

УДК 519.633.9

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ С ВЭЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЕЙ В ЗАДАЧЕ ДВУМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

В. В. Пикалов¹, А. В. Непомнящий¹

В данной работе рассмотрена модификация итерационного алгоритма на основе ряда Неймана с вэйвлет-фильтрацией на каждом шаге. Вычислительный эксперимент показал, что для малоракурсной томографии новый алгоритм позволяет достичь лучшей точности реконструкции в сравнении с алгоритмами Гершберга–Папулиса, максимума энтропии и обратного проецирования с фильтрацией. Данный вывод получен как для гладких, так и для разрывных моделей.

Ключевые слова: вычислительная томография, вэйвлет-фильтрация, итерационные алгоритмы, ряд Неймана, математическое моделирование.

1. Введение. При постановке томографических задач в условиях физического эксперимента, в частности в области диагностики плазмы и газодинамических потоков, количество направлений наблюдения невелико. Для работы с малым числом ракурсов особое значение имеют итерационные методы получения приближенных оценок томограмм, использующие последовательное введение в алгоритм априорной физической информации [1, 2]. Из них наиболее известны следующие алгоритмы вычислительной томографии (ВТ): алгоритм Гершберга–Папулиса (Gerchberg–Papoulis, далее — алгоритм GP), основанный на пошаговом исправлении оценки томограммы, а затем ее фурье-спектра [1, 3, 4]; алгоритм максимума энтропии (MENT) [5], использующий разложение искомой двумерной функции в произведение функций, являющихся постоянными вдоль каждого направления наблюдения и переменными лишь в перпендикулярном направлении (ridge-functions [6, 7]). Для реконструкции в качестве начального приближения в данной работе применялся часто используемый в медицинских приложениях метод фильтрации и обратного проецирования (Filtered Back Projection, FBP) [1, 8]. В работе рассматривается модификация итерационного алгоритма, реализующего разложение неизвестного обратного оператора в ряд Неймана по степеням прямого оператора, со сглаживанием на каждой итерации вектора невязки с помощью вэйвлет-фильтрации.

Вэйвлет-преобразование (ВП) [9–11] хорошо зарекомендовало себя как инструмент анализа при применении его в алгоритмах решения томографических задач [12]. Область применения ВП в томографии достаточно широка: кратномасштабный анализ томограмм, позволяющий выделять структуры различных размеров в искомой функции [13, 14]; подавление шумов [15]; выделение структур в локальной постановке задачи [16, 17].

2. Теория. Рассмотрим задачу восстановления неизвестной двумерной функции $g(x, y)$ по набору проекционных данных $f(\xi_i, p_j)$, представляющих собой зашумленные интегралы от $g(x, y)$ вдоль прямых, задаваемых параметрами $\{\xi_i\}$, $\xi_i \in [0, 180)$, $i = 1, \dots, K$ и $\{p_j\}$, $p_j \in [-1, 1]$: $-x \sin \xi_i + y \cos \xi_i = p_j$, $j = 1, \dots, N$. В такой постановке — это обратная задача для преобразования Радона $f = Rg + \eta$, где η — шумовая составляющая проекционных данных. Число N называется числом отсчетов на проекции, K — числом ракурсов. Преимущества того или иного метода решения этой задачи в большой степени определяются спецификой геометрии сбора проекционных данных [18]. В данной работе рассматривается задача малоракурсной томографии, когда число углов наблюдения ξ_i невелико. Вычислительный эксперимент проводился для различных модельных функций. Для количественной характеристики работы алгоритмов использовалась среднеквадратичная ошибка реконструкции Δ (в %):

$$\Delta^2 = \frac{\sum_i \sum_j (g_{ij} - g_{ij}^{\text{exact}})^2}{\sum_i \sum_j (g_{ij}^{\text{exact}})^2},$$

¹ Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, г. Новосибирск; e-mail: pickalov@itam.nsc.ru

где g_{ij}^{exact} и g_{ij} — значения соответственно точной и восстановленной томограммы на дискретной сетке ($i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$). Числа N_x, N_y называются размерностями томограммы. Кратко опишем далее основные известные подходы для малоракурсной параллельной томографии.

2.1. Метод максимума энтропии. Пусть

$$f_\xi(p) = f(\xi, p) = \int_{-1}^1 g(s, p) ds \tag{1}$$

— проекционные данные вдоль прямых $p = p_j$ в системе координат (s, p) , повернутой относительно (x, y) на угол ξ . Функционал энтропии выберем в виде [5]

$$\psi(g) = - \iint_D g(x, y) \ln[g(x, y)A] dx dy,$$

где A — площадь области реконструкции D . Выбирая максимум $\psi(g)$ при ограничениях (1) получаем задачу на безусловный экстремум функционала

$$\Psi(g, \Lambda) = \psi(g) - \sum_j \int \Lambda_j(p) \left[f_j(p) - \int g(s, p) ds \right] dp.$$

Здесь Λ_j — множители Лагранжа. После взятия производной по g получаем выражение

$$g(x, y) = A^{-1} \prod_j H_j(x \cos \xi_j + y \sin \xi_j), \tag{2}$$

где $H_j(s) = \exp(\Lambda_j(s) - 1/K)$. В итоге метод приводит к разложению искомой функции в произведение одномерных по сути функций, которые для каждого направления постоянны вдоль него и переменны только в перпендикулярном направлении. Подставляя далее (2) в (1), находим итерационную схему для коэффициентов $H_j(s)$:

$$H_j^{i+1}(s) = \frac{Af_j}{\int ds \prod_{k \neq j} H_k^i(-s \sin \xi_{jk} + p \cos \xi_{jk})}.$$

Здесь $\xi_{jk} = \xi_k - \xi_j$ — угол между текущим основным j -м направлением и переменным k -м. По окончании итераций томограмма восстанавливается по формуле (2). Численные исследования описанного метода для задач малоракурсной томографии плазмы были выполнены в работе [19]. В качестве регуляризующей части алгоритма применялись сглаживающие сплайны и медианная фильтрация, что значительно улучшило устойчивость алгоритма. При трех–четырёх ракурсах наблюдения на гладких моделях была достигнута высокая точность восстановления. Для разрывных же функций результаты восстановления сравнимы по точности реконструкции с другими алгоритмами двумерной ВТ.

2.2. Метод Гершберга–Папулиса. Метод основан на применении теоремы о центральном сечении и фурье-синтезе с последующей интерполяцией двумерного спектра [20, 21]. В итерациях используются следующие свойства оператора преобразования Радона:

- 1) по теореме о центральном сечении фурье-образ проекции $F(\xi, \nu_p)$ равен центральному сечению фурье-образа томограммы $G(\nu_x, \nu_y)$ вдоль прямой $-\nu_x \sin \xi + \nu_y \cos \xi = 0$;
- 2) $F(\xi, 0)$ постоянна для всех ξ .

Кроме этих свойств в итерационный процесс вводится информация: о геометрии области реконструкции, о положительности восстановленных значений томограммы, о сохранении энергии в каждом направлении, о гладкости искомого решения и об оценке уровня экспериментального шума.

Итерационные шаги регуляризованного алгоритма ГР выглядят следующим образом.

1) По известному набору проекций с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) получается набор их одномерных фурье-образов. По теореме о центральном сечении эти величины дают в полярной системе координат в фурье-пространстве томограммы значения $G(\xi + \pi/2, \nu)$ на K лучах. Значения спектральных амплитуд зануляются вне указанных лучей.

2) Выполняется обратное двумерное БПФ для получения оценки томограммы $g^i(x, y)$.

3) В получившуюся оценку вносится априорная информация о положительности решения и его пространственной ограниченности.

4) Выполняется прямое двумерное БПФ от оценки томограммы $g^i(x, y)$ после шага 3. Значения спектра на лучах, определенных на шаге 1, заменяются на значения, определенные там же непосредственно по имеющимся проекциям. Вносится также априорная информация о спектре объекта, проводится его сглаживание, согласование с уровнем шума в измерениях.

5) Проверяются критерии окончания итерационного процесса. Если они не выполняются, то осуществляется переход на шаг 2.

Регуляризованная версия алгоритма GR для задач малоракурсной томографии была разработана в [22], там же приведены исследования его свойств для трех ракурсов. Обобщение этого алгоритма на задачу трехмерной томографии (с измерением проекций на лучах — P-преобразование [18]) выполнено в работе [23].

2.3. Метод фильтрации и обратного проецирования. Метод реализует сверточное представление внутреннего интеграла в аналитической формуле инверсии преобразования Радона [1]

$$g(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\xi \int_{-1}^1 f(\xi, p) \psi(p - p_0) dp,$$

где $p_0 = -x \sin \xi + y \cos \xi$ и $\psi(p)$ — фильтр. В данной работе был использован фильтр Шеппа–Логана [8]:

$$\psi(kh_p) = \frac{4}{h_p^2(4k^2 - 1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где h_p — шаг по прицельному параметру p .

2.4. Дискретное вэйвлет-преобразование и КМА в $L^2(R)$. Кратномасштабный анализ (КМА) в $L^2(R)$ определяется следующими свойствами [12].

(1) Существует последовательность замкнутых подпространств V_j , $j \in Z$, такая, что:

- a) $\{0\} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(R)$;
- b) $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j} = L^2(R)$;
- c) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$.

(2) Существует функция ϕ , такая, что $\{\phi(x - k)\}_{k \in Z}$ формирует ортонормированный базис в V_0 .

КМА описывает последовательность вложенных аппроксимационных пространств V_j в $L^2(R)$, таких, что замыканием их объединения является само пространство $L^2(R)$. Проекция произвольной функции $P_{V_j} f$ из $L^2(R)$ на V_j есть аппроксимация, которые сходятся к f при $j \rightarrow \infty$. Далее, пространство V_0 обладает ортонормированным базисом, состоящим из трансляций одной функции ϕ . Эти пространства связаны тем требованием, что элемент f пространства V_j при масштабировании на 2 становится элементом пространства V_{j+1} . Функция ϕ называется *масштабирующей функцией*. Множество $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), k \in Z\}$ образует ортонормированный базис в V_j . Масштабирующая функция ϕ удовлетворяет уравнению для сдвигов, т.е. существует последовательность $\{h_k\}_{k \in Z}$ действительных чисел, такая, что:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} h_k \phi(2x - k).$$

Пространство W_j определяется как ортогональное дополнение к V_j в V_{j+1} , т.е. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ и $W_j \perp V_j$. Имеет место следующее свойство:

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = L^2(R).$$

Существует такая функция ψ , называемая *вэйвлетом, ассоциированным с данным КМА*, что множество $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), k \in Z\}$ образует ортонормированный базис в пространстве W_j , причем

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} g_k \phi(2x - k), \quad g_k = (-1)^k h_{1-k},$$

где $\{h_k\}$ — коэффициенты из уравнения для сдвигов.

Множества $\{h_k\}$ (коэффициенты фильтрации для масштабирующей функции) и $\{g_k\}$ (коэффициенты фильтрации для вэйвлетов) позволяют численно находить значения ϕ и ψ , а также коэффициенты дискретного вэйвлет-преобразования $\{d_j\}$ в разложениях для каждого j :

$$P_{V_j} f(x) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) = \sum_k c_{j-1,k} \phi_{j-1,k}(x) + \sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x).$$

Дискретное вэйвлет-преобразование [24, 25] — это отображение W , переводящее последовательности коэффициентов $\{c_{j,k}\}$ в последовательности $\{c_{j-1,k}, d_{j-1,k}\}$ для $j = J, J - 1, 0$. В нашем случае размерность вектора проекционных данных равна $N = 128 = 2^7$ (на рис. 1 приведен пример одной из проекций для описанной ниже разрывной модели без шума); таким образом, мы имеем $J = 7$ масштабов разложения. Это проиллюстрировано на рис. 2, где изображен результат быстрого вэйвлет-преобразования. Показано семь уровней вэйвлет-коэффициентов для той же проекции, представляющих собой одномерный массив размерности N . Уровень 7 состоит из $N/2$ коэффициентов (номера точек 65–128), уровень 6 из $N/4$ (номера точек 33–64) и т.д.

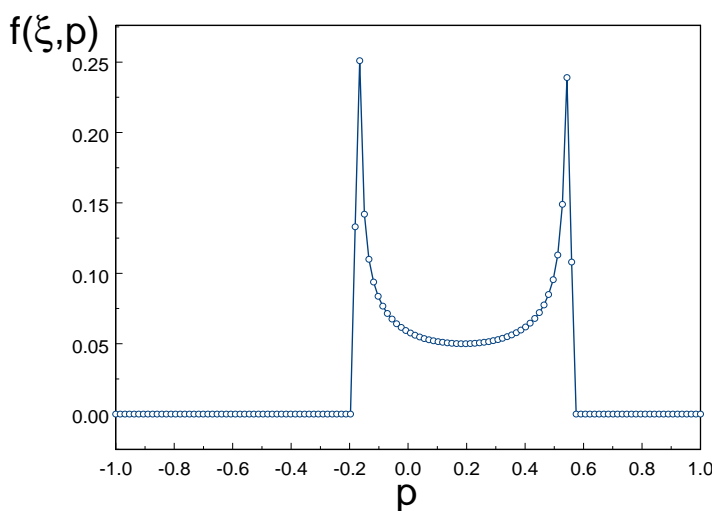


Рис. 1. Проекция на фиксированном направлении $\xi = 60^\circ$

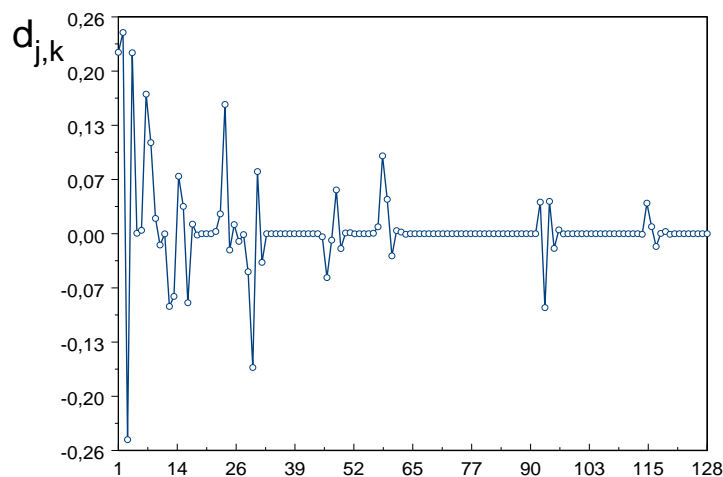


Рис. 2. Коэффициенты вэйвлетов Добеши 12-го порядка для этой же проекции

2.5. Метод разложения оператора R^{-1} в ряд Неймана с применением вэйвлет-фильтрации. Предлагаемый алгоритм реконструкции (Neumann Decomposition with Wavelet Filtering, NDWF) записывается в следующем виде:

$$g^0 = R_0^{-1}L^0f, \quad g^{i+1} = g^i + \lambda^i R_0^{-1}L^i r^i,$$

где R_0^{-1} — приближение оператора обратного преобразования Радона R^{-1} (здесь в качестве R_0^{-1} был использован оператор фильтрации и обратного проецирования); $r^i = f - Rg^i$ — вектор невязки проекционных данных на i -й итерации; λ^i — параметр релаксации; $L^i = W^{-1}\gamma^i W$ — оператор вэйвлет-фильтрации на i -й итерации, γ^i — фильтр на i -й итерации; g^i — приближенное решение на i -й итерации. На каждом шаге итерационного процесса оператор L^i действует на вектор невязки. Это означает, что влияние на решение высокочастотных составляющих (той или иной природы, например, шумов измерений или артефактов реконструкции) в проекционных данных будет зависеть от выбора оператора вэйвлет-фильтрации. Оператор L^i осуществляет прямое и обратное дискретное ВП, подвергая фильтрации вэйвлет-коэффициенты. Для осуществления дискретного ВП был выбран вэйвлет Добеши порядка 12 и использовался алгоритм быстрого ВП [25].

Выпишем следующие шаги нового итерационного алгоритма NDWF.

1) Начальное приближение $g^0(x, y)$ получается после применения к проекционным данным вэйвлет-фильтрации и оператора ФБР.

2) Для текущей оценки томограммы решается прямая задача, вычисляется вектор невязки проекционных данных r^i , который подвергается вэйвлет-фильтрации и действию оператора ФБР.

3) Новая оценка томограммы $g^i(x, y)$ получается добавлением к предыдущей оценке результата выполнения шага 2 с весом λ^i . Параметр релаксации λ^i подбирался из условий сохранения сходимости итераций и достаточно быстрого уменьшения нормы невязки на первых итерациях.

4) Проверяются критерии окончания итерационного процесса. Если они не выполняются, то осуществляется переход на шаг 2. В качестве правила останова итераций может быть выбрана та итерация, после которой начинается рост нормы невязки. Вторым возможным критерием останова — равенство нормы невязки норме шума в сигнале.

Конструирование мультипликативного вэйвлет-фильтра γ напрямую связано с количеством масштабов в вэйвлет-разложении. Количество масштабов $\log_2 N$ определяет число J дискретных значений фильтра. Оператор L действует следующим образом: вэйвлет-коэффициенты каждого уровня j умножаются на соответствующее этому уровню значение фильтра γ . Выбор γ оказывает непосредственное влияние на ход итерационного процесса, а также на результат реконструкции. По аналогии со стандартными методами фильтрации в пространстве Фурье, а также известными видами вэйвлет-фильтрации, такими как жесткая и мягкая фильтрация (hard and soft thresholding) [15, 26], были использованы не зависящие от номера итерации косинусный и ступенчатый фильтры (рис. 3, кривые 1 и 2 соответственно), охватывающие весь диапазон масштабов разложения. Частный случай, когда γ тождественно равна единице, соответствует отключению вэйвлет-фильтрации и дает простое разложение в ряд Неймана. В численном эксперименте было замечено, что при отсутствии шума в проекциях такой фильтр может дать несколько лучшие результаты, чем другие фильтры. Однако для зашумленных проекций вэйвлет-фильтрация дает более точную реконструкцию и ее обязательно следует включать.

3. Вычислительный эксперимент. Для численного эксперимента были выбраны две модельные функции, изображенные на рис. 4. Первая (гладкая) модель представлена повернутой относительно оси x на 45° эллиптической гауссианой

$$g(x, y) = A \exp \left[-4 \ln 2 \left(\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \right) \right]$$

с параметрами: амплитудой $A = 0.5$, центральной точкой $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и полными полуширинами $a = 0.85$, $b = 0.45$. Вторая (разрывная) модель представляет собой разность характеристических функций кругов радиуса $r_1 = 0.75$, $r_2 = 0.7$ с общим центром $x_0 = -0.2$, $y_0 = 0$. В проекционные данные добавлялся случайный гауссовский шум двух типов — с дисперсией, пропорциональной сигналу $\sigma_j = \sigma f(\xi, p_j)$, и с равномерной дисперсией $\sigma_j = \sigma \max f(\xi, p_j)$, где σ_j — вектор дисперсии, σ — уровень шума, $f(\xi, p_j)$ — проекция в направлении ξ , $j = 1, \dots, N$.

Томограмма восстанавливалась четырьмя описанными методами при следующих параметрах: $N_x = 128$, $N_y = 128$, $N = 128$, количество ракурсов K варьировалось от 3 до 7.

3.1. Гладкая модель. Результаты сравнения погрешностей томографической реконструкции модели № 1 по четырем алгоритмам приведены в табл. 1. Уровень экспериментального шума в проекциях

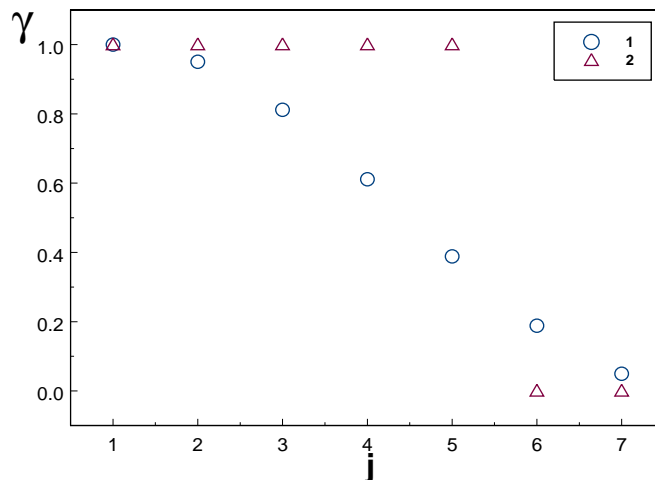


Рис. 3. Косинусный (1) и ступенчатый (2) вэйвлет-фильтры

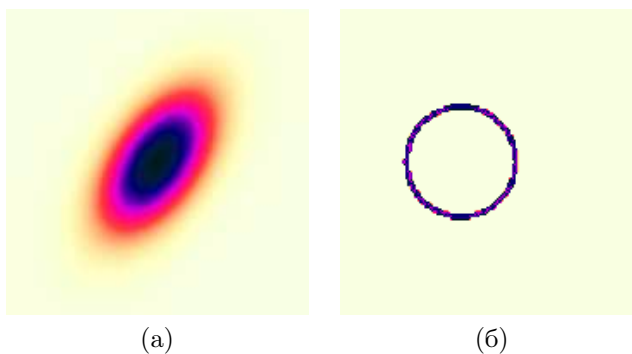


Рис. 4. Модельные функции: а) гладкая, б) разрывная

изменялся от 0 до 10 процентов. Тип шума выбирался с дисперсией, пропорциональной уровню сигнала. В табл. 2 такие же вычисления приведены для второго типа шума — с одинаковой дисперсией (далее — равномерной), но своей на каждом ракурсе наблюдения. Из этих таблиц видно, что увеличение числа ракурсов с 3 до 7 для алгоритма MENT практически не влияет на ошибку реконструкции, тогда как для NDWF, например, это влияние существенно: с добавлением двух ракурсов ошибка при пропорциональном шуме снижается в два раза.

Таблица 1

Ошибка реконструкции гладкой модели (№ 1) для различных алгоритмов, количества ракурсов и уровня шума (пропорциональная дисперсия)

Метод	MENT			GP			NDWF			FBP		
	К			К			К			К		
σ (%)	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7
0	1	2	2	14	6	3	35	13	5	40	13	4
3	3	5	3	14	5	5	35	14	5	40	14	6
5	4	7	4	14	6	7	35	15	5	40	15	7
10	7	9	7	14	7	12	33	16	7	44	22	14

Таблица 2

Ошибка реконструкции модели № 1 (равномерная дисперсия)

Метод	MENT			GP			NDWF			FBP		
	К			К			К			К		
	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7
3	8	10	10	39	29	38	33	13	8	54	30	26
5	13	16	16	54	37	49	33	17	13	65	35	35
10	24	29	29	75	61	75	38	25	26	69	45	44

Сравнивая томограммы на рис. 5, можно утверждать, что гладкое решение получено только для GP и NDWF. Хотя среднеквадратичная ошибка реконструкции равна 7% также и для MENT, этот алгоритм, несмотря на включение процедуры сглаживания регуляризирующими сплайнами, дает здесь недостаточно гладкое решение. На рис. 6 показана зависимость ошибки реконструкции $\Delta(i)$ от номера итерации для трех из описанных методов: MENT, GP и NDWF. Все методы обладают достаточно быстрой сходимостью. Начальное приближение лучше у NDWF-реконструкции, хотя при росте числа итераций ошибка MENT-реконструкции становится близкой к ошибке метода NDWF.

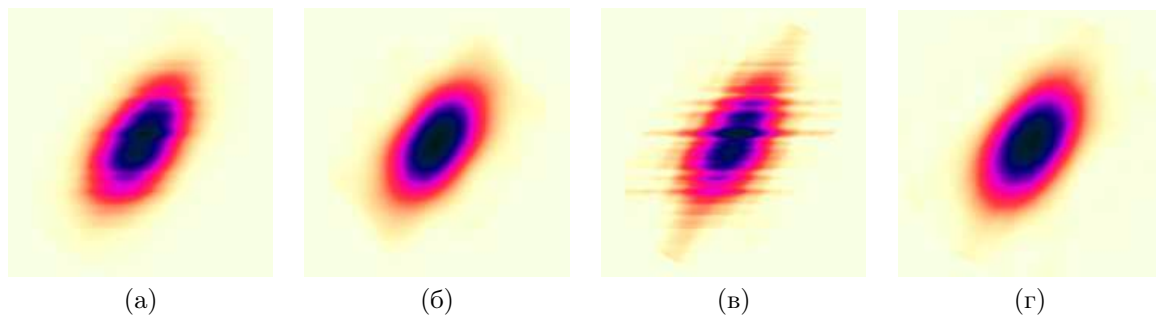


Рис. 5. Реконструкции модели № 1 по зашумленным проекциям ($K=6$). Уровень шума в проекциях $\sigma = 10\%$ (с пропорциональной дисперсией) а) MENT, 50 итераций, $\Delta = 7\%$, б) GP, 50 итераций, $\Delta = 10\%$, в) FBP, $\Delta = 16\%$, г) NDWF, 50 итераций, $\lambda = 0.001$, $\Delta = 7\%$

3.2. Разрывная модель. В табл. 3 и 4 представлены результаты реконструкции модели № 2. При пропорциональном шуме (табл. 3) качество реконструкции разрывной модели методом NDWF становится хуже с уменьшением числа ракурсов по сравнению с алгоритмами MENT и GP. При равномерном шуме (табл. 4) наблюдается качественное улучшение восстановленной методом NDWF томограммы по сравнению с другими методами. На рис. 7 мы видим, что толщина кольца лучше восстановлена методом NDWF, а артефакты реконструкции NDWF имеют меньшую амплитуду, чем в MENT-реконструкции.

Таблица 3

Ошибка реконструкции разрывной модели (№ 2) (пропорциональная дисперсия)

Метод	MENT			GP			NDWF			FBP		
	К			К			К			К		
	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7
0	63	49	43	80	64	41	84	70	50	150	78	51
3	64	49	43	80	64	42	84	71	50	140	75	51
5	65	49	43	80	64	42	84	71	51	134	74	51
10	69	50	47	81	65	44	86	75	53	123	73	53

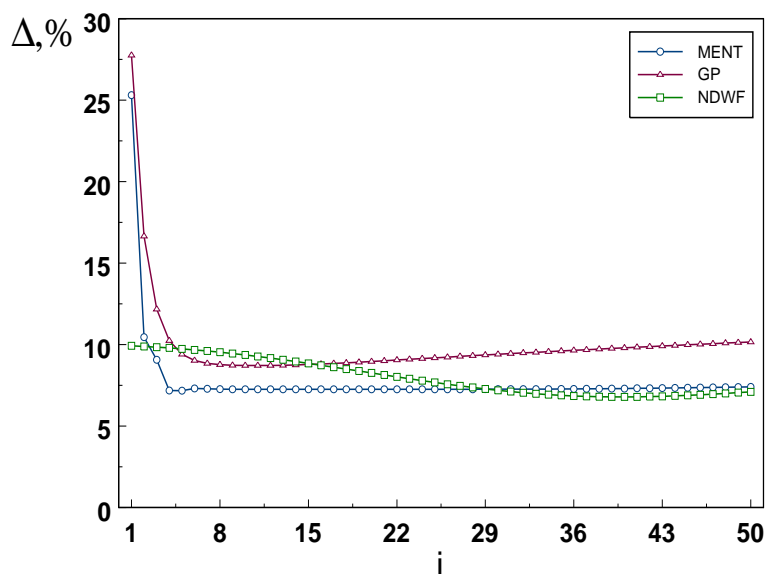


Рис. 6. Зависимость ошибки реконструкции модели № 1 от номера итерации по 6 проекциям без шума для MENT, GP, NDWF ($\lambda = 0.001$)

Таблица 4

Ошибка реконструкции модели № 2 (равномерная дисперсия)

Метод	MENT			GP			NDWF			FBP		
	К			К			К			К		
	3	5	7	3	5	7	3	5	7	3	5	7
$\sigma = 3\%$	75	60	54	82	63	46	93	81	76	225	168	138
$\sigma = 5\%$	80	66	62	86	74	62	94	82	77	183	143	121
$\sigma = 10\%$	86	77	79	93	91	85	94	85	82	114	101	95

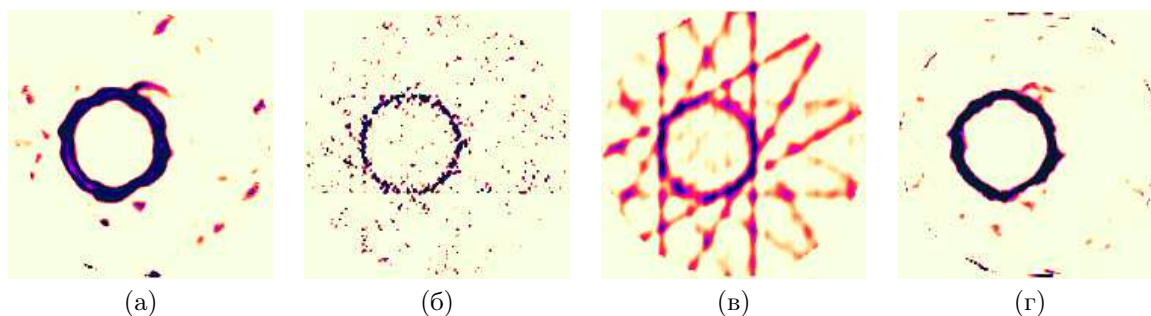


Рис. 7. Реконструкции модели № 2 по зашумленным проекциям ($K=6$). Уровень шума в проекциях $\sigma = 10\%$ (равномерная дисперсия) а) MENT, 100 итераций, $\Delta = 81\%$, б) GP, 50 итераций, $\Delta = 92\%$, в) FBP, $\Delta = 97\%$ г) NDWF, 100 итераций, $\lambda = 0.002$, $\Delta = 83\%$

На рис. 8 показана зависимость $\Delta(i)$ для проекций без добавления шума. В данном случае ошибка алгоритма NDWF больше ошибки MENT, но меньше ошибки GP.

Сравнение среднеквадратичной ошибки реконструкции для двух используемых фильтров и для обеих моделей приведено на рис. 9. Видно, что для гладкой модели ступенчатый фильтр является предпочтительным всюду, а для разрывной он дает лучшие результаты на первом десятке итераций, а дальше его стоит переключать на косинусный.

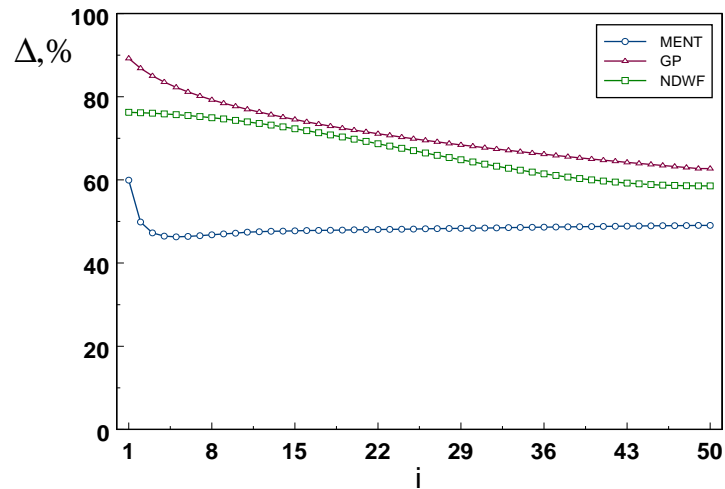


Рис. 8. Зависимость ошибки реконструкции разрывной модели от номера итерации по 6 проекциям без шума для MENT, GP, NDWF ($\lambda = 0.003$)

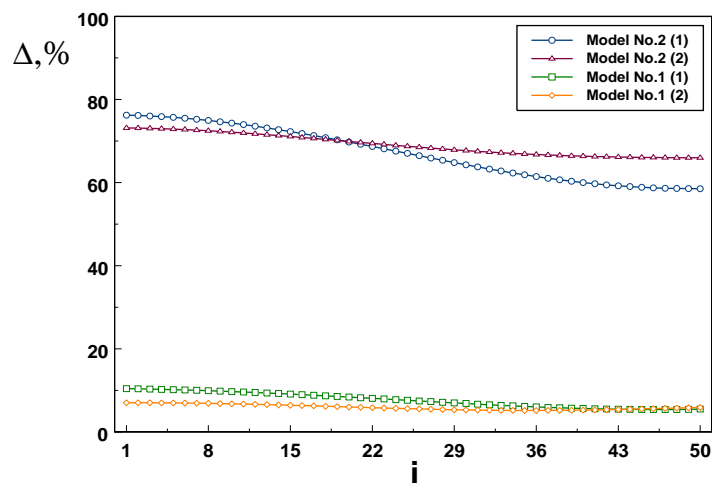


Рис. 9. Зависимость ошибки реконструкции от номера итерации для двух моделей при использовании косинусного (1) и ступенчатого (2) вэйвлет-фильтров (6 ракурсов)

4. Заключение. Численные расчеты показали, что при определенном выборе вэйвлет-фильтра (т.е. оператора L) и параметра λ предложенный итерационный алгоритм томографической реконструкции сходится и в ряде случаев наблюдается повышение точности восстановления как гладких, так и разрывных фантомов по сравнению с альтернативными подходами MENT, GP и FBP. В процессе фильтрации вектора невязки рекомендуется вместо отбрасывания высокочастотных компонент (на масштабах с большим номером) осуществлять их умножение на косинусный фильтр, аргументом которого является номер масштаба.

Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 01-01-00776 и 02-01-00515).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пикалов В.В., Мельникова Т.С. Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995.

2. *Лихачев А.В., Пикалов В.В.* Новый метод определения неизвестного аддитивного фона в проекционных данных в задаче трехмерной томографии // ЖВМ и МФ. 2002. **42**, № 3. 85–97.
3. *Kak A.C., Slaney M.* Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988.
4. *Вишняков Г.Н., Гильман Г.А., Левин Г.Г.* Восстановление томограмм при ограниченном числе проекций. Итерационные методы // Опт. спектр. 1985. **58**, № 2. 406–413.
5. *Minerbo G.* MENT: a maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data // Comput. Graph. Image Processing. 1979. **10**, N 1. 46–48.
6. *Logan B.F., Shepp L.A.* Optimal reconstruction of a function from its projections // Duke Math. J. 1975. **42**. 645–659.
7. *Kazantsev I.G.* Tomographic reconstruction from arbitrary directions using ridge functions // Inverse Problems. 1998. **14**, N 3. 635–645.
8. *Shepp L.A., Logan B.F.* The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. **21**, N 3. 21–43.
9. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. **166**, № 11. 1145–1170.
10. *Переберин А.В.* О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 2. 133–158.
11. *Васильева Л.Г., Жилейкин Я.М., Осипук Ю.И.* Преобразования Фурье и вэйвлет-преобразования. Их свойства и применение // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 79–82.
12. *Aldroubi A., Unser M.* (Eds.) Wavelets in medicine and biology. Boca Raton: CRC Press, 1996.
13. *Пикалов В.В., Непомнящий А.В.* Сравнительный анализ алгоритмов локальной томографии и разномасштабных вэйвлет-анализаторов // Обратные и некорректно поставленные задачи. Москва, МГУ, 20–21 июня 2000 (Тезисы докладов). М.: МАКС Пресс, 2000. 60.
14. *Пикалов В.В., Непомнящий А.В.* Вэйвлет-анализ проекционных данных для выявления разномасштабных структур на двумерных томограммах // Оптические методы исследования потоков. Москва, 27–29 июня 2001 (Тезисы докладов). М.: МЭИ, 2001. 248–251.
15. *Donoho D.L.* De-noising by soft-thresholding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1995. **41**, N 3. 613–627.
16. *Pickalov V.V., Nepomnyashchiy A.V.* Wavelet transform based iterative algorithm for 2D tomography reconstruction // Intern. Conf. Ill-Posed and Inverse Problems. August 5–9, 2002. Novosibirsk: Sobolev Inst. Press, 2002. 128.
17. *Bhatia M., Karl W.C., Willsky A.S.* A wavelet-based method for multiscale tomographic reconstruction // IEEE Trans. Med. Imag. 1996. **15**, N 1. 92–101.
18. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М: Мир, 1990.
19. *Денисова В.И., Пикалов В.В., Баландин А.Л.* Модифицированный метод максимума энтропии в томографии плазмы // Оптика и спектроскопия. 1996. **81**, № 1. 43–48.
20. *Gerchberg G.* Super-resolution through error energy reduction // Opt. Acta. 1974. **21**, N 9. 709–720.
21. *Papoulis A.* A new algorithm in spectral analysis and band limited extrapolation // IEEE Trans. Circuits Syst. 1975. CAS-22, N 9. 735–742.
22. *Melnikova T.S., Pickalov V.V.* Computer-aided plasma tomography // High Temperature Dust-Laden Jets in Plasma Technology. Proc. Intern. Workshop. 6–8 Sept. 1988, Novosibirsk, USSR. Utrecht: VSP, 1990. 257–282.
23. *Лихачев А.В., Пикалов В.В.* Синтезированный алгоритм трехмерной томографии // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 73–85.
24. *Louis A.K., Maaß P., Rieder A.* Wavelets: theory and applications. New York: Wiley, 1997.
25. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical recipes in Fortran. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
26. *Kalifa J., Laine A., Esser P.D.* Regularization in tomographic reconstruction using thresholding estimators // IEEE Trans. Med. Imag. 2003. **22**, N 3. 351–359.

Поступила в редакцию
18.07.2003
