}$ можно использовать построенный в разделе 2 контур $\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)$. Из (2.3) и (2.8) видно, что функция $v_N(\lambda)$ имеет особые точки $-(\Delta t)^{-2}$ и $\beta_k^{-1}(\Delta t)^{-2}$. Обе эти точки — отрицательные вещественные, так как $\beta_k < 0$ в силу условия 2. Следовательно, функция $v_N(\zeta^2)$ аргумента ζ имеет особые точки $\pm(\Delta t)^{-1}i$, $\pm\sqrt{1/|\beta_k|}(\Delta t)^{-1}i$. Заметим, что контур $\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)$ лежит вне сектора $K(\varphi_0/2)$ и при этом проходится в отрицательном направлении. Это значит, что он охватывает бесконечно удаленную точку и спектр оператора $A^{1/2}$, но не охватывает особые точки функции $v_N\big(\zeta^2\big)$, что и требуется в определении функции от оператора. Поэтому имеет место представление

$$\begin{aligned} v_N(A) &= v_N(\infty)E + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)} v_N\big(\zeta^2\big)R\big(\zeta, A^{1/2}\big)\,d\zeta =\\ &= v_N(\infty)E + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)} v_N\big(\zeta^2\big)R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)\,d\zeta. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь использовано, что $-\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t) = \widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)$ и $R\big(-\zeta, A^{1/2}\big) = -R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)$. Комбинируя (3.12) и (3.14) и применяя тождество

$$R\big(\eta, -A^{1/2}\big)R\big(\zeta, -A^{1/2}\big) = \frac{R\big(\zeta, -A^{1/2}\big) - R\big(\eta, -A^{1/2}\big)}{\eta - \zeta},$$

по аналогии с [6] получаем:

$$\begin{aligned} v_N(A)V(T)A^{-p}w = \frac{v_N(\infty)}{2\pi i}\int\limits_{-\widehat{\Gamma}} e^{\zeta T}(-\zeta)^{-2p}R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)w\,d\zeta\, + \\ + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{-\widehat{\Gamma}}\left(\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)}\frac{v_N\big(\eta^2\big)\,d\eta}{\eta - \zeta}\right)e^{\zeta T}(-\zeta)^{-2p}R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)w\,d\zeta\, - \\ - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)}\left(\int\limits_{-\widehat{\Gamma}}\frac{e^{\zeta T}(-\zeta)^{-2p}\,d\zeta}{\eta - \zeta}\right)v_N\big(\eta^2\big)R\big(\eta, -A^{1/2}\big)w\,d\eta. \end{aligned} \qquad (3.15)$$

В силу теоремы Коши,

$$\forall\zeta \in -\widehat{\Gamma},\quad \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)}\frac{v_N\big(\eta^2\big)\,d\eta}{\eta - \zeta} = 2\pi i\Big(v_N\big(\zeta^2\big) - v_N(\infty)\Big);\quad \forall\eta \in \widetilde{\Gamma}_1(\Delta t),\quad \int\limits_{-\widehat{\Gamma}}\frac{e^{\zeta T}(-\zeta)^{-2p}\,d\zeta}{\eta - \zeta} = 0.$$

Подставляя эти равенства в (3.15), получаем

$$v_N(A)V(T)A^{-p}w = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\widehat{\Gamma}} v_N\big(\zeta^2\big)e^{\zeta T}(-\zeta)^{-2p}R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)w\,d\zeta. \qquad (3.16)$$

Комбинируя последнее равенство с (3.11) и (3.13), приходим к следующему представлению для элемента $v_N(A)V(T)A^{-p}w - \frac{1}{2}\big(E + V(2T)\big)A^{-p}w$ в правой части (3.10):

$$v_N(A)V(T)A^{-p}w - \frac{1}{2}\big(E + V(2T)\big)A^{-p}w = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\widehat{\Gamma}}\Big(v_N\big(\zeta^2\big) - \mathrm{ch}\zeta T\Big)e^{\zeta T}(-\zeta)^{-2p}R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)w\,d\zeta. \qquad (3.17)$$

Отметим теперь, что $R\big(\zeta, -A^{1/2}\big) = \big(\zeta E + A^{1/2}\big)^{-1}$ есть функция $r_\zeta(\lambda) = \Big(\zeta + \sqrt{\lambda}\Big)^{-1}$ от оператора A в смысле исчисления секториальных операторов, поэтому

$$R\big(\zeta, -A^{1/2}\big) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\varphi_0, r_0)}\frac{R(\lambda, A)}{\zeta + \sqrt{\lambda}}\,d\lambda.$$

Подставим это равенство в (3.17) и поменяем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} v_N(A)V(T)A^{-p}w - \frac{1}{2}\big(E + V(2T)\big)A^{-p}w = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\varphi_0, r_0)}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\widehat{\Gamma}}\frac{\Big(v_N\big(\zeta^2\big) - \mathrm{ch}\zeta T\Big)e^{\zeta T}(-\zeta)^{-2p}}{\zeta + \sqrt{\lambda}}\,d\zeta\right)R(\lambda, A)w\,d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\varphi_0, r_0)}\Big(v_N(\lambda) - \mathrm{ch}\sqrt{\lambda}T\Big)\,e^{-\sqrt{\lambda}T}\lambda^{-p}R(\lambda, A)w\,d\lambda. \end{aligned}$$

Мы получили интегральное представление для элемента $v_N(A)V(T)A^{-p}w - \frac{1}{2}\big(E + V(2T)\big)A^{-p}w$. Подставим его в (3.10) и, используя ограниченность оператора $\big(E + V(2T)\big)^{-1}$ и условие 1, запишем оценку

$$\big\|x_N - x(T)\big\| \leqslant C_9\int\limits_{\Gamma(\varphi_0, r_0)}\frac{\Big|v_N(\lambda) - \mathrm{ch}\sqrt{\lambda}T\Big|\,e^{-T\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}}{|\lambda|^p\big(1 + |\lambda|\big)}\,|d\lambda|.$$

Разобьем контур интегрирования на три части

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1(\varphi_0, r_0) &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, |\lambda| \geqslant r_0, \arg\lambda = \varphi_0\Big\},\\
\Gamma_2(\varphi_0, r_0) &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, |\lambda| = r_0, |\arg\lambda| < \varphi_0\Big\},\\
\Gamma_3(\varphi_0, r_0) &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, |\lambda| \geqslant r_0, \arg\lambda = -\varphi_0\Big\}.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\big\|x_N - x(T)\big\| \leqslant C_9 \Bigg(&\int\limits_{\Gamma_1(\varphi_0,r_0)} \frac{\Big|v_N(\lambda) - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T\Big|\, e^{-T\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}}{|\lambda|^p\big(1+|\lambda|\big)}\, |d\lambda| + \\
&+ \int\limits_{\Gamma_2(\varphi_0,r_0)} \frac{\Big|v_N(\lambda) - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T\Big|\, e^{-T\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}}{|\lambda|^p\big(1+|\lambda|\big)}\, |d\lambda| + \int\limits_{\Gamma_3(\varphi_0,r_0)} \frac{\Big|v_N(\lambda) - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T\Big|\, e^{-T\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}}{|\lambda|^p\big(1+|\lambda|\big)}\, |d\lambda| \Bigg).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Оценим вначале интеграл по контуру $\Gamma_2(\varphi_0, r_0)$. Воспользуемся утверждением леммы 2.1. Изучаемые в настоящем разделе схемы (1.2)–(3.1) имеют порядок аппроксимации $m = 2$. Для $\lambda \in \Gamma_2(\varphi_0, r_0)$ имеем $|\lambda| = r_0$, так что при достаточно малом шаге Δt величина $\sqrt{|\lambda|}\Delta t = r_0\Delta t$ тоже будет принимать сколь угодно малые значения. Поэтому для $\lambda \in \Gamma_2(\varphi_0, r_0)$ справедливо $\Big|v_N(\lambda) - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T\Big| \leqslant C_{10}(\Delta t)^2$.

Отсюда следует интересующая нас оценка для интеграла:

$$
\int\limits_{\Gamma_2(\varphi_0,r_0)} \frac{\Big|v_N(\lambda) - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T\Big|\, e^{-T\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}}{|\lambda|^p\big(1+|\lambda|\big)}\, |d\lambda| \leqslant C_{11}(\Delta t)^2. \tag{3.19}
$$

Для оценки оставшихся двух интегралов в (3.18) нам понадобится явная формула для решения $v_n(\lambda)$ рекуррентного уравнения (2.3) с коэффициентами (3.1) и начальными условиями (3.2):

$$
v_n(\lambda) = \frac{1}{2}\,\widetilde{X}^n\big(\lambda(\Delta t)^2\big) + \frac{1}{2}\,\widetilde{Y}^n\big(\lambda(\Delta t)^2\big) + \frac{1}{2}\,\widetilde{M}\big(\lambda(\Delta t)^2\big)\Big(\widetilde{X}^n\big(\lambda(\Delta t)^2\big) - \widetilde{Y}^n\big(\lambda(\Delta t)^2\big)\Big); \tag{3.20}
$$

в частности,

$$
v_N(\lambda) = \frac{1}{2}\,\widetilde{X}^{T/\Delta t}\big(\lambda(\Delta t)^2\big) + \frac{1}{2}\,\widetilde{Y}^{T/\Delta t}\big(\lambda(\Delta t)^2\big) + \frac{1}{2}\,\widetilde{M}\big(\lambda(\Delta t)^2\big)\Big(\widetilde{X}^{T/\Delta t}\big(\lambda(\Delta t)^2\big) - \widetilde{Y}^{T/\Delta t}\big(\lambda(\Delta t)^2\big)\Big).
$$

Здесь
$$
\begin{cases}
\widetilde{M}(z) = \dfrac{(\beta-1)z^2}{(1+z)\sqrt{z\big(4+(1+4\beta)z\big)}}\,,\\[2ex]
\widetilde{X}(z) = \dfrac{2+(1+2\beta)z+\sqrt{z\big(4+(1+4\beta)z\big)}}{2(1+\beta z)}\,,\\[2ex]
\widetilde{Y}(z) = \dfrac{2+(1+2\beta)z-\sqrt{z\big(4+(1+4\beta)z\big)}}{2(1+\beta z)}\,.
\end{cases}
$$

Приступим к оцениванию первого интеграла в (3.18):

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\Gamma_1(\varphi_0,r_0)} \frac{\left|v_N(\lambda)-\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T\right| e^{-T\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}}{|\lambda|^p\bigl(1+|\lambda|\bigr)}\,|d\lambda| = \\
= \frac{1}{2}\int\limits_{r_0}^{+\infty}\Bigl|\Bigl(1+\widetilde{M}\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr)\Bigr)\widetilde{X}^{T/\Delta t}\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr)e^{-T\sqrt{\rho}e^{i\varphi_0/2}}+ \\
+\Bigl(1-\widetilde{M}\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr)\Bigr)\widetilde{Y}^{T/\Delta t}\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr)e^{-T\sqrt{\rho}e^{i\varphi_0/2}}-e^{-2T\sqrt{\rho}e^{i\varphi_0/2}}-1\Bigr|\,\frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)}\leqslant \\
\leqslant\frac{1}{2}\left(\int\limits_{r_0}^{(\Delta t)^{-4/3}}\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}+\int\limits_{(\Delta t)^{-4/3}}^{+\infty}\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}+\right. \\
+\int\limits_{r_0}^{(\Delta t)^{-4/3}}\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}\right|\left|e^{\widehat{Z}(\rho)-\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}+\int\limits_{(\Delta t)^{-4/3}}^{+\infty}\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}\right|\left|e^{\widehat{Z}(\rho)-\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}+ \\
+\int\limits_{r_0}^{(\Delta t)^{-2}}\left|\widetilde{M}\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr)\right|\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}\right|\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)-\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}+ \\
\left.+\int\limits_{(\Delta t)^{-2}}^{+\infty}\left|\widetilde{M}\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr)\right|\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}\right|\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)-\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}\right).
\end{gathered}
\tag{3.21}
$$

Здесь
$$
\begin{cases}
\widehat{X}(\rho,\Delta t)=\dfrac{T}{\Delta t}\,g_1\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr),\quad \widehat{Y}(\rho,\Delta t)=\dfrac{T}{\Delta t}\,g_2\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr),\\[2mm]
\widehat{Z}(\rho)=-2T\sqrt{\rho}e^{i\varphi_0/2}=\dfrac{T}{\Delta t}\,g_3\bigl(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\bigr),\quad g_1(z)=\ln\dfrac{2+(1+2\beta)z+\sqrt{z\bigl(4+(1+4\beta)z\bigr)}}{2(1+\beta z)}-\sqrt{z},\\[2mm]
g_2(z)=\ln\dfrac{2+(1+2\beta)z-\sqrt{z\bigl(4+(1+4\beta)z\bigr)}}{2(1+\beta z)}-\sqrt{z},\quad g_3(z)=-2\sqrt{z}.
\end{cases}
$$

Элементарно устанавливается, что

$$
g_1(z)\equiv g_3(z)-g_2(z)=\left(-\frac{1}{24}-\frac{\beta}{2}\right)z^{3/2}+O\bigl(z^2\bigr),\quad z\to 0. \tag{3.22}
$$

Пусть также $h_j(x)=\operatorname{Re}g_j\bigl(xe^{i\varphi_0}\bigr)$, $j=1,2,3$, так что

$$
\operatorname{Re}\widehat{X}(\rho,\Delta t)=\frac{T}{\Delta t}\,h_1\bigl(\rho(\Delta t)^2\bigr),\quad \operatorname{Re}\widehat{Y}(\rho,\Delta t)=\frac{T}{\Delta t}\,h_2(\rho(\Delta t)^2),\quad \operatorname{Re}\widehat{Z}(\rho,\Delta t)=\frac{T}{\Delta t}\,h_3\bigl(\rho(\Delta t)^2\bigr). \tag{3.23}
$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
h_1(x)&=\ln\left|\frac{2+(1+2\beta)xe^{i\varphi_0}+\sqrt{xe^{i\varphi_0}\bigl(4+(1+4\beta)xe^{i\varphi_0}\bigr)}}{2\bigl(1+\beta xe^{i\varphi_0}\bigr)}\right|-\sqrt{x}\cos\frac{\varphi_0}{2}=L_{\varphi_0}(x)-\sqrt{x}\cos\frac{\varphi_0}{2},\\
h_2(x)&=\ln\left|\frac{2+(1+2\beta)xe^{i\varphi_0}-\sqrt{xe^{i\varphi_0}\bigl(4+(1+4\beta)xe^{i\varphi_0}\bigr)}}{2\bigl(1+\beta xe^{i\varphi_0}\bigr)}\right|-\sqrt{x}\cos\frac{\varphi_0}{2},\\
h_3(x)&=-2\sqrt{x}\cos\frac{\varphi_0}{2},\quad h_1(x)=h_3(x)-h_2(x).
\end{aligned}
$$

Нетрудно видеть, что $L_{\varphi_0}(x)$ есть ограниченная функция аргумента $x>0$. Поэтому

$$
h_1(x)<0\quad\forall x>\frac{\Bigl(\sup\limits_{x>0}L_{\varphi_0}(x)\Bigr)^2}{\cos^2(\varphi_0/2)}.
$$

Обозначим через $\Omega(\varphi_0)$ множество таких параметров $\beta > 0$, для которых выполнено

$$h_1(x) < 0 \quad \forall x \in \left(0,\ \frac{\left(\sup\limits_{x>0} L_{\varphi_0}(x)\right)^2}{\cos^2(\varphi_0/2)}\right],$$

следовательно, $h_1(x) < 0$ для всех $x > 0$. Ниже в этом разделе будем предполагать выполненным условие 7.

Условие 7. Параметр β в (3.1) принадлежит множеству $\Omega(\varphi_0)$.

Вычисления в среде Maple 15 позволяют утверждать, что множество $\Omega(\varphi_0)$ непусто при $\varphi_0 \leqslant \pi/3$. Более того, проведенные численные исследования дают основание предположить, что $\Omega(\varphi_0) = (0, +\infty)$ при $\varphi_0 \leqslant \pi/3$, т.е. условию 7 удовлетворяют все схемы класса (3.1). Вместе с тем, из разложения

$$h_1(x) = -x^{3/2}\left(\frac{1}{24} + \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{3\varphi_0}{2} + O\big(x^2\big), \quad x \to 0$$

следует, что при $\varphi_0 > \pi/3$ множество $\Omega(\varphi_0)$ пусто.

Нам понадобится также следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть выполнено условие* 7. *Тогда при любых* $x > 0$ *справедливы неравенства* $h_1(x) < 0$, $h_2(x) - h_1(x) < 0,\ h_2(x) < 0$.

Доказательство. Справедливость первого из этих неравенств утверждается в условии 7. В силу тождества $h_1(x) \equiv h_3(x) - h_2(x)$ второе неравенство можно эквивалентно записать в виде

$$\begin{aligned}
&h_3(x) - 2h_1(x) < 0;\\
&\left|\frac{2 + (1+2\beta)xe^{i\varphi_0} + \sqrt{xe^{i\varphi_0}\big(4 + (1+4\beta)xe^{i\varphi_0}\big)}}{2\big(1+\beta xe^{i\varphi_0}\big)}\right| > 1;\\
&\left|1 + \frac{xe^{i\varphi_0} + \sqrt{xe^{i\varphi_0}\big(4 + (1+4\beta)xe^{i\varphi_0}\big)}}{2(1+\beta xe^{i\varphi_0})}\right| > 1.
\end{aligned}$$

Справедливость последнего неравенства вытекает из включения

$$\arg\frac{xe^{i\varphi_0} + \sqrt{xe^{i\varphi_0}\big(4 + (1+4\beta)xe^{i\varphi_0}\big)}}{2\big(1+\beta xe^{i\varphi_0}\big)} \in (-\varphi_0/2, \varphi_0),$$

устанавливающегося элементарно. Наконец, последнее неравенство $h_2(x) < 0$ в утверждении леммы вытекает из первого и второго неравенств. Лемма доказана.

Перейдем к оцениванию интегралов в правой части неравенства (3.21). Оценим первый из этих интегралов. При $\rho \in \big[r_0, (\Delta t)^{-4/3}\big]$ величина $\rho(\Delta t)^2 e^{i\varphi_0}$ ограничена по модулю, поэтому из (3.22) следует

$$\left|\widehat{X}(\rho, \Delta t)\right| = \frac{T}{\Delta t}\left|g_1\big(\rho(\Delta t)^2 e^{i\varphi_0}\big)\right| \leqslant \frac{C_{12}}{\Delta t}\left|\rho(\Delta t)^2 e^{i\varphi_0}\right|^{3/2} = C_{12}\rho^{3/2}(\Delta t)^2.$$

Последняя величина тоже ограничена, поэтому

$$\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)} - 1\right| \leqslant C_{13}\big|X(\rho, \Delta t)\big| \leqslant C_{14}\rho^{3/2}(\Delta t)^2, \quad \rho \in \big[r_0, (\Delta t)^{-4/3}\big]. \tag{3.24}$$

Отсюда нетрудно получить искомую оценку:

$$\int\limits_{r_0}^{(\Delta t)^{-4/3}} \left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)} - 1\right| \frac{d\rho}{\rho^{p+1}} \leqslant \left\{\begin{array}{cc} C_{15}(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \leqslant p < \dfrac{3}{2} \\ C_{15}(\Delta t)^2 \ln\dfrac{1}{\Delta t}, & p = \dfrac{3}{2} \\ C_{15}(\Delta t)^2, & p > \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}. \tag{3.25}$$

Оценим второй интеграл в правой части (3.21). В силу (3.23) и леммы 3.1 для рассматриваемых схем при любых ρ и Δt справедливо $\operatorname{Re}\widehat{X}(\rho,\Delta t)<0$, так что

$$\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}\right|<1 \tag{3.26}$$

и $\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|<2$. Отсюда получаем

$$\int\limits_{(\Delta t)^{-4/3}}^{+\infty}\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}\leqslant C_{16}(\Delta t)^{4p/3}. \tag{3.27}$$

Оценим третий интеграл в правой части (3.21). Используем (3.22) и (3.24):

$$\widehat{Z}(\rho)-\widehat{Y}(\rho,\Delta t)=\frac{T}{\Delta t}\Big(g_3\big(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\big)-g_2\big(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\big)\Big)=\frac{T}{\Delta t}\,g_1\big(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\big)=\widehat{X}(\rho,\Delta t);$$
$$\left|e^{\widehat{Z}(\rho)-\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}-1\right|=\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|\leqslant C_{17}\rho^{3/2}(\Delta t)^2,\quad \rho\in\big[r_0,(\Delta t)^{-4/3}\big].$$

Далее, в силу (3.23) и леммы 3.1, при любых ρ и Δt справедливо $\operatorname{Re}\widehat{Y}(\rho,\Delta t)<0$ и, значит, $\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}\right|<1$. Теперь легко получить оценку

$$\int\limits_{r_0}^{(\Delta t)^{-4/3}}\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}\right|\left|e^{\widehat{Z}(\rho)-\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}\leqslant\left\{\begin{array}{ll}C_{18}(\Delta t)^{4p/3}, & 1\leqslant p<\dfrac{3}{2}\\ C_{18}(\Delta t)^2\ln\dfrac{1}{\Delta t}, & p=\dfrac{3}{2}\\ C_{18}(\Delta t)^2, & p>\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}. \tag{3.28}$$

Оценим четвертый интеграл в правой части (3.21). Имеем $\left|e^{\widehat{Z}(\rho)-\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}\right|=\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}\right|<1$ для любых ρ и Δt. Аналогично (3.27) получаем

$$\int\limits_{(\Delta t)^{-4/3}}^{+\infty}\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}\right|\left|e^{\widehat{Z}(\rho)-\widehat{Y}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}\leqslant C_{19}(\Delta t)^{4p/3}. \tag{3.29}$$

Оценим пятый интеграл в правой части (3.21). Из (3.23) и леммы 3.1 вытекает

$$\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)-\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|<2. \tag{3.30}$$

Кроме того, легко видеть, что $\widetilde{M}(z)=O\big(z^{3/2}\big)$ при $z\to 0$. При $\rho\in\big[r_0,(\Delta t)^{-2}\big]$ величина $\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}$ ограничена по модулю, поэтому для таких ρ справедливо

$$\left|\widetilde{M}\big(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\big)\right|\leqslant C_{20}\left|\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\right|^{3/2}=C_{20}\rho^{3/2}(\Delta t)^3. \tag{3.31}$$

С применением (3.26), (3.30) и (3.31) получаем искомую оценку:

$$\int\limits_{r_0}^{(\Delta t)^{-2}}\left|\widetilde{M}\big(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\big)\right|\left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}\right|\left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)-\widehat{X}(\rho,\Delta t)}-1\right|\frac{d\rho}{\rho^{p+1}}\leqslant\left\{\begin{array}{ll}C_{21}(\Delta t)^{2p}, & 1\leqslant p<\dfrac{3}{2}\\ C_{21}(\Delta t)^3\ln\dfrac{1}{\Delta t}, & p=\dfrac{3}{2}\\ C_{21}(\Delta t)^3, & p>\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}. \tag{3.32}$$

Наконец, оценим шестой интеграл в правой части (3.21). Для этого заметим, что справедлива равномерная по ρ и Δt оценка

$$\left|\widetilde{M}\big(\rho(\Delta t)^2e^{i\varphi_0}\big)\right|\leqslant C_{22}. \tag{3.33}$$

Комбинируя ее с (3.26) и (3.30), получаем:

$$\int\limits_{(\Delta t)^{-2}}^{+\infty} \left|\widetilde{M}\bigl(\rho(\Delta t)^2 e^{i\varphi_0}\bigr)\right| \left|e^{\widehat{X}(\rho,\Delta t)}\right| \left|e^{\widehat{Y}(\rho,\Delta t)-\widehat{X}(\rho,\Delta t)} - 1\right| \frac{d\rho}{\rho^{p+1}} \leqslant C_{23}(\Delta t)^{2p}. \tag{3.34}$$

Подставим теперь оценки (3.25), (3.27), (3.28), (3.29), (3.32) и (3.34) в (3.21):

$$\int\limits_{\Gamma_1(\varphi_0,r_0)} \frac{\left|v_N(\lambda) - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T\right| e^{-T\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}}}{|\lambda|^p\bigl(1+|\lambda|\bigr)}\,|d\lambda| \leqslant \left\{\begin{matrix} C_{24}(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \leqslant p < \dfrac{3}{2} \\ C_{24}(\Delta t)^2 \ln\dfrac{1}{\Delta t}\,, & p = \dfrac{3}{2} \\ C_{24}(\Delta t)^2, & p > \dfrac{3}{2} \end{matrix}\right\}. \tag{3.35}$$

Тем самым, мы нашли оценки (3.35) и (3.19) для первых двух интегралов в правой части (3.18). Оценка, аналогичная (3.35), справедлива и для третьего из этих интегралов. Комбинируя все полученные оценки, приходим к итоговому соотношению:

$$\bigl\|x_N - x(T)\bigr\| \leqslant \left\{\begin{matrix} C_{25}(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \leqslant p < \dfrac{3}{2} \\ C_{25}(\Delta t)^2 \ln\dfrac{1}{\Delta t}\,, & p = \dfrac{3}{2} \\ C_{25}(\Delta t)^2, & p > \dfrac{3}{2} \end{matrix}\right\}. \tag{3.36}$$

Следуя [7], получим теперь оценку для $\bigl\|x_n - x(n\Delta t)\bigr\|$, равномерную по $0 \leqslant n \leqslant N$. Для $n = 0$ указанная норма равна нулю. При $0 < n < N$ будем рассматривать задачу (1.1) на отрезке $[0, n\Delta t]$. В соответствии с изучаемым методом решения этой задачи, разобьем указанный отрезок на n частей длиной Δt и применим выбранную схему (1.2)–(3.1)–(3.3). При этом все вышеприведенные формулы остаются в силе с заменой N на n, T на $t_n = n\Delta t$ и $w = A^p x(T)$ на $\widetilde{w}_n = A^p x(t_n)$. Согласно (3.8) имеем

$$\widetilde{w}_n = \bigl(E + V(2T)\bigr)^{-1}\bigl(V(T+t_n) + V(T-t_n)\bigr)w.$$

Таким образом, при любом $0 \leqslant n \leqslant N$ для погрешности $\bigl\|x_n - x(t_n)\bigr\|$ справедлива оценка вида (3.36) с константой $C_{25} = C_{25}(n,N)$, причем $C_{25}(N,N)$ не зависит от N. Анализируя предыдущие рассуждения, видим, что $C_{25}(n,N)$ зависит только от $\left\|\bigl(E + V(2t_n)\bigr)^{-1}\right\|$ и от $\|\widetilde{w}_n\|$ (см. использование константы C_9 в (3.18)).

Покажем, что все величины $C_{25}(n,N)$ с любыми N и $0 \leqslant n \leqslant N$ ограничены сверху константой, не зависящей от n, N. Потребуется установить равномерную ограниченность операторов $\bigl(E + V(2t)\bigr)^{-1}$ и $\bigl(E + V(2T)\bigr)^{-1}\bigl(V(T+t) + V(T-t)\bigr)$ по $t \in [0,T]$. Заметим, что $V(2t)$ есть функция $F_1(\zeta) = e^{-\zeta}$ от секториального оператора $2tA^{1/2}$ с углом секториальности $\varphi_0/2$. По теореме об отображении спектра [29, с. 56] спектры всех операторов $V(2t)$ принадлежат образу сектора $K(\varphi_0/2)$ при отображении $e^{-\zeta}$. Легко видеть, что этот образ не пересекается с некоторой окрестностью точки -1 радиуса ε_1. Отсюда следует, что $\left\|\bigl(E + V(2t)\bigr)^{-1}\right\| \leqslant 1/\varepsilon_1$ для всех $t \in [0,T]$. Равномерная ограниченность операторов $V(T+t)$ и $V(T-t)$ следует из сильной непрерывности полугруппы $V(t)$. Суммируя сказанное, приходим к выводу о равномерной ограниченности констант $C_{25}(n,N)$. Из него вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть для решения задачи* (1.1), *оператор которой удовлетворяет условию* 1 *с углом* $\varphi_0 \leqslant \pi/3$, *а решение — условию* 6 *с показателем истокопредставимости* $p \geqslant 1$, *применяется схема* (1.2)–(3.1)–(3.3), *удовлетворяющая условию* 7. *Тогда при* $0 \leqslant n \leqslant N$ *справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\bigl\|x_n - x(t_n)\bigr\| \leqslant \left\{\begin{matrix} C_{26}(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \leqslant p < \dfrac{3}{2} \\ C_{26}(\Delta t)^2 \ln\dfrac{1}{\Delta t}\,, & p = \dfrac{3}{2} \\ C_{26}(\Delta t)^2, & p > \dfrac{3}{2} \end{matrix}\right\}. \tag{3.37}$$

Несколько огрубляя оценку (3.37) при $p = 3/2$, запишем ее в виде

$$\|x_n - x(t_n)\| \leqslant C_{27}(\Delta t)^q, \tag{3.38}$$

где

$$q = \begin{cases} \dfrac{4p}{3}, & 1 \leqslant p < \dfrac{3}{2} \\ 2-\epsilon\,, & p = \dfrac{3}{2} \\ 2, & p > \dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{3.39}$$

со сколь угодно малым ϵ. Константа C_{27} зависит от p, а при $p = 3/2$ — от ϵ.

Теорема 3.1 устанавливает оценку скорости сходимости схем изучаемого класса в условиях точных входных данных. Теперь нетрудно получить оценку погрешности этих схем в случае приближенно заданного элемента f. Именно, пусть вместо точного элемента f доступно его приближение f_δ с известным уровнем погрешности $\delta > 0$: $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. В этом случае, в соответствии с условием 5а, начальные элементы в схеме (1.2)–(3.1) следует выбирать по формулам

$$x_0 = f_\delta, \quad x_1 = \frac{3}{2} f_\delta - \frac{1}{2}\big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} f_\delta \tag{3.40}$$

вместо (3.3). Кроме того, для получения качественного приближения к искомому решению следует выбирать количество N отрезков дробления в зависимости от уровня погрешности δ. Заметим, что оценка (3.38) в точности соответствует оценке (2.11) из теоремы 2.1. Единственное различие заключается в том, что в (2.11) показатель степени q при Δt равен mq_0, а в (3.38) он определяется формулой (3.39). Проводя рассуждения, в точности аналогичные тем, с помощью которых на основе теоремы 2.1 получена теорема 2.2 (см. [3; 6]), приходим к следующей теореме.

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (1.1), *оператор которой удовлетворяет условию* 1 *с углом* $\varphi_0 \leqslant \pi/3$, *а решение — условию* 6, *вместо точного элемента* f *известно его приближение* f_δ, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. *Пусть для решения этой задачи применяется схема* (1.2)–(3.1)–(3.40), *удовлетворяющая условию* 7, *причем количество отрезков дробления* N *выбирается по формуле* $N(\delta) = \left[\dfrac{1}{\varkappa b}\ln\dfrac{1}{\delta}\right]$, *с произвольным фиксированным параметром* $\varkappa \geqslant 1$, *величиной* q *из* (3.39) *и достаточно малым* $\epsilon > 0$. *Тогда имеет место следующая оценка погрешности приближенного решения:*

$$\|x_n - x(t_n)\| \leqslant C_{28} \ln^{-q}\frac{1}{\delta}\,, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad C_{28} = C_{28}(\varkappa).$$

Оценки скорости сходимости и погрешности разностных схем класса $R^{(2,2)}$, установленные в теоремах 3.1 и 3.2, представляют собой один из основных результатов настоящей работы. Отметим, что ограничения на угол секториальности оператора A, подобные условию $\varphi_0 \leqslant \pi/3$ из этих теорем, налагаются также в разностных методах решения некорректных задач Коши первого порядка [7, 10]. В методе квазиобращения для таких задач тоже требуется подобное условие $\varphi_0 < \pi/4$ [2, с. 95; 10].

Докажем также следующее утверждение, не связанное с основными целями настоящего раздела, но представляющее самостоятельный интерес.

Лемма 3.2. *Схемы* (1.2)–(3.1), *удовлетворяющие условию* 7, *имеют характеристический показатель* $a = 1$.

Доказательство. Напомним, что понятие характеристического показателя было введено в условии 6а в разделе 2. Необходимо установить справедливость неравенства (2.10) с $a = 1$. Из (3.20) и (3.33) следует оценка

$$|v_n(\lambda)| \leqslant C_{29}\left(\left|\widetilde{X}\big(\lambda(\Delta t)^2\big)\right|^n + \left|\widetilde{Y}\big(\lambda(\Delta t)^2\big)\right|^n\right), \quad \lambda \in \partial K(\varphi_0). \tag{3.41}$$

Заметим, что

$$h_1(x) = \ln\left|\widetilde{X}\big(xe^{i\varphi_0}\big)\right| - \sqrt{x}\cos\frac{\varphi_0}{2} = \ln\left|\widetilde{X}\big(xe^{-i\varphi_0}\big)\right| - \sqrt{x}\cos\frac{\varphi_0}{2}\,, \quad x > 0;$$
$$h_2(x) = \ln\left|\widetilde{Y}\big(xe^{i\varphi_0}\big)\right| - \sqrt{x}\cos\frac{\varphi_0}{2} = \ln\left|\widetilde{Y}\big(xe^{-i\varphi_0}\big)\right| - \sqrt{x}\cos\frac{\varphi_0}{2}\,, \quad x > 0.$$

В силу леммы 3.1, имеем $h_1(x) < 0$ и $h_2(x) < 0$ для всех $x > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\left|\widetilde{X}(z)\right| \leqslant e^{\mathrm{Re}\sqrt{z}}, \quad \left|\widetilde{Y}(z)\right| \leqslant e^{\mathrm{Re}\sqrt{z}}, \quad z \in \partial K(\varphi_0).$$

Подставляя полученные неравенства в (3.41), приходим к неравенству (2.10) со значением $a = 1$. Лемма доказана.

4. Необходимые условия степенной сходимости двушаговых абстрактных разностных схем. В теореме 3.1 установлены достаточные условия степенной сходимости схем (1.2)–(3.1)–(3.3) в терминах показателя истокопредставимости p. Настоящий раздел посвящен обоснованию необходимых условий степенной сходимости этих схем. Именно, докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть для решения задачи* (1.1)*, оператор которой удовлетворяет условию* 1 *с углом* $\varphi_0 < \pi/3$*, применяется схема класса* (1.2)–(3.1)–(3.3)*, удовлетворяющая условию* 7*. Если для этой схемы имеет место оценка скорости сходимости*

$$\left\|x_N - x(T)\right\| \leqslant C_{30}(\Delta t)^q,$$

то справедливо условие 6 *с любым* $p \in (0, 3q/4)$.

При доказательстве теоремы будет использоваться теория интерполяции банаховых пространств (см., например, [10, 30]). Приведем необходимые нам определения и факты этой теории. Пусть X_0 и X_1 — банаховы пространства, линейно и непрерывно вложенные в линейное топологическое пространство $\mathcal{T}$. Вводится банахово пространство

$$X_0 + X_1 = \Big\{a \in \mathcal{T} \,\Big|\, a = a_0 + a_1, a_0 \in X_0, a_1 \in X_1\Big\},$$

$$\|a\|_{X_0+X_1} = \inf_{a=a_0+a_1, a_0\in X_0, a_1\in X_1} \big(\|a_0\|_{X_0} + \|a_1\|_{X_1}\big).$$

Затем строится двупараметрическое семейство банаховых пространств

$$(X_0, X_1)_{\theta,s} = \left\{a \in X_0 + X_1 \,\middle|\, \|a\|_{(X_0,X_1)_{\theta,s}} \equiv \left(\int\limits_0^{+\infty} \big(\sigma^{-\theta} K(\sigma, a)\big)^s \frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{1/s} < +\infty\right\} \tag{4.1}$$

с параметрами $\theta \in (0,1)$, $s \in [1, +\infty)$, называемое интерполяционным семейством. Здесь

$$K(\sigma, a) = \inf_{a=a_0+a_1, a_0\in X_0, a_1\in X_1} \big(\|a_0\|_{X_0} + \sigma\|a_1\|_{X_1}\big), \quad a \in X_0 + X_1. \tag{4.2}$$

Все пространства $(X_0, X_1)_{\theta,s}$ являются подпространствами в $X_0 + X_1$. Изложенный способ построения семейства $\big\{(X_0, X_1)_{\theta,s}\big\}$ называется K-методом [30, с. 22].

Всюду далее $X_0 = X$, $X_1 = D\big(A^m\big)$ с некоторым $m > 1$, $\|v\|_{X_1} = \big\|A^m v\big\|$, $\mathcal{T} = X$.

Нам понадобится следующее утверждение, называемое теоремой вложения [30, с. 115].

Лемма 4.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0, m)$*. Тогда* $\Big(X, D\big(A^m\big)\Big)_{p/m,1} \subset D\big(A^p\big)$.

Лемма 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1 *и условие* 6 *с показателем истокопредставимости* $p = p_0 > 0$: $x(T) \in D\big(A^{p_0}\big)$*. Тогда условие* 6 *справедливо также для любого показателя* $p \in \left(0, \dfrac{3q(2p_0+1)}{2(3q+2)}\right)$.

Доказательство леммы проводится по аналогии с [10]. Покажем вначале, что

$$\forall p \in \left(0, \frac{3q(2p_0+1)}{2(3q+2)}\right), \quad x(T) \in \Big(X, D\big(A^{p_0+1/2}\big)\Big)_{p/(p_0+1/2),1}. \tag{4.3}$$

После этого, утверждение леммы непосредственно следует из (4.3) с использованием леммы 4.1 при $m = p_0 + 1/2$ с учетом неравенства $\dfrac{3q(2p_0+1)}{2(3q+2)} < p_0 + 1/2$.

Для доказательства (4.3) положим $X_0 = X$, $X_1 = D\big(A^{p_0+1/2}\big)$, $a = x(T)$ в (4.2):

$$K\big(\sigma, x(T)\big) = \inf\Big(\|a_0\| + \sigma\big\|A^{p_0+1/2} a_1\big\|\Big). \tag{4.4}$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным представлениям $x(T) = a_0 + a_1$, $a_0 \in X$, $a_1 \in D\big(A^{p_0+1/2}\big)$. По аналогии с [10] нетрудно показать, что $x_N \in D\big(A^{p_0+1/2}\big)$, поэтому допустимо представление с $a_0 = x(T) - x_N$, $a_1 = x_N$. Следовательно,

$$K\big(\sigma, x(T)\big) \leqslant \|x(T) - x_N\| + \sigma \big\|A^{p_0+1/2} x_N\big\|. \tag{4.5}$$

Согласно условию леммы, $\big\|x(T) - x_N\big\| \leqslant C_{30} (\Delta t)^q$. Оценим норму $\big\|A^{p_0+1/2} x_N\big\|$ в (4.5). По условию леммы элемент $x(T)$ допускает представление $x(T) = A^{-p_0} w_0$, $w_0 \in X$. Используя (3.9), (3.16) и равенство

$$A^{p_0+1/2} R\big(\zeta, -A^{1/2}\big) A^{-p_0} = A^{p_0} \Big(E - \zeta R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)\Big) A^{-p_0} = E - \zeta R\big(\zeta, -A^{1/2}\big),$$

получаем

$$\begin{aligned} A^{p_0+1/2} x_N &= A^{p_0+1/2} v_N(A) f = 2\big(E + V(2T)\big)^{-1} A^{p_0+1/2} v_N(A) V(T) A^{-p_0} w_0 = \\ &= 2\big(E + V(2T)\big)^{-1} A^{p_0+1/2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\widehat{\Gamma}} v_N\big(\zeta^2\big) e^{\zeta T} R\big(\zeta, -A^{1/2}\big) A^{-p_0} w_0 \, d\zeta = \\ &= 2\big(E + V(2T)\big)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\widehat{\Gamma}} v_N\big(\zeta^2\big) e^{\zeta T} w_0 \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\widehat{\Gamma}} v_N\big(\zeta^2\big) e^{\zeta T} \zeta R\big(\zeta, -A^{1/2}\big) w_0 \, d\zeta \right). \end{aligned}$$

В силу аналитичности подынтегральных функций контур $-\widehat{\Gamma}$ в данных интегралах можно заменить на границу сектора $K(\pi - \varphi_0/2)$, проходимую в соответствующем направлении. Заметим также, что из секториальности оператора $A^{1/2}$ с углом $\varphi_0/2$ и равенства $R\big(\zeta, -A^{1/2}\big) = -R\big(-\zeta, A^{1/2}\big)$ вытекает оценка

$$\Big\|R\big(\zeta, -A^{1/2}\big)\Big\| \leqslant \frac{C_{31}}{1 + |\zeta|}, \quad \zeta \in -\widehat{\Gamma}, \quad \text{поэтому} \quad \big\|A^{p_0+1/2} x_N\big\| \leqslant C_{32} \int\limits_{\partial K(\pi - \varphi_0/2)} \Big|v_N\big(\zeta^2\big)\Big| \, \big|e^{\zeta T}\big| \, |d\zeta|.$$

Зафиксируем малую величину $\varepsilon_2 > 0$ и оценим интеграл в последнем неравенстве, применяя представление (3.20) и неравенство (3.33): для $z = \rho^2 (\Delta t)^2 e^{i\varphi_0}$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \big\|A^{p_0+1/2} x_N\big\| &\leqslant C_{32} \left(\int\limits_0^{+\infty} \Big|1 + \widetilde{M}(z)\Big| \, \Big|\widetilde{X}(z)\Big|^N \, \Big|e^{-N\sqrt{z}}\Big| \, d\rho + \int\limits_0^{+\infty} \Big|1 - \widetilde{M}(z)\Big| \, \Big|\widetilde{Y}(z)\Big|^N \, \Big|e^{-N\sqrt{z}}\Big| \, d\rho \right) \leqslant \\ &\leqslant C_{33} \left(\int\limits_0^1 \Big|\widetilde{X}(z) e^{-\sqrt{z}}\Big|^N |z|^{(1-\varepsilon_2)/2} \frac{d\rho}{|z|^{(1-\varepsilon_2)/2}} + \int\limits_1^{+\infty} \Big|\widetilde{X}(z) e^{-\sqrt{z}}\Big|^N |z|^{(1+\varepsilon_2)/2} \frac{d\rho}{|z|^{(1+\varepsilon_2)/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \int\limits_0^1 \Big|\widetilde{Y}(z) e^{-\sqrt{z}}\Big|^N |z|^{(1-\varepsilon_2)/2} \frac{d\rho}{|z|^{(1-\varepsilon_2)/2}} + \int\limits_1^{+\infty} \Big|\widetilde{Y}(z) e^{-\sqrt{z}}\Big|^N |z|^{(1+\varepsilon_2)/2} \frac{d\rho}{|z|^{(1+\varepsilon_2)/2}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \big\|A^{p_0+1/2} x_N\big\| &\leqslant C_{34} \left(\frac{1}{(\Delta t)^{1-\varepsilon_2}} \max_{z = re^{i\varphi_0}, r \geqslant 0} \left(\Big|\widetilde{X}(z) e^{-\sqrt{z}}\Big|^N \, |z|^{(1-\varepsilon_2)/2} \right) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{(\Delta t)^{1+\varepsilon_2}} \max_{z = re^{i\varphi_0}, r \geqslant 0} \left(\Big|\widetilde{X}(z) e^{-\sqrt{z}}\Big|^N |z|^{(1+\varepsilon_2)/2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{(\Delta t)^{1-\varepsilon_2}} \max_{z = re^{i\varphi_0}, r \geqslant 0} \left(\Big|\widetilde{Y}(z) e^{-\sqrt{z}}\Big|^N |z|^{(1-\varepsilon_2)/2} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\Delta t)^{1+\varepsilon_2}} \max_{z = re^{i\varphi_0}, r \geqslant 0} \left(\Big|\widetilde{Y}(z) e^{-\sqrt{z}}\Big|^N |z|^{(1+\varepsilon_2)/2} \right) \right) = \\ &= C_{34} \left(\frac{1}{(\Delta t)^{1-\varepsilon_2}} \max_{r \geqslant 0} \left(e^{N h_1(r)} r^{(1-\varepsilon_2)/2} \right) + \frac{1}{(\Delta t)^{1+\varepsilon_2}} \max_{r \geqslant 0} \left(e^{N h_1(r)} r^{(1+\varepsilon_2)/2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\Delta t)^{1-\varepsilon_2}} \max_{r \geqslant 0} \left(e^{N h_2(r)} r^{(1-\varepsilon_2)/2} \right) + \frac{1}{(\Delta t)^{1+\varepsilon_2}} \max_{r \geqslant 0} \left(e^{N h_2(r)} r^{(1+\varepsilon_2)/2} \right) \right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Напомним, что функции $h_1(r)$ и $h_2(r)$ были введены в разделе 3.

Получим оценки для максимумов в (4.6). Функции $h_1(r)$ и $h_2(r)$ допускают разложения

$$h_1(r) = -r^{3/2}\left(\frac{1}{24}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{3\varphi_0}{2} + O\big(r^2\big), \quad h_2(r) = -2\sqrt{r}\cos\frac{\varphi_0}{2} + O(r), \quad r\to 0$$

и представления

$$h_1(r) = \ln\left|\widetilde{X}\big(re^{i\varphi_0}\big)\right| - \sqrt{r}\cos\frac{\varphi_0}{2}\,, \quad h_2(r) = \ln\left|\widetilde{Y}\big(re^{i\varphi_0}\big)\right| - \sqrt{r}\cos\frac{\varphi_0}{2}\,,$$

где $\ln\left|\widetilde{X}\big(re^{i\varphi_0}\big)\right|$ и $\ln\left|\widetilde{Y}\big(re^{i\varphi_0}\big)\right|$ — ограниченные функции аргумента $r\geqslant 0$. Наконец, согласно лемме 3.1 функции $h_1(r)$ и $h_2(r)$ принимают только отрицательные значения при $r>0$. Из сказанного следуют оценки

$$h_1(r)\leqslant -\frac{C_{35}r^{3/2}}{1+r}\,, \quad h_2(r)\leqslant -C_{36}\sqrt{r}, \quad r\in[0,+\infty).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} &e^{Nh_1(r)}r^{(1-\varepsilon_2)/2}\leqslant e^{\psi_1(r)}, \quad \psi_1(r) = -\frac{C_{35}r^{3/2}}{1+r}\,N + \frac{1-\varepsilon_2}{2}\,\ln r;\\ &e^{Nh_2(r)}r^{(1-\varepsilon_2)/2}\leqslant e^{\psi_2(r)}, \quad \psi_2(r) = -C_{36}\sqrt{r}N + \frac{1-\varepsilon_2}{2}\,\ln r. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Нетрудно видеть, что $\psi_1(0)=\psi_1(+\infty)=-\infty$, $\psi_2(0)=\psi_2(+\infty)=-\infty$. Пусть $r_1^*(N)$, $r_2^*(N)>0$ — точки глобального максимума функций $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$ соответственно. Из соотношения $\psi_1'(r_1^*)=\psi_2'(r_2^*)=0$ находим $N=\dfrac{(1-\varepsilon_2)(1+r_1^*)^2}{C_{35}(r_1^*)^{3/2}(r_1^*+3)}$, $r_2^*(N)=\left(\dfrac{1-\varepsilon_2}{C_{36}N}\right)^2$.

Легко показать, что $r_1^*(N)\to 0$ при $N\to\infty$, причем $C_{37}N^{-2/3}\leqslant r_1^*(N)\leqslant C_{38}N^{-2/3}$. Подставляя полученные соотношения в (4.7), получаем

$$\max_{r\geqslant 0}\left(e^{Nh_1(r)}r^{(1-\varepsilon_2)/2}\right)\leqslant e^{\psi_1(r_1^*)}\leqslant C_{39}N^{-(1-\varepsilon_2)/3}, \quad \max_{r\geqslant 0}\left(e^{Nh_2(r)}r^{(1-\varepsilon_2)/2}\right)\leqslant e^{\psi_2(r_2^*)}\leqslant C_{40}N^{-(1-\varepsilon_2)}.$$

Аналогично находим

$$\max_{r\geqslant 0}\left(e^{Nh_1(r)}r^{(1+\varepsilon_2)/2}\right)\leqslant C_{41}N^{-(1+\varepsilon_2)/3}, \quad \max_{r\geqslant 0}\left(e^{Nh_2(r)}r^{(1+\varepsilon_2)/2}\right)\leqslant C_{42}N^{-(1+\varepsilon_2)}.$$

Подставляя данные неравенства в (4.6), приходим к оценке $\left\|A^{p_0+1/2}x_N\right\|\leqslant C_{43}N^{2(1+\varepsilon_2)/3}$.

Теперь из (4.5) следует $K(\sigma,x(T))\leqslant C_{44}\left(N^{-q}+\sigma N^{2(1+\varepsilon_2)/3}\right)$ при всех $N\in\mathbb{N}$.

Выберем здесь $N=N(\sigma)=\left[\sigma^{-1/(q+2(1+\varepsilon_2)/3)}\right]+1$, тогда будем иметь

$$K\big(\sigma,x(T)\big)\leqslant C_{45}\sigma^{q/(q+2(1+\varepsilon_2)/3)}. \tag{4.8}$$

Оценка (4.8) была получена из (4.4) с помощью представления $x(T)=a_0+a_1$, $a_0=x(T)-x_N\in X$, $a_1=x_N\in D\big(A^{p_0+1/2}\big)$. Положим теперь $a_0=x(T)\in X$, $a_1=0\in D\big(A^{p_0+1/2}\big)$, тогда получим

$$K\big(\sigma,x(T)\big)\leqslant\left\|x(T)\right\|=C_{46}. \tag{4.9}$$

Докажем справедливость (4.3). Согласно (4.1) включение $x(T)\in\Big(X,D\big(A^{p_0+1/2}\big)\Big)_{p/(p_0+1/2),1}$ справедливо для тех p, для которых сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\sigma^{-p/(p_0+1/2)-1}K\big(\sigma,x(T)\big)\,d\sigma\leqslant C_{45}\int\limits_0^1\sigma^{-p/(p_0+1/2)-1+q/(q+2(1+\varepsilon_2)/3)}\,d\sigma + C_{46}\int\limits_1^{+\infty}\sigma^{-p/(p_0+1/2)-1}\,d\sigma.$$

Здесь мы использовали оценки (4.8) и (4.9). Мы видим, что второй из интегралов в правой части последнего неравенства сходится всегда, а первый — при $p\in\left(0,\ \dfrac{3q(2p_0+1)}{2(3q+2)}\right)$. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 4.1 теперь легко доказывается по схеме, изложенной в [10] и заключающейся в итеративном применении леммы 4.2.

Сравним полученные в теореме 4.1 необходимые условия степенной сходимости схем (1.2)–(3.1)–(3.3) с достаточными условиями, установленными в теореме 3.1. Теорема 3.1 показывает, что для степенной сходимости таких схем с показателем $q < 2$ достаточно условие истокопредставимости с показателем $p = 3q/4$. В то же время, согласно теореме 4.1, необходимой является истокопредставимость с любым показателем $p \in (0, 3q/4)$. Мы видим, что полученные необходимые условия весьма близки к достаточным. Достаточные условия степенной сходимости схем (1.2)–(3.1)–(3.3) с показателем $q > 2$ автору неизвестны.

5. Схемы полной дискретизации для некорректных задач Коши второго порядка. Как было указано в разделе 1, типичными примерами задач вида (1.1) являются задачи Коши для эллиптических уравнений с частными производными. Применяя схемы (1.2) для решения этих задач, мы производим их дискретизацию лишь по временно́й переменной. Вместе с тем, практическая реализация любого метода решения таких задач предполагает проведение также пространственной дискретизации. В связи с этим в настоящем разделе мы рассмотрим схемы полной дискретизации задач вида (1.1), сочетающие полудискретизацию по времени с конечномерной аппроксимацией пространства X и оператора A. Мы будем использовать способ построения таких методов, применявшийся в [9] к некорректным задачам Коши первого порядка. В свою очередь, этот способ восходит к известной общей схеме построения конечноразностных методов (см., например, [31, гл. 7]).

Вначале определим семейство конечномерных банаховых пространств X_h, $h \in (0, h_0]$, выступающих в качестве дискретных аппроксимаций пространства X. Каждое из пространств X_h рассматривается вместе с линейным ограниченным оператором $p_h : X \to X_h$, ставящим в соответствие элементу из X аппроксимирующий его элемент из X_h. Потребуем равномерную ограниченность норм операторов p_h.

Условие 8. Для всех $x \in X$ и $h \in (0, h_0]$ справедлива оценка $\|p_h x\|_{X_h} \leqslant C_{47}\|x\|$, где константа C_{47} не зависит от x, h.

Введем семейство операторов $A_h \in L(X_h)$, служащих приближениями оператора A. Если A является дифференциальным оператором с частными производными, то h обычно имеет смысл шага пространственной дискретизации при сеточной или конечноэлементной аппроксимации оператора A. Далее предполагаем выполненным следующее условие.

Условие 9. Для некоторого нормированного пространства $Y \subset X$ справедливо

$$R(\lambda, A)f \in Y \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0),$$

причем величины $\Big\{\big\|R(\lambda, A)f\big\|_Y\Big\}_{\lambda \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0)}$ равномерно ограничены, и, кроме того, с некоторым $s > 0$ для всех $y \in Y$ имеет место оценка

$$\big\|(A_h p_h - p_h A)y\big\|_{X_h} \leqslant C_{48} h^s \|y\|_Y,$$

где постоянная C_{48} не зависит от y, h.

В [9] смысл условия 9 объясняется следующим образом. Требование ограниченности $\big\|R(\lambda, A)f\big\|_Y$ фактически сводится к условию повышенной гладкости элемента f по сравнению с гладкостью, предписываемой включением $f \in D(A)$. Оценка из условия 9 определяет порядок аппроксимации семейством A_h, $h \in (0, h_0]$, оператора A на элементах $y \in Y$. Вложение $Y \subset X$ отражает тот факт, что такого рода оценки в приложениях обычно устанавливаются для функций y достаточно высокой гладкости.

Кроме условия 9, наложим на операторы A_h следующее условие секториальности, аналогичное условию 1 для оператора A.

Условие 10. Для всех $h \in (0, h_0]$ справедливо включение $\sigma(A_h) \subset K(\varphi_0)$ и имеет место оценка

$$\big\|R(\zeta, A_h)\big\|_{L(X_h)} \leqslant \frac{C_{49}}{1 + |\zeta|} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0)$$

с константой C_{49}, не зависящей от ζ, h.

Ниже мы будем предполагать, что константы C_{49}, C_{50}, $\ldots$ не зависят от h.

Наряду с исходной задачей (1.1) рассмотрим аппроксимирующие ее конечномерные задачи

$$\ddot{x}^h(t) = A_h x^h(t), \quad t \in \ [0, T], \quad x^h(0) = p_h f, \quad \dot{x}^h(0) = 0 \quad \big(h \in (0, h_0]\big). \tag{5.1}$$

Поскольку $A_h \in L(X_h)$, все эти задачи корректно поставлены. Зададим шаг дискретизации по времени $\Delta t = T/N$, шаг пространственной дискретизации $h \in (0, h_0]$ и построим класс схем полной дискретизации для аппроксимации решения задачи (1.1) на основе схем (1.2):

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j}^h = (\Delta t)^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j A_h x_{n+j}^h, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-k. \tag{5.2}$$

Относительно коэффициентов α_j, β_j будем предполагать выполненными условия 2–4, как и в схемах полудискретизации. Элементы $x_n^h \in X_h$, $0 \leqslant n \leqslant N$, должны аппроксимировать значения $x^h(t_n)$ решения конечномерной задачи (5.1) в узлах дискретизации. Начальные элементы для схемы (5.2) будем выбирать по аналогии с условиями 5 и 5а:

$$x_0^h = p_h f, \quad x_j^h = v_j(A_h) p_h f, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1 \tag{5.3}$$

в случае точных входных данных и

$$x_0^h = p_h f_\delta, \quad x_j^h = v_j(A_h) p_h f_\delta, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1 \tag{5.4}$$

в случае приближенно заданного элемента f. Напомним, что функции $v_j(\lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, определены формулой (2.8) с $l = [m/2]$, порядок аппроксимации m введен в условии 3. Например, для схем класса $R^{(2,2)}$, определенного в (3.1), формулы (5.3) и (5.4) принимают вид

$$x_0^h = p_h f, \quad x_1^h = \frac{3}{2}\, p_h f - \frac{1}{2} \big(E_h + (\Delta t)^2 A_h\big)^{-1} p_h f, \tag{5.5}$$

$$x_0^h = p_h f_\delta, \quad x_1^h = \frac{3}{2}\, p_h f_\delta - \frac{1}{2} \big(E_h + (\Delta t)^2 A_h\big)^{-1} p_h f_\delta, \tag{5.6}$$

соответственно. Здесь E_h — единичный оператор в X_h.

Нашей ближайшей целью является получение оценки погрешности для схемы (5.2)–(5.3) в условиях точных входных данных. Эта погрешность характеризуется величинами $\big\|x_n^h - p_h x(t_n)\big\|_{X_h}$, $0 \leqslant n \leqslant N$. Наряду с элементами $x_n^h \in X_h$, $0 \leqslant n \leqslant N$, будем рассматривать элементы $x_n \in X$, $0 \leqslant n \leqslant N$, полученные из схемы (1.2), соответствующей изучаемой схеме (5.2)–(5.3). Имеем

$$\big\|x_n^h - p_h x(t_n)\big\|_{X_h} \leqslant \big\|x_n^h - p_h x_n\big\|_{X_h} + \Big\|p_h\big(x_n - x(t_n)\big)\Big\|_{X_h}. \tag{5.7}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (5.7). Из леммы 2.3 следуют представления $x_n = v_n(A) f$, $x_n^h = v_n(A_h) p_h f$, $0 \leqslant n \leqslant N$, в смысле исчисления замкнутых операторов. Построим контур $\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)$, который будем использовать в качестве $\widetilde{\Gamma}$ в интегральном представлении (2.9) для операторов $v_n(A)$ и $v_n(A_h)$. Заметим вначале, что функции $v_n(\lambda)$, $0 \leqslant n \leqslant N$, не могут иметь других особых точек, кроме $-(\Delta t)^{-2}$ и $\beta_k^{-1}(\Delta t)^{-2}$, причем обе эти точки лежат на отрицательной вещественной полуоси. Рассмотрим замкнутые кривые $O_1^2 = \Big\{\zeta^2 \,\big|\, \zeta \in O_1\Big\}$ и $O_3^2 = \Big\{\zeta^2 \,\big|\, \zeta \in O_3\Big\}$, где O_1 и O_3 — окружности, введенные в разделе 2 при построении контура $\widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)$. Обозначим через $\mathcal{G}_2$ проходимый в отрицательном направлении замкнутый контур, состоящий из кривых O_1^2, O_3^2 и соединяющего их отрезка вещественной оси, проходимого два раза в противоположных направлениях. Наконец, определим $\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, \lambda(\Delta t)^2 \in \mathcal{G}_2\Big\}$. Нетрудно видеть, что контур $\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)$ охватывает спектры $\sigma(A)$, $\sigma(A_h) \subset K(\varphi_0)$ и бесконечно удаленную точку, но не охватывает точки $-(\Delta t)^{-2}$ и $\beta_k^{-1}(\Delta t)^{-2}$. Следуя (2.9), запишем представления

$$x_n = v_n(A) f = v_n(\infty) f + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)} v_n(\lambda) R(\lambda, A) f \, d\lambda, \quad 0 \leqslant n \leqslant N;$$

$$x_n^h = v_n(A_h) p_h f = v_n(\infty) p_h f + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)} v_n(\lambda) R(\lambda, A_h) p_h f \, d\lambda, \quad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Поэтому

$$x_n^h - p_h x_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)} v_n(\lambda) \big(R(\lambda, A_h) p_h - p_h R(\lambda, A)\big) f \, d\lambda. \tag{5.8}$$

Нетрудно установить справедливость равенства

$$R(\lambda, A_h)p_h - p_h R(\lambda, A) = R(\lambda, A_h)(A_h p_h - p_h A)R(\lambda, A), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\bigl(\sigma(A) \cup \sigma(A_h)\bigr).$$

Подставляя его в (5.8) и используя условия 1, 9, 10, получаем

$$\bigl\|x_n^h - p_h x_n\bigr\|_{X_h} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)} \bigl|v_n(\lambda)\bigr| \, \bigl\|R(\lambda, A_h)\bigr\|_{L(X_h)} \bigl\|(A_h p_h - p_h A)R(\lambda, A)f\bigr\|_{X_h} |d\lambda| \leqslant$$
$$\leqslant C_{50} h^s \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)} \frac{\bigl|v_n(\lambda)\bigr|}{1 + |\lambda|} |d\lambda|.$$

Заметим, что для всех $\lambda \in \widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)$ справедливо $|\lambda| \geqslant C_{51}(\Delta t)^{-2}$, а длина контура $\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)$ равна $C_{52}(\Delta t)^{-2}$ с постоянными C_{51}, C_{52}. Отметим также, что для $\lambda \in \widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)$ справедливо $\pm\sqrt{\lambda} \in \widetilde{\Gamma}_1(\Delta t)$, что позволяет использовать лемму 2.4 для оценки $\bigl|v_n(\lambda)\bigr|$. Суммируя сказанное, приходим к соотношению

$$\bigl\|x_n^h - p_h x_n\bigr\|_{X_h} \leqslant C_{53} h^s e^{b_1 N}. \tag{5.9}$$

Подставим его в (5.7) и используем условие 8: $\bigl\|x_n^h - p_h x(t_n)\bigr\|_{X_h} \leqslant C_{53} h^s e^{b_1 N} + C_{47}\bigl\|x_n - x(t_n)\bigr\|$.

В зависимости от используемой схемы и от априорных условий, накладываемых на искомое решение, норма $\bigl\|x_n - x(t_n)\bigr\|$ в правой части полученного неравенства может оцениваться, например, согласно теореме 2.1 или теореме 3.1. Мы приходим к следующим леммам.

Лемма 5.1. *Пусть для аппроксимации решения задачи* (1.1)*, оператор которой удовлетворяет условию* 1*, а решение — условию* 6a*, применяется схема полной дискретизации* (5.2)–(5.3)*, удовлетворяющая условиям* 2–4*,* 8–10*. Тогда справедлива оценка погрешности*

$$\bigl\|x_n^h - p_h x(t_n)\bigr\|_{X_h} \leqslant C_{54}\bigl(h^s e^{b_1 N} + (\Delta t)^q\bigr), \tag{5.10}$$

где $q = mq_0$, $q_0 \in \left(0, \dfrac{T_1 - aT}{M + (T_1 - aT)}\right)$, $C_{54} = C_{54}(q_0)$.

Лемма 5.2. *Пусть для аппроксимации решения задачи* (1.1)*, оператор которой удовлетворяет условию* 1 *с углом* $\varphi_0 \leqslant \pi/3$*, а решение — условию* 6*, применяется схема полной дискретизации* (5.2)–(3.1)–(5.5)*, удовлетворяющая условиям* 7–10*. Тогда справедлива оценка погрешности* (5.10)*, где* q *определяется согласно* (3.39).

Предположим теперь, что элемент f в задаче (1.1) задан с погрешностью и применяется схема (5.2)–(5.4). Дальнейшие рассуждения будут справедливы и для случая точных входных данных, которому соответствует значение $\delta = 0$; при этом $f_\delta = f$ и формулы (5.4) принимают вид (5.3). Используя представление $x_n^h = v_n(A_h)p_h f_\delta$, получаем

$$\bigl\|x_n^h - p_h x(t_n)\bigr\|_{X_h} \leqslant \bigl\|v_n(A_h)p_h(f_\delta - f)\bigr\|_{X_h} + \bigl\|v_n(A_h)p_h f - p_h x(t_n)\bigr\|_{X_h}. \tag{5.11}$$

Оценим первое слагаемое в правой части. Из условия 8 следует

$$\bigl\|v_n(A_h)p_h(f_\delta - f)\bigr\|_{X_h} \leqslant \bigl\|v_n(A_h)\bigr\|_{L(X_h)} \cdot C_{47}\|f_\delta - f\| \leqslant C_{47}\delta\bigl\|v_n(A_h)\bigr\|_{L(X_h)}.$$

Оценим норму оператора $v_n(A_h)$, применяя рассуждения, аналогичные использованным нами при доказательстве (5.9), а также используя лемму 2.5 и условие 10:

$$\bigl\|v_n(A_h)\bigr\|_{L(X_h)} \leqslant \bigl|v_n(\infty)\bigr| + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)} \bigl|v_n(\lambda)\bigr| \, \bigl\|R(\lambda, A_h)\bigr\|_{L(X_h)} |d\lambda| \leqslant$$
$$\leqslant C_6 e^{b_2 n} + \frac{C_{49}}{2\pi} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_2(\Delta t)} \frac{\bigl|v_n(\lambda)\bigr|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leqslant C_{55} e^{bN}, \quad b = \max\{b_1, b_2\}.$$

Отсюда получаем $\bigl\|v_n(A_h)p_h(f_\delta - f)\bigr\|_{X_h} \leqslant C_{56} e^{bN}\delta$.

Тем самым установлена оценка для первого слагаемого в правой части (5.11). Нетрудно видеть, что второе слагаемое в условиях леммы 5.1 или леммы 5.2 оценивается по формуле (5.10):

$$\big\|v_n(A_h)p_hf - p_hx(t_n)\big\|_{X_h} \leqslant C_{54}\big(h^s e^{b_1N} + (\Delta t)^q\big).$$

Подставим теперь полученные оценки в (5.11):

$$\big\|x_n^h - p_hx(t_n)\big\|_{X_h} \leqslant C_{57}\Big(e^{bN}\big(h^s+\delta\big) + (\Delta t)^q\Big), \quad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Последнее неравенство справедливо не только при $h \in (0, h_0]$, но также и при значении $h = 0$, соответствующем отсутствию дискретизации пространства X, т.е. $X_0 = X$, $p_0 = E$, $A_0 = A$. В этом случае полученная оценка принимает вид (2.12). Мы видим, что если уровень погрешности δ начального элемента f задан, а параметры h и $\Delta t = T/N$ подлежат выбору в зависимости от δ, то оптимальным является именно выбор $h = 0$. Поэтому проанализируем случай, когда параметр $h > 0$ зафиксирован наряду с $\delta > 0$, а параметром регуляризации служит величина $N = N(h, \delta)$. Применяя схему рассуждений из [3, 6, 9], приходим к следующей теореме, аналогичной теореме 2.2.

Теорема 5.1. *Пусть в задаче* (1.1) *вместо начального элемента f известно его приближение f_δ с уровнем погрешности $\delta > 0$. Пусть выполнены условия леммы* 5.1 *или леммы* 5.2 *и для аппроксимации решения задачи* (1.1) *применяется схема полной дискретизации* (5.2)–(5.4) *или* (5.2)–(3.1)–(5.6) *соответственно с выбором количества отрезков дробления по формуле* $N(h,\delta) = \left[\dfrac{1}{\varkappa b}\ln\dfrac{1}{h^s+\delta}\right]$. *Здесь $\varkappa > 1$ — произвольный фиксированный параметр. Тогда справедлива оценка погрешности*

$$\big\|x_n^h - p_hx(t_n)\big\|_{X_h} \leqslant C_{58}\ln^{-q}\frac{1}{h^s+\delta}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad C_{58} = C_{58}(\varkappa).$$

Теорема 5.1 является основным результатом настоящего раздела. Отметим, что данная теорема остается справедливой при значении $\delta = 0$, соответствующем случаю точных входных данных (поскольку при этом остаются верными рассуждения, с помощью которых получена теорема), и даже при значении $h = 0$, соответствующем отсутствию пространственной дискретизации (в силу теорем 2.2 и 3.2).

Пример приложения развитой теории схем полной дискретизации к решению конкретных уравнений с частными производными, когда в роли оператора A выступает дифференциальный оператор, а в роли операторов A_h — его разностные приближения, приведен в [9].

6. Численные эксперименты. Рассмотрим следующую некорректную задачу для эллиптического уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -a_0^2\,\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + b(s)\,\frac{\partial x}{\partial s} + c(s)x, \quad x = x(s,t),\\
&x(0,t) = 0, \quad x(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,\\
&x(s,0) = \psi_1(s), \quad \frac{\partial x}{\partial t}\,(s,0) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

На вещественные функции $b \in C^1[0,1]$ и $c \in C[0,1]$ наложим условие

$$c(s) - \frac{1}{2}\,b'(s) \geqslant \epsilon > 0 \quad \forall s \in [0,1]. \tag{6.2}$$

Задача (6.1) имеет вид (1.1), где $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$:

$$[Au](s) = -a_0^2u''(s) + b(s)u'(s) + c(s)u(s), \quad s \in [0,1]; \quad f = \psi_1, D(A) = \Big\{u \in H^2[0,1]\,\big|\,u(0) = u(1) = 0\Big\}.$$

Аналогично [32, с. 351–352] можно убедиться, что оператор A удовлетворяет условию 1 с произвольным $\varphi_0 \in (\varphi_0^*, \pi/2)$, где $\operatorname{tg}\varphi_0^* = \max\limits_{s\in[0,1]}\left(\big|b(s)\big|\max\left\{\dfrac{1}{2a_0^2}\,,\,\dfrac{1}{2c(s)-b'(s)}\right\}\right)$.

Потребуем $\varphi_0^* < \pi/3$, т.е. наложим условие

$$\max_{s\in[0,1]}\left(\big|b(s)\big|\max\left\{\frac{1}{2a_0^2}\,,\,\frac{1}{2c(s)-b'(s)}\right\}\right) < \sqrt{3}. \tag{6.3}$$

Обозначим через $\psi_2(s)$ искомую функцию $x(s,T)$. Для построения модельных примеров с заранее известной $\psi_2(s)$ выбирается функция $\psi_0 \in D(A)$ и решается вспомогательная корректно поставленная задача

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a_0^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + b(s)\,\frac{\partial y}{\partial s} + c(s)y, \quad y = y(s,t),\\
&y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1 \quad (T_1 > T),\\
&y(s,T_1) = \psi_0(s), \quad \frac{\partial y}{\partial t}\,(s,0) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Положим $\psi_1(s) = y(s,0)$ в (6.1), при этом модельное решение есть $\psi_2(s) = y(s,T)$.

Для численного тестирования будем использовать схему класса $R^{(2,2)}$ с коэффициентом $\beta = 1$. Эта схема имеет вид

$$\begin{aligned}
&x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} = (\Delta t)^2(-Ax_n + 3Ax_{n+1} - Ax_{n+2}), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-2,\\
&x_0 = f, \quad x_1 = \frac{3}{2}\,f - \frac{1}{2}\,\big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} f,
\end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned}
&x_{n+2} = -x_n + 3x_{n+1} - \big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} x_{n+1}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-2,\\
&x_0 = f, \quad x_1 = \frac{3}{2}\,f - \frac{1}{2}\,\big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} f.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Для нахождения элементов $z = \big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} f$, $z_n = \big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} x_{n+1}$ в итерациях (6.5) решаются краевые задачи вида

$$-a_0^2(\Delta t)^2 z''(s) + (\Delta t)^2 b(s) z'(s) + \big((\Delta t)^2 c(s) + 1\big) z(s) = g(s), \quad z(0) = z(1) = 0, \tag{6.6}$$

где $g = f$ или $g = x_{n+1}$.

Расчеты проводились в среде Maple 15. Пространственная дискретизация задачи производилась внутренними средствами этой среды без применения развитой в разделе 5 теории. Для решения вспомогательной задачи (6.4) использовался сеточный метод с равномерной сеткой 50×50. На каждом шаге (6.5) краевые задачи типа (6.6) решались с помощью соответствующей стандартной процедуры; значения функции $x_{n+2}(s)$ вычислялись в точках $s = j/10$, $j = 0,\dots,10$. Затем по найденным значениям проводилась кубическая сплайн-интерполяция, а получившаяся функция использовалась на следующей итерации.

Для тестовых расчетов положим в (6.1), (6.4) $a_0 = 0.1$, $b(s) = 0.02s$, $c(s) = s(1-s) + 0.02$, $T = 0.5$, $T_1 = 2.5$ и выберем $N = 5$. Нетрудно проверить, что при этом выполняются требования (6.2), (6.3), а в силу леммы 3.2 выполняются условие 6а и более слабое условие 6. В качестве функции $\psi_0(s)$ выбирались функции $\psi_0(s) = s^2(s-1)$ и $\psi_0(s) = \sin(2\pi s)$. Вычисления проводились как с точной функцией $f(s) = \psi_1(s)$, так и с возмущенной $f_\delta(s) = \psi_1(s) + 0.001\sin(3\pi s)$.

1-й тестовый расчет: $\psi_0(s) = s^2(s-1)$, функция $f(s) = \psi_1(s)$ точная.

Результаты расчета: погрешность метода $\|x_N - \psi_2\| \approx 2.27 \times 10^{-4}$, относительная погрешность $\|x_N - \psi_2\|/\|\psi_2\| \approx 5.06 \times 10^{-3}$ (для сравнения, $\|\psi_2 - \psi_1\| \approx 1.69 \times 10^{-3}$).

2-й тестовый расчет: $\psi_0(s) = s^2(s-1)$, функция $f_\delta(s) = \psi_1(s) + 0.001\sin(3\pi s)$ возмущенная.

Результаты расчета: погрешность метода $\|x_N - \psi_2\| \approx 8.11 \times 10^{-4}$, относительная погрешность $\|x_N - \psi_2\|/\|\psi_2\| \approx 1.81 \times 10^{-2}$.

3-й тестовый расчет: $\psi_0(s) = \sin(2\pi s)$, функция $f(s) = \psi_1(s)$ точная.

Результаты расчета: погрешность метода $\|x_N - \psi_2\| \approx 1.86 \times 10^{-3}$, относительная погрешность $\|x_N - \psi_2\|/\|\psi_2\| \approx 8.31 \times 10^{-3}$ (для сравнения, $\|\psi_2 - \psi_1\| \approx 1.39 \times 10^{-2}$).

4-й тестовый расчет: $\psi_0(s) = \sin(2\pi s)$, функция $f_\delta(s) = \psi_1(s) + 0.001\sin(3\pi s)$ возмущенная.

Результаты расчета: погрешность метода $\|x_N - \psi_2\| \approx 1.98 \times 10^{-3}$, относительная погрешность $\|x_N - \psi_2\|/\|\psi_2\| \approx 8.82 \times 10^{-3}$.

Результаты расчетов указывают на достаточно высокую точность изучаемого метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16–01–00039а) в рамках Госзадания по Марийскому государственному университету (проект 1.5420.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. *Кокурин М.М.* Разностные схемы решения задачи Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. **54**, № 4. 569–584.
4. *Бакушинский А.Б.* Разностные схемы для решения некорректных абстрактных задач Коши // Дифференциальные уравнения. 1971. **7**, № 10. 1876–1885.
5. *Бакушинский А.Б.* Разностные методы решения некорректных задач Коши для эволюционных уравнений в комплексном B-пространстве // Дифференциальные уравнения. 1972. **8**, № 9. 1661–1668.
6. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.М., Кокурин М.Ю.* Об одном классе разностных схем решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. **52**, № 3. 483–498.
7. *Кокурин М.М.* Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 58–76.
8. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Ключев В.В.* Об оценке скорости сходимости разностных методов решения некорректной задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 25–31.
9. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.М., Кокурин М.Ю.* О схеме полной дискретизации некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. **18**, № 1. 96–108.
10. *Кокурин М.М.* Необходимые и достаточные условия степенной сходимости метода квазиобращения и разностных методов решения некорректной задачи Коши в условиях точных данных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. **55**, № 12. 2027–2041.
11. *Кокурин М.М.* Полиномиальные оценки скорости сходимости разностных схем для некорректных задач Коши // Тезисы докладов Международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам. Москва, 19–21 ноября 2015 г. М.: РУДН, 2015. 97–98.
12. *Кокурин М.М.* Оценки погрешности разностных схем решения некорректных задач Коши второго порядка // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. Международная конференция, Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, 31 октября–3 ноября 2016 г. Тезисы докладов. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова; МАКС Пресс, 2016. 160.
13. *Edmunds D.E., Evans W.D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Clarendon Press, 1987.
14. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
15. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1962. **15**. 119–147.
16. *Stewart H.B.* Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators // Transactions of the American Mathematical Society. 1974. **199**. 141–162.
17. *Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В.* Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. **31**, № 1. 64–74.
18. *Baumeister J., Leitão A.* On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. **9**, N 1. 13–29.
19. *Латтес Р., Лионс Ж.–Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
20. *Пискарев С.И.* Об оценках скорости сходимости при полудискретизации эволюционных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1983. **19**, № 12. 2153–2159.
21. *Пискарев С.И.* Решение эволюционных уравнений второго порядка в условиях Крейна–Фатторини // Дифференциальные уравнения. 1985. **21**, № 9. 1604–1612.
22. *Пискарев С.И.* Оценки скорости сходимости при решении некорректных задач для эволюционных уравнений // Известия АН СССР. Серия математическая. 1987. **51**, № 3. 676–687.
23. *Пискарев С.И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их аппроксимация. М.: Издательство МГУ, 2005.
24. *Васильев В.В., Пискарев С.И., Селиванова Н.Ю.* Проинтегрированные полугруппы, C-полугруппы и их приложения // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 131. М.: ВИНИТИ, 2017. 3–109.
25. *Benrabah A., Boussetila N., Rebbani F.* Regularization method for an ill-posed Cauchy problem for elliptic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2017. **25**, N 3. 311–329.
26. *Gekeler E.* Discretization Methods for Stable Initial Value Problems. Berlin: Springer–Verlag, 1984.

27. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ, 2007.
28. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004.
29. *Haase M.* The functional calculus for sectorial operators. Basel: Birkhäuser, 2006.
30. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
31. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
32. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию
03.07.2017

Rate of Convergence and Error Estimates for Finite-Difference Schemes of Solving Linear Ill-Posed Cauchy Problems of the Second Order

M. M. Kokurin[1]

[1] *Mari State University, Faculty of Physics and Mathematics; pl. Lenina 1, Yoshkar-Ola, 424000, Russia; Lecturer, e-mail: kokurin@nextmail.ru*

Received July 3, 2017

Abstract: Finite-difference schemes of solving ill-posed Cauchy problems for linear second-order differential operator equations in Banach spaces are considered. Several time-uniform rate of convergence and error estimates are obtained for the considered schemes under the assumption that the sought solution satisfies the sourcewise condition. Necessary and sufficient conditions are found in terms of sourcewise index for a class of schemes with the power convergence rate with respect to the discretization step. A number of full discretization schemes for second-order ill-posed Cauchy problems are proposed on the basis of combining the half-discretization in time with the discrete approximation of the spaces and the operators.

Keywords: ill-posed Cauchy problem, Banach space, finite-difference scheme, rate of convergence, error estimate, operator calculus, sectorial operator, interpolation of Banach spaces, finite-dimensional approximation.

References

1. S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space* (Nauka, Moscow, 1967; Amer. Math. Soc., Providence, 1971).

2. V. K. Ivanov, I. V. Mel'nikova, and A. I. Filinkov, *Differential-Operator Equations and Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1995) [in Russian].

3. M. M. Kokurin, "Difference Schemes for Solving the Cauchy Problem for a Second-Order Operator Differential Equation," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **54** (4), 569–584 (2014) [Comput. Math. Math. Phys. **54** (4), 582–597 (2014)].

4. A. B. Bakushinskii, "Difference Schemes for the Solution of Ill-Posed Abstract Cauchy Problems," Differ. Uravn. **7** (10), 1876–1885 (1971).

5. A. B. Bakushinskii, "Difference Methods of Solving Ill-Posed Cauchy Problems for Evolution Equations in a Complex B-Space," Differ. Uravn. **8** (9), 1661–1668 (1972).

6. A. B. Bakushinskii, M. M. Kokurin, and M. Yu. Kokurin, "On a Class of Finite-Difference Schemes for Solving Ill-Posed Cauchy Problems in Banach Spaces," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **52** (3), 483–498 (2012) [Comput. Math. Math. Phys. **52** (3), 411–426 (2012)].

7. M. M. Kokurin, "Improvement of the Rate of Convergence Estimates for Some Classes of Difference Schemes for Solving an Ill-Posed Cauchy Problem," Vychisl. Metody Programm. **14**, 58–76 (2013).

8. A. B. Bakushinskii, M. Yu. Kokurin, and V. V. Klyuchev, "Convergence Rate Estimation for Finite-Difference Methods of Solving the Ill-Posed Cauchy Problem for Second-Order Linear Differential Equations in a Banach Space," Vychisl. Metody Programm. **11**, 25–31 (2010).

9. A. B. Bakushinskii, M. M. Kokurin, and M. Yu. Kokurin, "On a Complete Discretization Scheme for an Ill-Posed Cauchy Problem in a Banach Space," Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN **18** (1), 96–108 (2012) [Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.) **280**, suppl. 1, 53–65 (2013)].

10. M. M. Kokurin, "Necessary and Sufficient Conditions for the Polynomial Convergence of the Quasi-Reversibility and Finite-Difference Methods for an Ill-Posed Cauchy Problem with Exact Data," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **55** (12), 2027–2041 (2015) [Comput. Math. Math. Phys. **55** (12), 1986–2000 (2015)].

11. M. M. Kokurin, "Polynomial Estimates for the Convergence Rate of Difference Schemes for Ill-Posed Cauchy Problems," in *Proc. Int. Workshop on Inverse and Ill-Posed Problems, Moscow, Russia, November 19–21, 2015* (Ross. Univ. Druzhby Narodov, Moscow, 2015), pp. 97–98.

12. M. M. Kokurin, "Error Estimates of Difference Schemes for Solving Second-Order Ill-Posed Cauchy Problems," in *Proc. Int. Conf. on Contemporary Problems of Mathematical Physics and Computational Mathematics, Moscow, Russia, October 31–November 3, 2016* (MAKS Press, Moscow, 2016), p. 160.

13. D. E. Edmunds and W. D. Evans, *Spectral Theory and Differential Operators* (Clarendon, Oxford, 1987.

14. S. Mizohata, *Theory of Partial Differential Equations* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973; Mir, Moscow, 1977).

15. S. Agmon, "On the Eigenfunctions and on the Eigenvalues of General Elliptic Boundary Value Problems," Comm. Pure Appl. Math. **15** (2), 119–147 (1962).

16. H. B. Stewart, "Generation of Analytic Semigroups by Strongly Elliptic Operators," Trans. Amer. Math. Soc. **199**, 141–162 (1974).

17. V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, and A. V. Fomin, "An Iterative Method for Solving the Cauchy Problem for Elliptic Equations," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **31** (1), 64–74 (1991) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **31** (1), 45–52 (1991)].

18. J. Baumeister and A. Leitão, "On Iterative Methods for Solving Ill-Posed Problems Modeled by Partial Differential Equations," J. Inv. Ill-Posed Problems **9** (1), 13–29 (2001).

19. R. Lattès and J.-L. Lions, *Methode de Quasi-Reversibilite et Applications* (Dunod, Paris, 1967; Mir, Moscow, 1970).

20. S. I. Piskarev, "Estimates for the Rate of Convergence in Semidiscretization of Evolution Equations," Differ. Uravn. **19** (12), 2153–2159 (1983).

21. S. I. Piskarev, "Solution of Second-Order Evolution Equations under Krein–Fattorini Conditions," Differ. Uravn. **21** (9), 1604–1612 (1985).

22. S. I. Piskarev, "Estimates of the Rate of Convergence in Solving Ill-Posed Problems for Evolution Equations," Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **51** (3), 676–687 [Math. USSR-Izv. **30** (3), 639–651 (1988)].

23. S. I. Piskarev, *Differential Equations in Banach Space and Their Approximation* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2005) [in Russian].

24. V. V. Vasil'ev, S. I. Piskarev, and N. Yu. Selivanova, "Integrated Semigroups and C-Semigroups and Their Applications," (VINITI, Moscow, 2017), Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., Vol. 131, pp. 3–109.

25. A. Benrabah, N. Boussetila, and F. Rebbani, "Regularization Method for an Ill-Posed Cauchy Problem for Elliptic Equations," J. Inv. Ill-Posed Problems **25** (3), 311–329 (2017).

26. E. Gekeler, *Discretization Methods for Stable Initial Value Problems* (Springer, Berlin, 1984).

27. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Numerical Methods* (Binom, Moscow, 2007) [in Russian].

28. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators. General Theory* (Interscience, New York, 1958; Editorial, Moscow, 2004).

29. M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators* (Birkhäuser, Basel, 2006).

30. H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators* (North-Holland, Amsterdam, 1978; Mir, Moscow, 1980).

31. V. A. Trenogin, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].

32. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer, Berlin, 1966; Mir, Moscow, 1972).