

УДК 532.546

doi 10.26089/NumMet.v19r102

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ГИБРИДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ В ЗАДАЧАХ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А. И. Никифоров¹, Р. В. Садовников²

Рассматривается применение параллельных вычислений для решения задач двухфазной фильтрации с большим количеством скважин на гибридной вычислительной системе, позволяющей использовать ядра центрального процессора и ядра графического процессора.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация в пористых средах, параллельные вычисления, графические процессоры, метод контрольных объемов.

1. Введение. Применение современных вычислительных ресурсов гибридной архитектуры для решения задач механики сплошных сред широко обсуждается в научной литературе [1, 2]. Предлагаются различные подходы, новые разностные схемы, модифицируются алгоритмы решения системы линейных алгебраических уравнений, которые возникают при решении краевых задач. Современные технологии параллельного программирования позволяют перейти к более детальному моделированию протекающих процессов, повысить точность расчетов, значительно сократить время вычислительного эксперимента, осуществить за разумное время многовариантные расчеты для предсказания поведения моделируемого процесса в будущем.

В работе [3] предложена модификация уравнения неразрывности с учетом минимального масштаба осреднения по пространству и времени установления внутреннего равновесия системы, что позволило перейти от параболической к гиперболической системе уравнений при описании процессов фильтрации и теплопроводности. В рамках модели, основанной на кинетическом подходе, в работе [4] обсуждаются вопросы применения явных трехслойных схем для моделирования процессов двухфазной фильтрации с учетом капиллярных и гравитационных сил. В работе [5] на примере задачи о просачивании с большим количеством узлов (около 1.5 миллиардов) расчетной области показано, что надлежащий выбор модели и адаптация алгоритмов к архитектуре гибридной вычислительной системы позволяют получать ускорения, большие, чем при использовании классических многопроцессорных систем. В работе [6] на основе кинетического подхода [3–5] такие модели обобщены для задач неизотермической трехфазной фильтрации (вода–нефть–газ) с учетом возможных источников тепловыделения. Предложен вычислительный алгоритм явного типа, параллельная реализация которого ориентирована на высокопроизводительные системы с графическими ускорителями. В работе [7] рассматривается применение кинетических моделей для вычислительных систем с экстра-массивным параллелизмом. В работе [8] рассматривается решение задач математического моделирования процессов нефтедобычи на основе кинетического подхода с применением высокопроизводительных вычислительных систем. В работе [9] рассматривается реализация алгоритма BiCGStab (BiConjugate Gradient Stabilized) с блочным ILU(0) предобуславливателем (Incomplete LU factorization preconditioner) на графических картах AMD FirePro v9800 и Nvidia Tesla C2075, а также на вычислительном сопроцессоре Intel Xeon Phi 5110P и на двух процессорах Intel Xeon E5-2680. Результаты тестирования при моделировании реальных месторождений показали, что на использованном алгоритме обе видеокарты уступают в производительности последнему поколению процессоров Intel.

В работе [10] применены методы декомпозиции для решения трехмерной задачи двухфазной фильтрации жидкости на графической видеокарте семейства Nvidia GeForce GTS 250. Реализация алгоритмов декомпозиции для графического процессора позволила получить ускорение при числе скважин не более 100.

В работах [11, 12] для решения задачи фильтрации к системе скважин методом контрольных объемов на неструктурированной сетке, дуальной к сетке треугольников Делоне, применены методы подпространств Крылова с предобуславливанием на графических ускорителях Nvidia. В работе [13] для задач математического моделирования процессов фильтрации была предложена схема вычислений на

¹ Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, Казань; главный науч. сотр., e-mail: nikiforov@imm.knc.ru

² Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, Казань; ст. науч. сотр., e-mail: sadovnikov@imm.knc.ru

нескольких графических устройствах одновременно. Для хранения матрицы на нескольких графических устройствах был адаптирован формат DMSR (Distributed Modified Sparse Row), а также предложена схема матрично-векторного и векторно-векторного произведений. Использование нескольких графических устройств одновременно и обмен данными между ними через общую память центрального процессора (CPU) был осуществлен средствами технологии OpenMP [14]. Операции с матрицами и векторами локально на каждом графическом устройстве реализованы с помощью технологии CUDA [15]. Для балансировки загрузки графических процессоров (GPU) использовался метод декомпозиции области на подобласти с помощью методов, основанных на теории графов [16]. Ускорение расчетов одновременно на трех графических устройствах Nvidia в 6 раз превысило расчеты на кластере с 8 процессорами Opteron 246.

В работе [17] для решения задач фильтрации предложена схема распределения вычислений на гетерогенном кластере, узлы которых оснащаются многоядерными центральными процессорами и несколькими графическими ускорителями [18]. В работе [17] предложено и исследовано несколько схем параллелизма, способ хранения матрицы задачи на нескольких вычислительных узлах и графических устройствах этих узлов, а также рассмотрена реализация операций матрично-векторного и векторно-векторного произведений для каждой схемы. Предложен метод двухуровневой декомпозиции области для использования на гетерогенном кластере, который позволяет получить дополнительное измельчение области без увеличения нагрузки на коммуникационную сеть. В работе [19] для решения задач заводнения нефтяных пластов с применением полимердисперсных систем на многопроцессорной вычислительной системе предложен вычислительный алгоритм и дана оценка эффективности параллельных расчетов с помощью технологии MPI.

При прогнозировании поведения пластовой системы с большим числом скважин возмущения, вносимые фронтами насыщенности от нагнетательных скважин, изменение подвижностей и динамическое перераспределение фаз в пласте, а также взаимовлияние скважин и неоднородность абсолютной проницаемости в слоях существенно влияют на распределение давления и насыщенности в пластах, что увеличивает количество итераций на каждом шаге по времени. В настоящей статье обсуждается применение и программная реализация параллельных вычислений для решения задач двухфазной фильтрации с большим количеством скважин на стандартном персональном компьютере, оснащенный видеокартой Nvidia, который может рассматриваться как гибридная вычислительная система, позволяющая использовать как ядра центрального процессора, так и ядра графического ускорителя. Эффективность расчетов показана на прогнозе разработки одного из месторождений республики Татарстан на длительный срок с большим числом добывающих и нагнетательных скважин.

2. Математическая модель. Для описания процессов фильтрации в трехмерном пласте используется двухфазная изотермическая модель фильтрации слабосжимаемых несмешивающихся жидкостей, движение которых описывается обобщенным законом Дарси. В случае двухфазной фильтрации, когда в пласте движутся нефть и вода, исходная система уравнений упрощается и может быть представлена в следующем виде [20]:

— уравнений сохранения массы фаз в стандартных условиях:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{B_o} S_o \right) + \nabla \left(\frac{1}{B_o} U_o \right) = q_o, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{B_w} S_w \right) + \nabla \left(\frac{1}{B_w} U_w \right) = q_w, \quad (2)$$

— уравнений движения фаз:

$$U_o = -\frac{k}{\mu_o} f_o \nabla (P_o - \rho_o g z), \quad (3)$$

$$U_w = -\frac{k}{\mu_w} f_w \nabla (P_w - \rho_w g z). \quad (4)$$

В приведенных выше уравнениях введены следующие обозначения: P_i — давление в i -й фазе (здесь и далее $i = o, w$ — нефть и вода соответственно); ρ_i — плотность фазы в стандартных условиях; B_i — объемный коэффициент фазы; P_c — капиллярная разность давлений в фазах; S_i — насыщенность пласта фазой; U_i — скорость фильтрации фазы; f_i — функция относительной фазовой проницаемости; μ_i — динамическая вязкость фазы; m — пористость; t — время; q_i — объем фазы, добываемый из единичного объема пласта в единицу времени при нормальных условиях (точечные источники и стоки, моделирующие работу скважин); k — коэффициент абсолютной проницаемости пласта.

Разность давлений в фазах принимается равной капиллярному давлению:

$$P_o - P_w = P_c. \tag{5}$$

Насыщенности фаз удовлетворяют условию полного насыщения пористой среды:

$$S_o + S_w = 1. \tag{6}$$

3. Аппроксимация методом контрольных объемов. В качестве метода решения используется метод контрольных объемов, который позволяет построить дискретизацию задачи (1)–(6) на неструктурированной сетке, удовлетворяющей условию консервативности. Для этого область течения в плане разбивается на подобласти ячейками диаграммы Вороного (рис. 1), построенной на основе триангуляции Делоне.

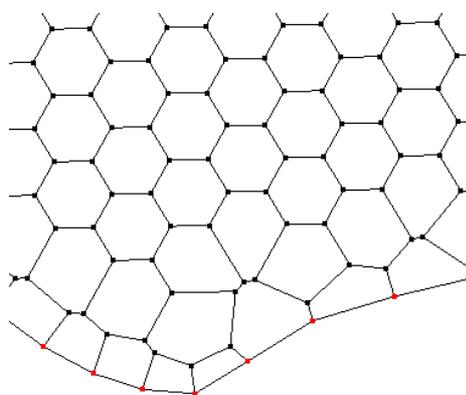


Рис. 1. Фрагмент сетки

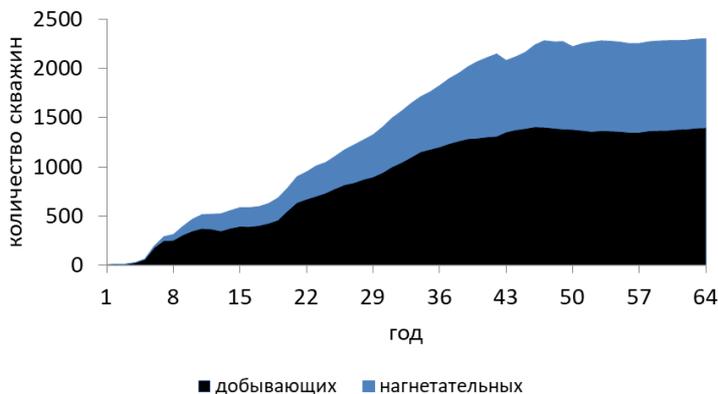


Рис. 2. Динамика изменения количества скважин по годам

По напластованию залежь представляется в виде набора из N слоев. Слои могут совпадать с реальными пластами, представлять отдельные пласты в виде набора слоев или объединять схожие по строению пласты в один слой. Аппроксимация уравнений (1)–(6) по методу контрольных объемов на неструктурированной сетке относительно давления в нефти P и водонасыщенности S_w имеет вид

$$\begin{aligned}
 V_i c_{pi} \frac{dP_i}{dt} + B_{o,i} \sum_j \lambda_{o,ij} T_{ij} (P_i - P_j - \rho_{oi} g z_i + \rho_{oj} g z_j) + \\
 + B_{w,i} \sum_j \lambda_{w,ij} T_{ij} (P_i - P_j - \rho_{wi} g z_i + \rho_{wj} g z_j - P_{ci} + P_{cj}) = q_i, \\
 m V_i \frac{dS_{w,i}}{dt} + m c_{si} V_i S_{w,i} \frac{dP_i}{dt} + B_{w,i} \sum_j \lambda_{w,ij} T_{ij} (P_i - P_j - \rho_{wi} g z_i + \rho_{wj} g z_j - P_{ci} + P_{cj}) = q_{wi},
 \end{aligned}$$

где
$$\begin{cases}
 c_{pi} = \left(m_0 C_m - (1 - S_w) \frac{m dB_o}{B_o dP} - S_w \frac{m dB_w}{B_w dP} \right)_i, & T_{ij} = \frac{K_{i,j}^{mid} A_{ij}}{R_{ij}}, & \lambda_{o,ij} = \frac{(f_o)_{i,j}^{up}}{(B_o \mu_o)_{i,j}^{mid}}, \\
 \lambda_{w,ij} = \frac{(f_w)_{i,j}^{up}}{(B_w \mu_w)_{i,j}^{mid}}, & c_{si} = \left(C_m m_0 - \frac{m dB_w}{B_w dP} \right)_i, & q_i = q_{oi} + q_{wi}, \\
 q_{o,i} = W I_i \lambda_{oi} (P_z - P_i - \rho_{o,l} g (z_n - z_i)), & q_{w,i} = W I_i \lambda_{wi} (P_z - P_i + P_{ci} - \rho_{w,l} g (z_n - z_i));
 \end{cases}$$

C_m — коэффициент сжимаемости породы пласта; A_{ij} — площадь грани, нормальной по отношению к отрезку, соединяющему узлы i и j ; R_{ij} — длина отрезка, соединяющего узлы i и j ; $(\cdot)_{i,j}^{mid}$ — среднее гармоническое значений физической величины в узлах сетки i и j ; $(f_o)_{i,j}^{up}$ — значение относительной фазовой проницаемости, взвешенное вверх по потоку [20]; $W I_i = 2\pi \Delta z_i \left(\ln \frac{r_{p,i}}{r_c} + s_i \right)^{-1}$ — коэффициент продуктивности сегмента скважины [21]; Δz_i — длина сегмента скважины; s_i — скин-фактор сегмента скважины; r_c — радиус i -й скважины; $r_{p,i}$ — эквивалентный радиус i -й скважины; P_z — забойное давление на i -й скважине на глубине z_n .

Объемные дебиты скважин определяются по формулам $q_o = \sum_{l=1}^{N_L} q_{o,l}$ и $q_w = \sum_{l=1}^{N_L} q_{w,l}$, где N_L — количество блоков сетки, через которые проходит скважина.

Для аппроксимации по времени используется схема метода IMPES (IMplicit Pressure Explicit Saturation) [23]. Шаг по времени при расчете поля насыщенности регулируется выполнением условия Куранта–Фридрихса–Леви [22].

4. Алгоритм и программная реализация. Алгоритм параллельных расчетов реализован так, что система уравнений для давления решалась на GPU с помощью параллельных программ библиотеки, рассмотренной в [11–13, 17]. Эта библиотека реализует итерационные методы подпространств Крылова с предобуславливанием и основана на использовании технологий Nvidia CUDA, OpenMP и MPI. Библиотека позволяет использовать эти технологии как по отдельности, так и совместно в зависимости от заданных настроек. Для подсчета значений насыщенности использовались ядра CPU с помощью технологии OpenMP [14]. Основной код программы для решения задачи моделирования фильтрации к скважинам реализован на языке Fortran 95 [23]. С целью эффективного применения библиотеки в программе на Fortran 95 использованы возможности этого языка для объектно-ориентированного программирования. Это позволило записать классы — обертки на языке Fortran 95 для объектов C++, что избавило от многократного выделения, влаления и копирования памяти.

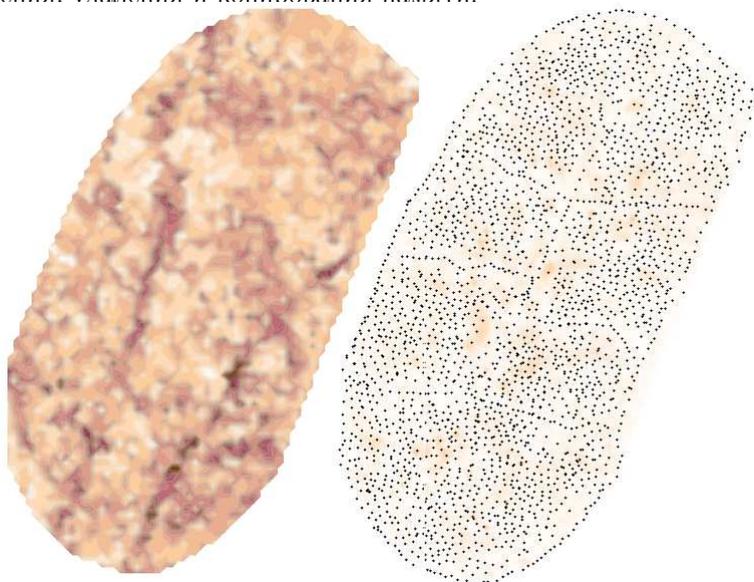


Рис. 3. Подвижные запасы нефти: слева — начальные запасы, справа — конечные запасы (показано положение скважин, пробуренных на объекте)

5. Численные результаты. Расчеты проводились для численной модели одного из месторождений республики Татарстан. Месторождение состоит из восьми пластов и в модели представлено 11 слоями. Площадь составляет 305 Мм². Эффективный объем 5.5 Гм³. Средняя эффективная толщина объекта 18.1 м. Суммарный объем пор 1.1 Гм³. Общее количество расчетных блоков сетки 330 000. Общее количество ненулевых элементов матрицы составило 2 105 000. Моделировалось 64 года разработки с общим количеством скважин 2593. Динамика изменения количества добывающих и нагнетательных скважин по годам приведена на рис. 2. На рис. 3 представлены подвижные запасы нефти в пласте на начальный и конечный периоды разработки, а также местоположение скважин.

На рис. 4а представлены изменения объемных дебитов добытой нефти и воды по годам, а также дебита закачанной в пласты жидкости, на рис. 4б представлено изменение коэффициента извлечения нефти (КИН) и обводненности продукции скважин (В).

Для расчетов использовался персональный компьютер в конфигурации Intel(R) Core(TM) i7 CPU 920, 2.67 GHz, SODIMM DDR3 6GB, GPU Nvidia GeForce GTX 590 (2x GF110, 512 kernels), а также следующие программные средства: OS x64 Windows 10 Pro, CUDA 7.0, Intel Fortran Compiler 11.0, Intel C++ Compiler 11.0, MSVS 2010.

Все вычисления на CPU и GPU проводились с двойной точностью. Общее время последовательных расчетов на одном ядре CPU занимало 7 часов 20 минут. Параллельные вычисления давления на GPU

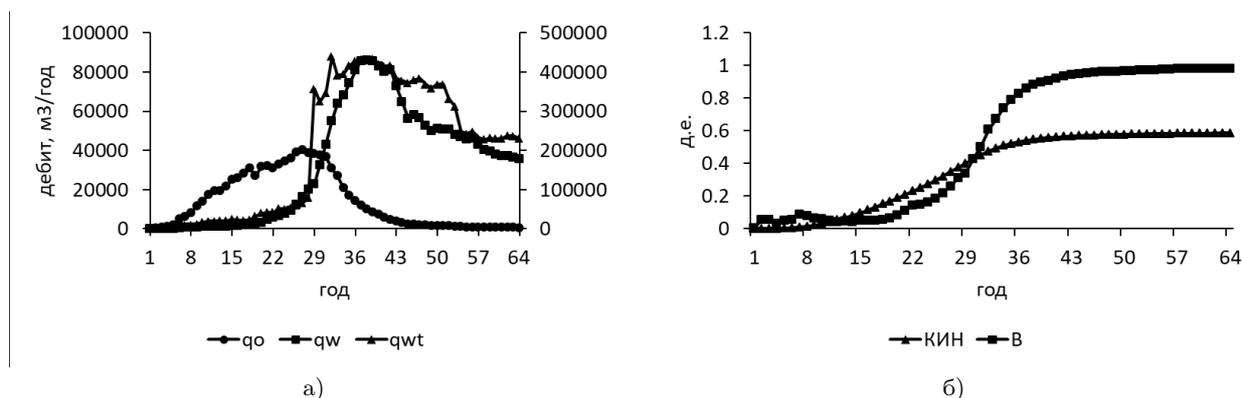


Рис. 4. Характеристики разработки месторождения по годам: а) изменение дебита добытой нефти и воды, а также дебита закачанной жидкости, б) изменение КИН и обводненности

сократили общее время вычислений до 1 часа 11 минут, что ускорило вычисления в 6.2 раза. Далее дополнительно применялось распараллеливание вычисления насыщенности по явной схеме на ядрах CPU с помощью технологии OpenMP [14]. На рис. 5 представлено снижение общего времени решения задачи и прирост ускорения вычислений за счет вычисления насыщенности на ядрах CPU. В результате, общее время вычислений составило 56 минут 21 секунду, а общее ускорение вычислений — в 7.8 раз. Не очень значительный прирост ускорения вычислений насыщенности на ядрах CPU объясняется большей составляющей последовательного кода: инициализация данных при считывании с диска, необходимость в сохранении во время вычислений большого объема информации (полей давления, насыщенности, показателей разработки, контрольных точек восстановления и др.). Дальнейшая работа по оптимизации этой части расчетов поможет в будущем увеличить производительность расчетов на ядрах CPU. К тому же имеется большой потенциал в использовании нескольких графических устройств одновременно, а также кластеров гетерогенной архитектуры, особенно при большом количестве узлов сетки и скважин. Вместе с тем, полученные результаты показывают, что использование гибридных вычислительных систем значительно сокращает общее время расчетов, что позволяет их применять в расчетах прогноза разработки месторождений на длительные сроки.

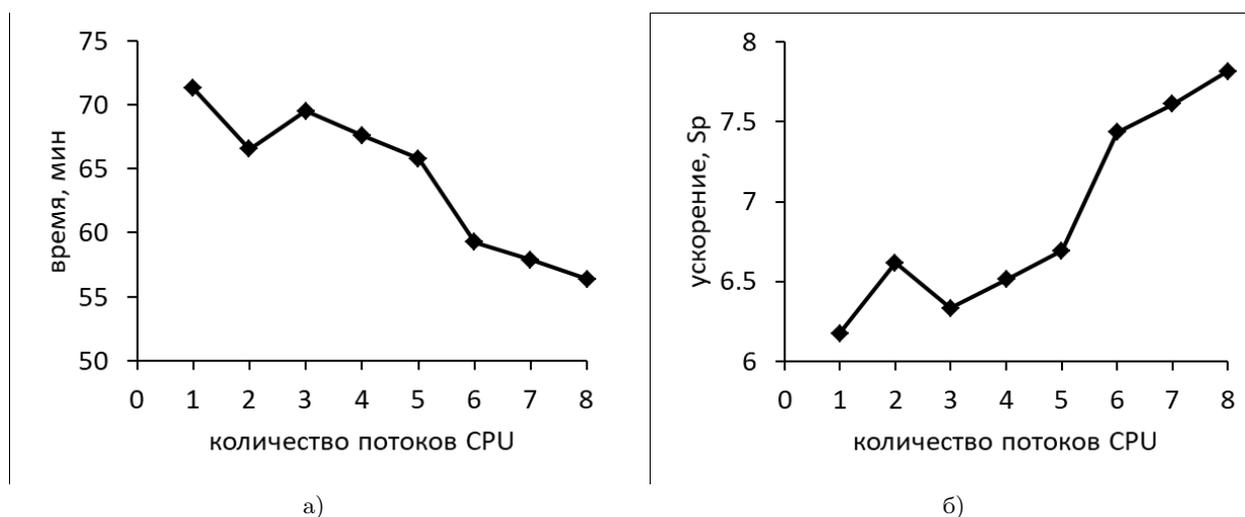


Рис. 5. Зависимость от количества потоков CPU: а) время вычислений, б) ускорение

6. Заключение. В настоящей статье представлены результаты численного моделирования и прогнозирования разработки реального месторождения на длительные сроки с большим числом скважин. Предложен алгоритм параллельных расчетов для задач двухфазной фильтрации на неструктурированной сетке, построенной на основе диаграммы Вороного для гибридных вычислительных систем, позволяющих использовать ядра CPU и ядра GPU. Приведена оценка ускорения параллельных вычислений. Показано, что использование для моделирования и прогнозирования разработки месторождений гибридных вычислительных систем значительно сокращает общее время вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев С.С., Давыдов А.А., Дбар С.А., Карагичев А.Б., Лацис А.О., Плоткина Е.А. Макет гибридного суперкомпьютера МВС-Экспресс // Тезисы докладов 17-й Всероссийской конференции “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам”. М., 2008.
2. Давыдов А.А., Лацис А.О., Луцкий А.Е., Смольянов Ю.П., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В. Многопроцессорная вычислительная система гибридной архитектуры МВС-Экспресс // Доклады АН. Информатика. 2010. **434**, № 4. 459–463.
3. Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной явной схеме для решения задач фильтрации // Матем. моделиров. 2010. **22**, № 4. 99–109.
4. Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Использование явных схем для моделирования процесса двухфазной фильтрации // Матем. моделиров. 2011. **23**, № 7. 52–60.
5. Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Моделирование задач фильтрации на гибридных вычислительных системах // Матем. моделиров. 2012. **24**, № 10. 33–39.
6. Люпа А.А., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Моделирование трехфазной фильтрации явными методами на гибридных вычислительных системах // Матем. моделиров. 2014. **26**, № 4. 33–43.
7. Четверушкин Б.Н. Кинетические модели для решения задач механики сплошной среды на суперкомпьютерах // Матем. моделиров. 2015. **27**, № 5. 65–79.
8. Люпа А.А., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г., Лемешевский С.В. Моделирование процессов нефтедобычи с применением высокопроизводительных вычислительных систем // Матем. моделиров. 2015. **27**, № 9. 73–80.
9. Богачев К.Ю., Богатый А.С., Лапин А.Р. Использование графических ускорителей и вычислительных сопроцессоров при решении задачи фильтрации // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 357–361.
10. Ценаев А.В. Методы декомпозиции для решения задач двухфазной фильтрации жидкости на базе графического процессора // Сборник трудов Пятой международной конференции “Параллельные вычисления и задачи управления”. М.: ИПУ РАН им. В.А. Трапезникова, 2010. 199–204.
11. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В. Использование графических процессоров для решения разреженных СЛАУ итерационными методами подпространств Крылова с предобуславливанием на примере задач теории фильтрации // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Информационные технологии. 2011. № 1. 205–212.
12. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В. Библиотека `gpu_sparse` для численного решения задач механики сплошных сред на гибридной вычислительной системе // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Информационные технологии. 2011. № 2. 190–196.
13. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В. Библиотека шаблонов итерационных методов подпространств Крылова для численного решения задач механики сплошных сред на гибридной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 351–359.
14. OpenMP Architecture Review Board (<http://www.openmp.org>). Cited November 11, 2017.
15. NVIDIA Corporation. CUDA Toolkit Documentation v9.1.85. <http://docs.nvidia.com/cuda/index.html>. Cited November 11, 2017.
16. Hendrickson B., Leland R. The Chaco user’s guide. Technical Report Sand93–2339. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1993.
17. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В. Об особенностях использования архитектуры гетерогенного кластера для решения задач механики сплошных сред // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 450–460.
18. Дбар С.А., Басс Л.П., Лацис А.О., Марков М.Б., Савельев Г.П., Смольянов Ю.П., Храпцов М.Ю. Опыт эксплуатации суперкомпьютера К-100 в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН // Информационные технологии и вычислительные системы. 2016. № 2. 5–12.
19. Никифоров А.И., Садовников Р.В. Решение задач заводнения нефтяных пластов с применением полимердисперсных систем на многопроцессорной вычислительной системе // Матем. моделирование. 2016. **28**, № 8. 112–126.
20. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982.
21. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // SPE J. 1978. **18**, N 3. 183–194.
22. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik // Mathematische Annalen. 1928. **100**, N 1. 32–74.
23. Горелик А.М. Программирование на современном Фортране. М.: Финансы и статистика, 2006.

Поступила в редакцию
14.11.2017

Parallel Computations on a Hybrid Computing System for Two-Phase Filtration Problems

A. I. Nikiforov¹ and R. V. Sadovnikov²

¹ *Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences; ulitsa Lobachevskogo 2/31, Kazan, 420111, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: nikiforov@imm.knc.ru*

² *Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences; ulitsa Lobachevskogo 2/31, Kazan, 420111, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: sadovnikov@imm.knc.ru*

Received November 11, 2017

Abstract: The application of parallel computations to solve two-phase filtration problems with a large number of wells on a hybrid computer system is considered, which makes it possible to use the cores of the central processor and the cores of the graphics processor.

Keywords: two-phase filtration in porous media, parallel computing, graphics processors, control volume method.

References

1. S. S. Andreev, A. A. Davydov, S. A. Dbar, et al., "A Model of the MVS-Express Hybrid Supercomputer," in *Proc. 17th All-Russian Conf. on Theoretical Foundations and Development of Numerical Algorithms and Solution of Problems in Mathematical Physics with Applications to Multiprocessor Systems, Abrau-Durso, Russia, September 15–21, 2008* (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2008).
2. A. A. Davydov, A. O. Latsis, A. E. Lutsy, et al., "The Hybrid Supercomputer MVS-Express," *Dokl. Akad. Nauk* **434** (4), 459–463 (2010) [*Dokl. Math.* **82** (2), 816–819 (2010)].
3. B. N. Chetverushkin, D. N. Morozov, M. A. Trapeznikova, et al., "An Explicit Scheme for the Solution of the Filtration Problems," *Mat. Model.* **22** (4), 99–109 (2010) [*Math. Models Comput. Simul.* **2** (6), 669–677 (2010)].
4. D. N. Morozov, M. A. Trapeznikova, B. N. Chetverushkin, and N. G. Churbanova, "Application of Explicit Schemes to Simulation of Two-Phase Filtration Process," *Mat. Model.* **23** (7), 52–60 (2011) [*Math. Models Comput. Simul.* **4** (1), 62–67 (2012)].
5. D. N. Morozov, M. A. Trapeznikova, B. N. Chetverushkin, and N. G. Churbanova, "Simulation of Filtration Problems on Hybrid Computer Systems," *Mat. Model.* **24** (10), 33–39 (2012) [*Math. Models Comput. Simul.* **5** (3), 208–212 (2013)].
6. A. A. Lyupa, D. N. Morozov, M. A. Trapeznikova, et al., "Three-Phase Filtration Modeling by Explicit Methods on Hybrid Computer Systems," *Mat. Model.* **26** (4), 33–43 (2014) [*Math. Models Comput. Simul.* **6** (6), 551–559 (2014)].
7. B. N. Chetverushkin, "Kinetic Models for Solving Continuum Mechanics Problems on Supercomputers," *Mat. Model.* **27** (5), 65–79 (2015) [*Math. Models Comput. Simul.* **7** (6), 531–539 (2015)].
8. A. A. Lyupa, D. N. Morozov, M. A. Trapeznikova, et al., "Simulation of Oil Recovery Processes with the Employment of High-Performance Computing Systems," *Mat. Model.* **27** (9), 73–80 (2015) [*Math. Models Comput. Simul.* **8** (2), 129–134 (2016)].
9. K. Yu. Bogachev, A. S. Bogaty, and A. P. Lapin, "Use of Graphics Cards and Coprocessors for Solving Filtration Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 357–361 (2013).
10. A. V. Tsepaev, "Decomposition Methods for Solving Two-Phase Filtration Problems Using Graphics Processors," in *Proc. 5th Int. Conf. on Parallel Computing and Control Problems, Moscow, Russia, October 26–28, 2010* (Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, 2010), pp. 199–204.
11. D. A. Gubaidullin, A. I. Nikiforov, and R. V. Sadovnikov, "Using Graphics Processors to Solve Sparse SLAE by Preconditioned Krylov Subspace Iterative Methods as Shown by the Example of Subsurface Flow Theory Problems," *Vestn. Lobachevskii Univ. Nizhni Novgorod*, No. 1, 205–212 (2011).
12. D. A. Gubaidullin, A. I. Nikiforov, and R. V. Sadovnikov, "GPU Sparse Library for the Numerical Solution of Continuum Mechanics Problems on a Hybrid Computing System," *Vestn. Lobachevskii Univ. Nizhni Novgorod*, No. 2, 190–196 (2011).

13. D. A. Gubaidullin, A. I. Nikiforov, and R. V. Sadovnikov, "A Library of Templates of Iterative Krylov Subspace Methods for the Numerical Solution of Continuum Mechanics Problems on Hybrid Computing Systems," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 351–359 (2010).
14. OpenMP Architecture Review Board. <http://www.openmp.org>. Cited December 29, 2017.
15. NVIDIA Corporation. CUDA Toolkit Documentation v9.1.85. <http://docs.nvidia.com/cuda/index.html>. Cited December 29, 2017.
16. B. Hendrickson and R. Leland, *The Chaco User's Guide*, Technical Report Sand93–2339 (Sandia National Laboratories, Albuquerque, 1993).
17. D. A. Gubaidullin, A. I. Nikiforov, and R. V. Sadovnikov, "On Peculiarities of Using Heterogeneous Cluster Architecture for Solving Continuum Mechanics Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 450–460 (2011).
18. S. A. Dbar, L. P. Bass, A. O. Lacin, et al., "K-100 Supercomputer Maintenance Experience in the Keldysh Institute of Applied Mathematics," *Inform. Tekhnol. Vychisl. Sistemy*, No. 2, 5–12 (2016).
19. A. I. Nikiforov and R. V. Sadovnikov, "Solution Problems of Oil Recovery with Waterflood Using Polymer-Disperse Systems on Multiprocessor Computer Systems," *Mat. Model.* **28** (8), 112–126 (2016) [*Math. Models Comput. Simul.* **9** (2), 221–231 (2017)].
20. K. Aziz and A. Settari, *Petroleum Reservoir Simulation* (Appl. Sci. Publ., London, 1979; Nedra, Moscow, 1982).
21. D. W. Peaceman, "Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation," *SPE J.* **18** (3), 183–194 (1978).
22. R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, "Über die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik," *Mathematische Annalen* **100** (1), 32–74 (1928).
23. A. M. Gorelik, *Programming in Modern Fortran* (Finansy i Statistika, Moscow, 2006).