УДК 519.6 doi 10.26089/NumMet.v19r105

МЕТОД АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Д. В. Иванов[1], Г. М. Кобельков[2], М. А. Ложников[3], А. Ф. Харисов[4]

Статья посвящена численному решению уравнений динамики вязкого сжимаемого теплопроводного газа на неструктурированных тетраэдральных сетках. Предложена комбинация методов МакКормака и Лакса–Вендроффа, которая позволяет провести приближенную монотонизацию разностной схемы с помощью введения адаптивной искусственной вязкости и метода “замороженных” коэффициентов. Результаты расчетов согласуются с натурными экспериментами.

Ключевые слова: численное моделирование, газовая динамика, неструктурированные сетки, искусственная вязкость.

1. Введение. В работе [1] предложен метод адаптивной искусственной вязкости (АИВ) для решения одномерных уравнений динамики идеального сжимаемого теплопроводного газа. В [2] этот подход обобщается на случай двух и трех измерений; кроме того, в [3, 6] проводится серия двумерных и трехмерных расчетов, с помощью которых предложенный алгоритм сравнивается с другими методами. В [4] предлагается разностная схема для одномерных уравнений Бюргерса, переноса и пограничного слоя, основанная на идеях метода АИВ. Наконец, в [5] предложен новый способ выбора адаптивной вязкости, который не так сильно размывает ударные волны, как первоначальный способ, и лучше подходит для расчета в цилиндрических и сферических координатах. В работе [7] этот алгоритм переносится на неструктурированные сетки. В настоящей статье предлагается модификация метода АИВ, предназначенная для решения уравнений динамики вязкого сжимаемого теплопроводного газа.

Метод адаптивной искусственной вязкости [1] состоит из трех этапов. На первом этапе по схеме Лакса–Вендроффа находится “предикторное” решение. При построении аппроксимаций применяется метод опорных операторов [8], который обеспечивает сопряженность сеточных операторов div^h и grad^h, а также используются приемы, разработанные для построения полностью консервативных разностных схем [9]. На втором этапе находятся области введения искусственной вязкости, величина которой задается таким образом, чтобы разностная схема была “приближенно” монотонна. Искусственная вязкость вводится на ударной волне, волне сжатия и области осцилляции решения. На контактном разрыве и волне разрежения искусственная вязкость не вводится. Указанные области определяются по полученному на первом этапе “предикторному” решению. На третьем этапе к “предикторному” решению в областях, определенных на втором этапе, добавляются диссипативные слагаемые.

Схема Лакса–Вендроффа позволяет добиться второго порядка аппроксимации по времени и сократить количество осцилляций сеточного решения. Полученную 5-точечную разностную схему легко монотонизировать методом “замороженных” коэффициентов. Однако из-за наличия производных по пространству второго порядка эту схему трудно использовать для уравнений динамики вязкого газа ввиду громоздкости выражений для поправок. Схему Лакса–Вендроффа можно заменить методом МакКормака, однако он приводит к 17-точечной разностной схеме, которую трудно монотонизировать. В нашей работе предложена модификация метода адаптивной искусственной вязкости для уравнений динамики вязкого теплопроводного сжимаемого газа на тетраэдральных сетках, сочетающая в себе лучшие качества методов Лакса–Вендроффа и МакКормака и позволяющая провести частичную монотонизацию при помощи метода “замороженных” коэффициентов.

[1] Научно-производственное предприятие “Темп” им. Ф. Короткова, ул. Правды, д. 23, 127015, Москва; генеральный директор, e-mail: d.ivanov@npptemp.com

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; профессор, e-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru

[3] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; аспирант, e-mail: lozhnikovma@gmail.com

[4] Научно-производственное предприятие “Темп” им. Ф. Короткова, ул. Правды, д. 23, 127015, Москва; программист, e-mail: a.kharisov@npptemp.com

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений газовой динамики [10] в области общего вида $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с границей Γ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla p - \operatorname{div}(\mu \nabla \boldsymbol{v}) - \nabla \left(\left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) = \rho \boldsymbol{F}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \boldsymbol{v} \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) - \varkappa \nabla T - \frac{1}{2} \mu \nabla \left(\boldsymbol{v}^2 \right) - \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right] = (\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}), \tag{3}$$

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon.$$

Здесь ρ —плотность, p —давление, $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости, ε — внутренняя энергия, γ — адиабата Пуассона, $\boldsymbol{F}$ — внешние силы. Величина μ обозначает кинематическую вязкость, ζ — вторую вязкость. Вязкость связана с температурой формулой Сазерленда $\mu = \mu_0 \dfrac{T_0 + C}{T + C} \left(\dfrac{T}{T_0} \right)^{3/2}$, где T_0, μ_0, C — некоторые константы. Величины $\varkappa$ и ζ находятся из соотношений

$$\varepsilon = c_v T, \quad c_p = \gamma c_v, \quad \varkappa = \frac{\mu c_p}{\mathrm{Pr}}, \quad \zeta = \mu \left(\frac{5}{3} - \gamma \right), \tag{4}$$

где $c_v = \dfrac{\mathcal{R}}{\nu(\gamma - 1)}$ — объемная теплоемкость, $c_p = \gamma \dfrac{\mathcal{R}}{\nu(\gamma - 1)}$, $\mathcal{R}$ — универсальная газовая постоянная, Pr — число Прандтля.

Будем считать, что граница Γ состоит из трех частей: $\Gamma = \Gamma_w \cup \Gamma_{\mathrm{in}} \cup \Gamma_{\mathrm{out}}$. На жесткой стенке Γ_w заданы условие прилипания и температура, на входном участке Γ_{in} — скорость, давление и температура, на участке стока Γ_{out} считаем равными нулю производные от скорости, плотности, давления и внутренней энергии в направлении нормали к границе.

3. Сетка. Пусть построена триангуляция Γ_h границы Γ, а область Ω_h, ограниченная поверхностью Γ_h, разбита на согласованные тетраэдры, которые в дальнейшем будем называть ячейками. Центр x_O ячейки ω_O определим в центре сферы, описанной вокруг соответствующего тетраэдра при условии, что он лежит внутри этого тетраэдра. В противном случае центром ячейки является ее центр тяжести. Искомые сеточные функции ρ, p, $\boldsymbol{v}$, T, ε будем аппроксимировать в центрах ячеек.

Общую грань ячеек ω_O и ω_{O_i} обозначим через S_i. Определим потоковый узел $\tilde{x}_i$ грани S_i в точке пересечения грани (или ее продолжения) с отрезком, соединяющим центры ячеек ω_O и ω_{O_i}. Если грань тетраэдра находится на границе области Γ_h, то в случае, если эта грань является остроугольным треугольником, назовем ее потоковым узлом центр описанной окружности грани. В противном случае потоковый узел этой грани расположим в ее центре тяжести.

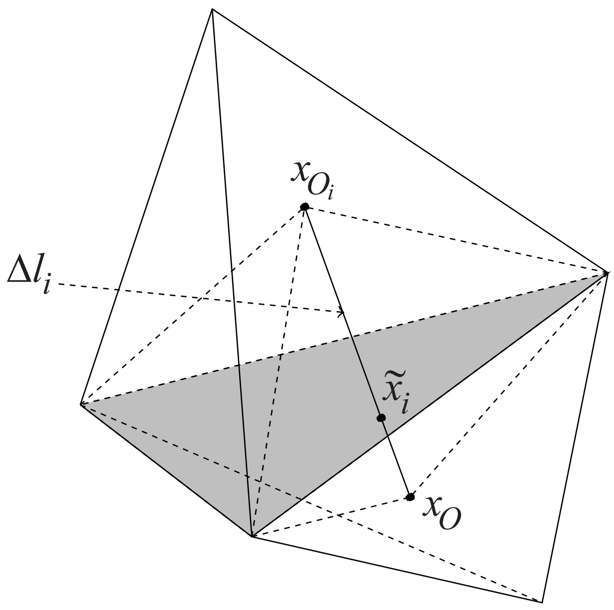


Рис. 1. Ячейки ω_O и ω_{O_i}

Фигуру, ограниченную плоскостями, проведенными через ребра грани S_i и точки x_O и x_{O_i}, назовем потоковой ячейкой и обозначим через $\tilde{\omega}_i$. Пусть $\tilde{\Omega}_h$ — множество всех потоковых ячеек. Грани потоковой ячейки $\tilde{\omega}_i$ обозначим символами $\tilde{S}_{ik}$.

Величины Δl_{iO} и Δl_{iO_i} определим как части отрезка Δl_i, находящиеся со стороны точек x_O и x_{O_i} от грани S_i соответственно. Пусть $\boldsymbol{n}_i$ — внешняя нормаль к грани S_i ячейки ω_O. Обозначим с помощью величин Δn_i, Δn_{iO} и Δn_{iO_i} длины проекций отрезков Δl_i, Δl_{iO} и Δl_{iO_i} соответственно на нормаль $\boldsymbol{n}_i$. Определим $\boldsymbol{n}_{ik}$ как внешнюю нормаль к грани $\tilde{S}_{ik}$ ячейки $\tilde{\omega}_i$. Для удобства будем обозначать объемы ячеек, площади граней и длины отрезков точно так же, как и ячейки, грани и отрезки соответственно.

4. Сеточная аппроксимация дивергенции и градиента. Точно так же, как и в [7], будем строить разностную схему таким образом, чтобы сеточные операторы дивергенции и градиента были взаимно сопряжены. Сначала построим аппроксимацию дивергенции в точке x_O. Обозначим с помощью $\boldsymbol{W}_i$ некоторый вектор, определенный в узле $\tilde{x}_i$, а с помощью $(\boldsymbol{W}_{n_i})_i$ — проекцию этого вектора на нормаль $\boldsymbol{n}_i$. В основных узлах сетки дивергенцию произвольного векторного поля $\boldsymbol{W}$ аппроксимируем следующим образом:

$$\operatorname{div}_O^h \boldsymbol{W} = \frac{1}{\omega_O} \sum_{S_i \in \omega_O} (\boldsymbol{W}_{n_i})_i S_i.$$

Иными словами, $\operatorname{div}_O^h \boldsymbol{W}$ — дивергенция вектора $\boldsymbol{W}$ в точке x_O, суммирование ведется по всем граням ячейки ω_O. Обозначим линейную интерполяцию вектора $\boldsymbol{W}$ в точке $\tilde{x}_i$ как

$$\langle \boldsymbol{W} \rangle_i = \begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{W})_O \Delta n_{iO_i} + (\boldsymbol{W})_{O_i} \Delta n_{iO}}{\Delta n_i}, & \tilde{x}_i \in \Omega_h, \\ (\boldsymbol{W})_i, \quad \tilde{x}_i \in \Gamma_h, \end{cases}$$

где $(\boldsymbol{W})_O$ — значение вектора $\boldsymbol{W}$ в точке x_O. Обозначим с помощью $\boldsymbol{W}_{n_i}$ проекцию вектора $\boldsymbol{W}$ на нормаль $\boldsymbol{n}_i$. Тогда дивергенция вектора скорости аппроксимируется в узле x_O как $\operatorname{div}_O^h \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\omega_O} \sum\limits_i \langle \boldsymbol{v}_{n_i} \rangle S_i$. Эта аппроксимация обеспечивает выполнение закона сохранения массы при однородных краевых условиях. Теперь построим разностную аппроксимацию оператора градиента таким образом, чтобы он был сопряжен с ранее выбранным сеточным оператором дивергенции, а именно, чтобы выполнялся сеточный аналог равенства $\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\Omega = -\int_\Omega \boldsymbol{v} \nabla p\, d\Omega$, т.е.

$$\sum_{\Omega_h} \omega_O p_O \operatorname{div}_O^h \boldsymbol{v} = -\sum_{\Omega_h} \omega_O \big(\boldsymbol{v}_O \cdot \nabla_O^h p \big). \tag{5}$$

Пользуясь тем, что $\langle \boldsymbol{v}_{n_i} \rangle_i = 0$ на жесткой стенке, а также тем, что $\sum\limits_{S_i \in \omega_O} S_i (\boldsymbol{v}_{n_i})_O = 0$ и $\Delta n_i = \Delta n_{iO} + \Delta n_{iO_i}$, преобразуем левую часть выражения (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_h} \omega_O p_O \operatorname{div}_O^h \boldsymbol{v} &= \sum_{x_O \in \Omega_h} \left(\sum_{S_i \in \omega_O \setminus \Gamma_h} p_O S_i \frac{(\boldsymbol{v}_{n_i})_O \Delta n_{iO_i} + (\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} \Delta n_{iO}}{\Delta n_i} \right) = \\ &= \sum_{x_O \in \Omega_h} \left(\sum_{S_i \in \omega_O \setminus \Gamma_h} p_O S_i \frac{(\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} \Delta n_{iO} - (\boldsymbol{v}_{n_i})_O \Delta n_{iO}}{\Delta n_i} - \sum_{\omega_O \cap \Gamma_h} p_O S_i (\boldsymbol{v}_{n_i})_O \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Перейдем от суммирования по ячейкам к суммированию по граням. Тогда выражение (6) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{S_i \notin \Gamma_h} \left(p_O S_i \frac{\Delta n_{iO}}{\Delta n_i} \big((\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} - (\boldsymbol{v}_{n_i})_O \big) + p_{O_i} S_i \frac{\Delta n_{iO_i}}{\Delta n_i} \big((\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} - (\boldsymbol{v}_{n_i})_O \big) \right) - \sum_{S_i \in \Gamma_h} \big(p_O S_i (\boldsymbol{v}_{n_i})_O \big) = \\ = \sum_{S_i \notin \Gamma_h} \left(S_i \big((\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} - (\boldsymbol{v}_{n_i})_O \big) \frac{p_O \Delta n_{iO} + p_{O_i} \Delta n_{iO_i}}{\Delta n_i} \right) - \sum_{S_i \in \Gamma_h} \big((\boldsymbol{v}_{n_i})_O S_i p_O \big). \end{aligned}$$

Возвращаясь к суммированию по ячейкам, получаем

$$\begin{aligned} -\sum_{x_O \in \Omega_h} \left(\sum_{S_i \in \omega_O \setminus \Gamma_h} (\boldsymbol{v})_O \cdot \boldsymbol{n}_i S_i \frac{p_O \Delta n_{iO} + p_{O_i} \Delta n_{iO_i}}{\Delta n_i} + \sum_{S_i \in \omega_O \cap \Gamma_h} (\boldsymbol{v})_O \cdot \boldsymbol{n}_i S_i p_O \right) = \\ = -\sum_{x_O \in \Omega_h} \left((\boldsymbol{v})_O \cdot \sum_{S_i \in \omega_O} \boldsymbol{n}_i S_i \bar{p}_i \right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\bar{p}_i = \begin{cases} \dfrac{p_O \Delta n_{iO} + p_{O_i} \Delta n_{iO_i}}{\Delta n_i}, & \tilde{x}_i \notin \Gamma_h, \\ p_O, \quad \tilde{x}_i \in \Gamma_h. \end{cases}$

Таким образом, если взять $\nabla_O^h p = \dfrac{1}{\omega_O} \sum\limits_{S_i \in \omega_O} \boldsymbol{n}_i S_i \bar{p}_i$, то правая часть выражения (7) примет вид правой части условия сопряженности сеточных операторов дивергенции и градиента (5).

Теперь определим сеточные операторы дивергенции и градиента в потоковых узлах. Для этого рассмотрим разностный аналог тождества

$$\int\limits_{\tilde{\omega}_i} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\tilde{\omega}_i \equiv \int\limits_{\partial\tilde{\omega}_i} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_i \, d\sigma.$$

Левую часть этого выражения аппроксимируем с помощью $\tilde{\omega}_i \operatorname{div}_i^h \boldsymbol{v}$, а интеграл по грани $\tilde{S}_{ik}$ потоковой ячейки $\tilde{\omega}_i$ величиной $\tilde{S}_{ik}(\boldsymbol{v}_{n_{ik}})_O$, если грань $\tilde{S}_{ik}$ находится со стороны ячейки ω_O от грани S_i, или с помощью величины $\tilde{S}_{ik}(\boldsymbol{v}_{n_{ik}})_{O_i}$ в противном случае. Таким образом, дивергенция в потоковом узле $\tilde{x}_i$ аппроксимируется величиной

$$\operatorname{div}_i^h \boldsymbol{v} = \frac{1}{\tilde{\omega}_i} \left(\sum_{\tilde{S}_{ik} \in \omega_O \cap \partial\tilde{\omega}_i} \tilde{S}_{ik}(\boldsymbol{v}_{n_{ik}})_O + \sum_{\tilde{S}_{ik} \in \omega_{O_i} \cap \partial\tilde{\omega}_i} \tilde{S}_{ik}(\boldsymbol{v}_{n_{ik}})_{O_i} \right).$$

Эта аппроксимация является дивергентной, поскольку нормальная компонента скорости равна нулю на жесткой стенке, а слагаемые при одной и той же грани $\tilde{S}_{ik}$ в соседних потоковых ячейках равны по модулю и противоположны по знаку, значит $\sum\limits_{\tilde{\Omega}_h} \tilde{\omega}_i \operatorname{div}_i^h \boldsymbol{v} = 0$, если на границе области отсутствуют участки втока и истока. Используя тождества

$$\sum_{\tilde{S}_{ik} \in \omega_O \cap \partial\tilde{\omega}_i} \tilde{S}_{ik}(\boldsymbol{v}_{n_{ik}})_O + S_i(\boldsymbol{v}_{n_i})_O \equiv 0, \qquad \sum_{\tilde{S}_{ik} \in \omega_{O_i} \cap \partial\tilde{\omega}_i} \tilde{S}_{ik}(\boldsymbol{v}_{n_{ik}})_{O_i} - S_i(\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} \equiv 0$$

и пользуясь равенством $\tilde{\omega}_i = S_i \Delta n_i / 3$, упростим выражение аппроксимации дивергенции. Получим

$$\operatorname{div}_i^h \boldsymbol{v} = \begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} - (\boldsymbol{v}_{n_i})_O}{\Delta n_i/3}, & \tilde{x}_i \notin \Gamma_h, \\ \dfrac{-(\boldsymbol{v}_{n_i})_O}{\Delta n_i/3}, & \tilde{x}_i \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Исходя из сеточного условия сопряженности операторов дивергенции и градиента

$$\sum_{\tilde{x}_i \in \Omega_h} \tilde{\omega}_i \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \boldsymbol{v} = - \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega_h} \big(\tilde{\omega}_i \langle \boldsymbol{v} \rangle_i \cdot \nabla_i^h p \big), \tag{8}$$

найдем сеточную аппроксимацию градиента в потоковых узлах. Преобразуем левую часть выражения (8):

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega_h} \tilde{\omega}_i \bar{p}_i \operatorname{div}_i^h \boldsymbol{v} &= \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega_h \setminus \Gamma_h} S_i \frac{p_{O_i} \Delta n_{iO_i} + p_O \Delta n_{iO}}{\Delta n_i} \big((\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} - (\boldsymbol{v}_{n_i})_O \big) - \sum_{\tilde{x}_i \in \Gamma_h} S_i p_O (\boldsymbol{v}_{n_i})_O = \\ &= \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega_h \setminus \Gamma_h} S_i \big((p_O - p_{O_i}) \langle \boldsymbol{v}_{n_i} \rangle_i + p_{O_i} (\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} - p_O (\boldsymbol{v}_{n_i})_O \big) - \sum_{\tilde{x}_i \in \Gamma_h} S_i p_O (\boldsymbol{v}_{n_i})_O. \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом тождества $\sum\limits_{S_i \in \omega_h} (\boldsymbol{v}_{n_i})_O S_i \equiv 0$ правая часть (9) примет вид

$$- \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega_h \setminus \Gamma_h} \big(S_i \langle \boldsymbol{v} \rangle_i \cdot \boldsymbol{n}_i (p_{O_i} - p_O) \big) = - \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega_h \setminus \Gamma_h} \left(\tilde{\omega}_i \langle \boldsymbol{v} \rangle_i \cdot \boldsymbol{n}_i \frac{p_{O_i} - p_O}{\Delta n_i/3} \right).$$

Таким образом, градиент в потоковой точке $\tilde{x}_i$ аппроксимируется следующей величиной:

$$\nabla_i^h p = \begin{cases} \dfrac{p_{O_i} - p_O}{\Delta n_i/3}\, \boldsymbol{n}_i, & \tilde{x}_i \notin \Gamma_h, \\ 0, & \tilde{x}_i \in \Gamma_h. \end{cases}$$

5. Аппроксимация по времени. В оригинальном методе адаптивной искусственной вязкости [7] используется схема со вторым порядком аппроксимации по времени, позволяющая сократить количество осцилляций сеточного решения. Для достижения аппроксимации по времени второго порядка используются поправки Лакса–Вендроффа [11]. Этот метод приводит к 5-точечной разностной схеме, которую в дальнейшем нетрудно монотонизировать с помощью добавления искусственной вязкости, величину которой можно оценить с помощью метода замороженных коэффициентов. Однако в задаче (1)–(3) эти поправки неудобно использовать ввиду их громоздкости, которая обусловлена наличием производных по пространству второго порядка. Для достижения аппроксимации второго порядка можно использовать метод МакКормака [12], однако он приводит к 17-точечной разностной схеме, которую трудно монотонизировать. В настоящей статье предлагается совместить лучшие качества метода МакКормака и метода Лакса–Вендроффа, а именно ввести поправки Лакса–Вендроффа для уравнений без учета вязких слагаемых, а поправки, которые появляются от наличия вязких слагаемых, ввести с помощью метода МакКормака. Предложенная разностная схема становится 5-точечной при замороженных коэффициентах и монотонизируется точно таким же способом, как и [7].

Таким образом, поправки Лакса–Вендроффа совпадают с поправками в [7]. Для уравнения неразрывности имеем

$$LW_\rho(\rho, \boldsymbol{v}, p) = -\frac{\tau_n}{2}\,\frac{1}{\omega_O}\sum_i S_i\left(\frac{p_{O_i} - p_O}{\Delta n_i/3} + \frac{\big((\boldsymbol{v}_{n_i})^2\rho\big)_{O_i} - \big((\boldsymbol{v}_{n_i})^2\rho\big)_O}{\Delta n_i/3}\right).$$

Поправки для уравнения движения имеют вид

$$LW_I(\rho, \boldsymbol{v}, p) = -\frac{\tau_n}{2}\,\frac{1}{\omega_O}\sum_i S_i\left(\frac{p_{O_i} - p_O}{\Delta n_i/3}\left(\langle\boldsymbol{v}\rangle_i + \langle\boldsymbol{v}_{n_i}\rangle_i \boldsymbol{n}_i\right) + \frac{\big((\boldsymbol{v}_{n_i})^2\rho\boldsymbol{v}\big)_{O_i} - \big((\boldsymbol{v}_{n_i})^2\rho\boldsymbol{v}\big)_O}{\Delta n_i/3}\right) -$$
$$-\frac{\tau_n}{2}\,\frac{1}{\omega_O}\sum_i S_i\boldsymbol{n}_i\left(\gamma\bar{p}_i\,\frac{(\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} - (\boldsymbol{v}_{n_i})_O}{\Delta n_i/3} + \langle\boldsymbol{v}_{n_i}\rangle_i\,\frac{p_{O_i} - p_O}{\Delta n_i/3}\right).$$

Поправки для полной энергии записываются следующим образом:

$$LW_E(\rho, \boldsymbol{v}, p, E) = -\frac{\tau_n}{2}\,\frac{1}{\omega_O}\sum_i S_i\left[\gamma\bar{p}_i\langle\boldsymbol{v}_{n_i}\rangle_i\,\frac{(\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i} - (\boldsymbol{v}_{n_i})_O}{\Delta n_i/3}\right] -$$
$$-\frac{\tau_n}{2}\,\frac{1}{\omega_O}\sum_i S_i\left[\frac{p_{O_i} - p_O}{\Delta n_i/3}\left(\left\langle\frac{E+p}{\rho}\right\rangle_i + \langle\boldsymbol{v}_{n_i}\rangle_i^2\right) + \frac{\big((\boldsymbol{v}_{n_i})^2(E+p)\big)_{O_i} - \big((\boldsymbol{v}_{n_i})^2(E+p)\big)_O}{\Delta n_i/3}\right],$$

где полная энергия $E = \rho\left(\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \varepsilon\right)$.

6. Сеточные уравнения. Метод адаптивной искусственной вязкости состоит из двух этапов. На первом этапе вычисляется предикторное решение $\tilde{\rho}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\tilde{p}$, $\tilde{E}$. На втором этапе вычисляется корректорное решение с помощью введения искусственной вязкости, т.е. слагаемых второго порядка, монотонизирующих разностную схему. Воспользовавшись полученными раннее аппроксимациями дивергенции и градиента, выведем аппроксимации исходных уравнений. Сначала выпишем аппроксимации невязких слагаемых:

$$A_\rho(\rho, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{\omega_O}\sum_{S_i\in\omega_O} S_i\langle\rho\boldsymbol{v}_{n_i}\rangle_i, \quad A_I(\rho, \boldsymbol{v}, p) = \frac{1}{\omega_O}\sum_{S_i\in\omega_O} S_i\left(\langle\rho\boldsymbol{v}_{n_i}\rangle_i\,\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{O_i}\right) + \bar{p}_i\boldsymbol{n}_i\right),$$
$$A_E(\rho, \boldsymbol{v}, p, \varepsilon) = \frac{1}{\omega_O}\sum_{S_i\in\omega_O} S_i\left(\langle\rho\boldsymbol{v}_{n_i}\rangle_i\left(\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}_O\boldsymbol{v}_{O_i} + \langle\varepsilon\rangle_i\right) + \bar{p}_i\langle\boldsymbol{v}_{n_i}\rangle_i\right).$$

Аппроксимации вязких слагаемых принимают вид

$$B_I(\boldsymbol{v}, \varepsilon) = -\frac{1}{\omega_O}\sum_{S_i\in\omega_O} S_i\left(\mu_i\,\frac{\boldsymbol{v}_{O_i} - \boldsymbol{v}_O}{\Delta n_i/3} + (\zeta_i + \mu_i/3)\boldsymbol{n}_i\cdot\frac{\boldsymbol{v}_{O_i}\boldsymbol{n}_i - \boldsymbol{v}_O\boldsymbol{n}_i}{\Delta n_i/3}\right),$$
$$B_E(\boldsymbol{v}, \varepsilon) = -\frac{1}{\omega_O}\sum_{S_i\in\omega_O} S_i\boldsymbol{n}_i\left(\kappa_i\boldsymbol{n}_i\,\frac{T_{O_i} - T_O}{\Delta n_i/3} + \frac{1}{2}\,\mu_i\boldsymbol{n}_i\,\frac{(\boldsymbol{v}_{O_i})^2 - (\boldsymbol{v}_O)^2}{\Delta n_i/3} + (\zeta_i + \mu_i/3)\langle\boldsymbol{v}\rangle_i\boldsymbol{n}_i\frac{\boldsymbol{v}_{O_i} - \boldsymbol{v}_O}{\Delta n_i/3}\right),$$

где величины κ_i, μ_i, ζ_i определяются через внутреннюю энергию $\varepsilon_i = \langle\varepsilon\rangle_i$. Температура T вычисляется через внутреннюю энергию ε. С помощью обозначений, введенных выше, запишем сеточные уравнения без учета поправок Лакса-Вендроффа и МакКормака. Сеточное уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\tilde{\rho}_O^{n+1/2} - \rho_O^n}{\tau_n} + A_\rho\big(\rho^n, \boldsymbol{v}^n\big) = 0.$$

Сеточное уравнение для импульса определяется следующим образом:

$$\frac{\tilde{I}_O^{n+1/2} - I_O^n}{\tau_n} + A_I\big(\rho^n, \boldsymbol{v}^n, p^n\big) + B_I(\boldsymbol{v}^n, \varepsilon^n) = 0,$$

где импульс $I = \rho\boldsymbol{v}$. Сеточное уравнение для полной энергии примет вид

$$\frac{\tilde{E}_O^{n+1/2} - E_O^n}{\tau_n} + A_E\big(\rho^n, \boldsymbol{v}^n, p^n, \varepsilon^n\big) + B_E\big(\boldsymbol{v}^n, \varepsilon^n\big) = 0,$$

где полная энергия $E = \rho\left(\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \varepsilon\right)$. Таким образом, величины $\tilde{\rho}^{n+1/2}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}^{n+1/2}$ и $\tilde{\varepsilon}^{n+1/2}$ вычисляются последовательно по вышеприведенным явным схемам.

Давление вычисляется из соотношения $p = (\gamma-1)\rho\varepsilon$. Для определения поправок к вязким слагаемым введем вспомогательные величины $\hat{\rho}^{n+1/2} = \rho^n$, $\hat{\boldsymbol{v}}^{n+1/2}$ и $\hat{\varepsilon}^{n+1/2}$, которые вычисляются последовательно с помощью

$$\frac{\hat{I}_O^{n+1/2} - I_O^n}{\tau_n} + B_I\big(\boldsymbol{v}^n, \varepsilon^n\big) = 0, \quad \frac{\hat{E}_O^{n+1/2} - E_O^n}{\tau_n} + B_E\big(\boldsymbol{v}^n, \varepsilon^n\big) = 0.$$

Тогда предикторное решение на $(n+1)$-м слое с учетом поправок Лакса–Вендроффа и МакКормака примет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_O^{n+1} &= \frac{1}{2}\big(\rho_O^n + \tilde{\rho}_O^{n+1/2}\big) - \frac{\tau_n}{2} A_\rho\big(\rho^n, \hat{\boldsymbol{v}}^{n+1/2}\big) - \tau_n LW_\rho\big(\rho^n, \boldsymbol{v}^n, p^n\big),\\
\tilde{I}_O^{n+1} &= \frac{1}{2}\big(I_O^n + \tilde{I}_O^{n+1/2}\big) - \frac{\tau_n}{2}\Big[A_I\big(\rho^n, \hat{\boldsymbol{v}}^{n+1/2}, \hat{p}^{n+1/2}\big) + B_I\big(\tilde{\boldsymbol{v}}^{n+1/2}, \tilde{\varepsilon}^{n+1/2}\big)\Big] - \tau_n LW_I\big(\rho^n, \boldsymbol{v}^n, p^n\big),\\
\tilde{E}_O^{n+1} &= \frac{1}{2}\big(E_O^n + \tilde{E}_O^{n+1/2}\big) - \frac{\tau_n}{2}\Big[A_E\big(\rho^n, \hat{\boldsymbol{v}}^{n+1/2}, \hat{p}^{n+1/2}, \hat{\varepsilon}^{n+1/2}\big) + B_E\big(\tilde{\boldsymbol{v}}^{n+1/2}, \tilde{\varepsilon}^{n+1/2}\big)\Big] - \tau_n LW_E\big(\rho^n, \boldsymbol{v}^n, p^n, E^n\big).
\end{aligned}$$

Уравнения, приведенные выше, позволяют последовательно вычислить величины $\tilde{\rho}^{n+1}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}^{n+1}$, $\tilde{\varepsilon}^{n+1}$, $\tilde{p}^{n+1}$. Это и есть предикторное решение. Шаг по времени следует выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие (13), накладываемое алгоритмом введения искусственной вязкости, который опишем в следующем разделе.

7. Введение диссипативных слагаемых. Для монотонизации разностной схемы будем добавлять к предикторному решению диссипативные слагаемые. Для определения схемной вязкости рассмотрим систему при замороженных значениях давления, скорости, температуры, внутренней энергии, скорости звука $c = \sqrt{p/\rho}$ и размерах ячеек. Обратим внимание, что в этом случае уравнения для импульса и полной энергии превратятся в уравнение неразрывности, умноженное на $\boldsymbol{v}$ и на $\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \varepsilon$ соответственно, причем вязкие слагаемые сократятся и разностная схема станет 5-точечной. Это дает нам возможность вводить диссипативные слагаемые в одном и том же виде

$$\Lambda_h(\nu)q = \frac{1}{\omega_O}\sum_{S_i\in\omega_O} S_i\nu_i\,\frac{q_{O_i} - q_O}{\Delta n_i/3}\,,$$

где $q = \rho$ для уравнения неразрывности, $q = \rho\boldsymbol{v}$ для уравнения импульса и $q = \rho\left(\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \varepsilon\right)$ для уравнения полной энергии. Таким образом, корректорное решение находится по формулам

$$\frac{q^{n+1} - \tilde{q}^{n+1}}{\tau_n} = \frac{1}{\omega_O}\sum_{S_i\in\omega_O} S_i\nu_i\,\frac{q_{O_i} - q_O}{\Delta n_i/3}\,. \tag{10}$$

Уравнение (10) позволяет последовательно найти величины ρ^{n+1}, $\boldsymbol{v}^{n+1}$ и ε^{n+1}. Оценим величину схемной вязкости ν_i. Для этого достаточно рассмотреть только уравнение неразрывности. Заменим $\dfrac{p_{O_i}-p_O}{\Delta n_i/3}$ на $\dfrac{c^2(\rho_{O_i}-\rho_O)}{\Delta n_i/3}$, где c — скорость звука. Тогда при замороженных коэффициентах имеем

$$\frac{\rho_O^{n+1}-\rho_O^n}{\tau}+\frac{1}{\omega}\sum_i S\,\frac{\rho_O^n+\rho_{O_i}^n}{2}\,\boldsymbol{v}_{n_i}^n-\frac{\tau}{2\omega}\sum_i S\left(\frac{c^2\big(\rho_{O_i}^n-\rho_O^n\big)}{\Delta n/3}+\frac{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2\big(\rho_{O_i}^n-\rho_O^n\big)}{\Delta n/3}\right)=\frac{1}{\omega}\sum_i S\nu\,\frac{\rho_{O_i}^n-\rho_O^n}{\Delta n/3}\,.$$

Здесь вязкие слагаемые сокращаются и уравнение принимает вид, рассмотренный в [7], что позволяет ввести искусственную вязкость аналогичным образом. Если собрать коэффициенты при неизвестных, то уравнение преобразуется к следующей форме:

$$\rho_O^{n+1}=A_O\rho_O^n+\sum_i B_{O_i}\rho_{O_i}^n,$$

где $A_O=1-\dfrac{\tau}{2\omega}\displaystyle\sum_i S\left(\boldsymbol{v}_{n_i}+\tau\,\frac{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2+c^2}{\Delta n/3}+\frac{2\nu}{\Delta n/3}\right)$, а $B_{O_i}=\dfrac{\tau S}{2\omega}\left(-\boldsymbol{v}_{n_i}+\tau\,\dfrac{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2+c^2}{\Delta n/3}+\dfrac{2\nu}{\Delta n/3}\right)$. Заметим, что поскольку $\sum\limits_i \boldsymbol{v}_{n_i}S_i=0$, то при замороженных коэффициентах будет выполнено $A_O=1-\sum\limits_i B_{O_i}$. Значит, если выбрать схемную вязкость таким образом, что $A_O>0$ и $B_{O_i}>0$, то будет выполнен принцип максимума

$$\big|\rho_O^{n+1}\big|\leqslant\max_{\Omega_h}\big|\rho_O^n\big|\left(A_O+\sum_i B_{O_i}\right)=\max_{\Omega_h}\big|\rho_O^n\big|.$$

В свою очередь, из принципа максимума и положительности коэффициентов разностной схемы будет следовать монотонность и устойчивость. Однако это утверждение будет выполняться лишь приближенно, поскольку оно было доказано при замороженных коэффициентах и размерах ячеек. Теперь найдем допустимые значения для схемной вязкости ν_i, такие, что $A_O>0$ и $B_{O_i}>0$. Для того чтобы было выполнено $B_{O_i}>0$, достаточно потребовать

$$\nu>\frac{1}{2}\,\frac{\Delta n}{3}\,|\boldsymbol{v}_{n_i}|\left(1-3\,\frac{\tau}{\Delta n}\,\sqrt{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2+c^2}\right).$$

Введем величину $h_i=\dfrac{\Delta n_i}{3}$ и вернемся к индексной записи. Тогда получим

$$\nu_i^n>\nu_{\min\ i}^n=\frac{h_i}{2}\left|\big(\hat{\boldsymbol{v}}_{n_i}\big)_i\right|\left(1-\frac{\tau_n}{h_i}\sqrt{\big(\hat{\boldsymbol{v}}_{n_i}\big)_i^2+c_i^2}\right),$$

где $\big(\hat{\boldsymbol{v}}_{n_i}\big)_i=\dfrac{(\boldsymbol{v}_{n_i})_{O_i}+(\boldsymbol{v}_{n_i})_O}{2}$, $c_i^2=\gamma\left|\dfrac{p_{O_i}+p_O}{\rho_{O_i}+\rho_O}\right|$. Теперь перейдем к условию $A_O>0$. Учитывая то, что $\dfrac{1}{\omega_O}\displaystyle\sum_i S_i\,\frac{\Delta n_{iO}}{3}=1$, получим

$$A_O=\frac{1}{2\omega}\sum_i S\left(\frac{\Delta n}{3}-\frac{\tau^2\big((\boldsymbol{v}_{n_i})^2+c^2\big)}{\Delta n/3}-\frac{2\tau\nu}{\Delta n/3}\right). \qquad (11)$$

Потребуем, чтобы в (11) каждое выражение в скобках было положительным, тогда

$$\frac{\Delta n}{3}-\frac{\tau^2\big((\boldsymbol{v}_{n_i})^2+c^2\big)}{\Delta n/3}-\frac{2\tau\nu}{\Delta n/3}>0.$$

Заменив $\dfrac{\Delta n_i}{3}$ на h_i, получим

$$\nu<\frac{h^2}{2\tau}\left(1-\left(\frac{\tau}{h}\sqrt{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2+c^2}\right)^2\right). \qquad (12)$$

Неравенство (12) вводит ограничение на шаг по времени $\sqrt{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2 + c^2} < \dfrac{h}{\tau}$. Для того чтобы оно было выполнено, потребуем, чтобы

$$\tau_n < \mathrm{Ku} \cdot \min_{\tilde{x}_i \in \tilde{\Omega}_h} \frac{\Delta n_i}{3\sqrt{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2 + c_i^2}}\,, \tag{13}$$

где $0 < \mathrm{Ku} < 1$ — число Куранта. Для выполнения (12) достаточно потребовать, чтобы

$$\nu < \frac{h}{2}\sqrt{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2 + c^2}\left(1 - \left(\frac{\tau}{h}\sqrt{(\boldsymbol{v}_{n_i})^2 + c^2}\right)^2\right).$$

В индексной записи верхнее ограничение на ν примет вид

$$\nu_i^n < \nu_{\max\, i}^n = \frac{h_i}{2}\sqrt{\left(\hat{\boldsymbol{v}}_{n_i}\right)_i^2 + c_i^2}\left(1 - \left(\frac{\tau}{h_i}\sqrt{\left(\hat{\boldsymbol{v}}_{n_i}\right)_i^2 + c_i^2}\right)^2\right).$$

Таким образом, для монотонизации разностной схемы следует вводить искусственную вязкость $\nu_{\min\, i}^n \leqslant \nu_i^n \leqslant \nu_{\max\, i}^n$. Однако введение такой вязкости в каждом узле сильно размывает решение, поэтому необходимо наложить некоторые ограничения на области введения вязкости. Для этого нам понадобится определить области ударных волн (волн сжатия), волн растяжения, контактного разрыва и области осцилляции решения.

Предположим, что мы получили предикторное решение $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\tilde{\varepsilon}$. Для того чтобы определить, к какой области принадлежит узел x_O, построим линейное восполнение функций $\tilde{\rho}$, $\dfrac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}$ и $\tilde{\boldsymbol{v}}$ по четырем узлам x_{O_i}, прилегающим к узлу x_O. В случае отсутствия узла x_{O_i} (если $S_i \in \Gamma_h$) следует взять соответствующий потоковый узел $\tilde{x}_i$, значение функции в котором следует положить равным значению в узле x_O. Затем по построенным функциям найдем их производные в точке x_O по пространственным переменным. Далее по найденным производным найдем производные функций $\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{l}$ и $\dfrac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}$ в направлении вектора $\boldsymbol{l} = \dfrac{\nabla\tilde{\rho}}{|\nabla\tilde{\rho}|}$ в точке x_O. Иными словами, найдем приближенные значения

$$J_O^{\text{кр}} \approx \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)\right)_O \quad \text{и} \quad J_O^{\text{вс}} \approx \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}}\,(\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{l})\right)_O.$$

Теперь проанализируем значения этих производных в каждом узле. Если $J_O^{\text{кр}} > 0$, то в узле x_O нет контактного разрыва, а если $J_O^{\text{вс}} < 0$, то узел x_O находится в области ударной волны (волны сжатия). Области осцилляции решения определим следующим образом: если для узла x_O выполнено одно из соотношений $\max\limits_{S_i \in \omega_O} \tilde{\rho}_{O_i} < \tilde{\rho}_O$ или $\min\limits_{S_i \in \omega_O} \tilde{\rho}_{O_i} > \tilde{\rho}_O$, то в узле x_O решение осциллирует.

В потоковых узлах, граничащих с областью осцилляции решения, введем схемную вязкость $\nu_{\max\, i}$, а в потоковых узлах, граничащих с областью ударных волн (волн сжатия), при условии отсутствия контактного разрыва и осцилляций введем вязкость $\nu_{\min\, i}$. В остальных узлах вязкость вводить не будем. Предложенный метод позволяет подавить осцилляции сеточного решения, однако следует отметить, что при расчетах на "плохо" структурированных сетках иногда требуется дополнительно вводить вязкость $\nu_{\max\, i}$ в соседних потоковых узлах в случае возникновения сильных осцилляций.

8. Численный эксперимент. Для оценки работы алгоритма была проведена серия численных экспериментов, результаты которых приведены ниже в сравнении с результатами реального физического эксперимента. Суть теста заключается в следующем: рассмотрим задачу определения давления переключения струйного транзистора. Данный прибор представляет собой канал с ответвлениями, имеющий несколько входных, выходных и вентиляционных отверстий. Среди входных отверстий имеется одно, на которое, как правило, нагнетается газ постоянного давления. В дальнейшем будем называть этот вход каналом питания. Остальные входные каналы называются каналами управления и служат для перенаправления потока газа с канала питания в различные выходные отверстия. Выходных каналов всего два, причем прибор спроектирован таким образом, что весь поток газа, нагнетаемый на канал питания, выходит ровно в одно из двух выходных отверстий. При этом некоторая часть газа может выходить через вентиляционные отверстия. Целью данного эксперимента является численное определение давления газа на управляющих входах, необходимое для перенаправления потока газа во второе выходное отверстие.

Опишем условия проведения физического эксперимента. Характерные размеры области составляют 1см $\times$ 1см $\times$ 1мм. Рабочим телом служит воздух. Давление окружающей среды составляет 745 мм рт.

ст., а температура 15° C. На канал питания нагнетается газ, давление которого равно $1\,\dfrac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$ или $2\,\dfrac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$. После того как течение установилось, на одном из управляющих каналов плавно повышают давление (изначально оно равнялось атмосферному) вплоть до того момента, пока выходной поток не переключится с первого выходного отверстия на второе. При этом выходные каналы, вентиляционные каналы и оставшиеся управляющие каналы выходят в атмосферу. Ни на какие два управляющих входа давление не нагнетается одновременно.

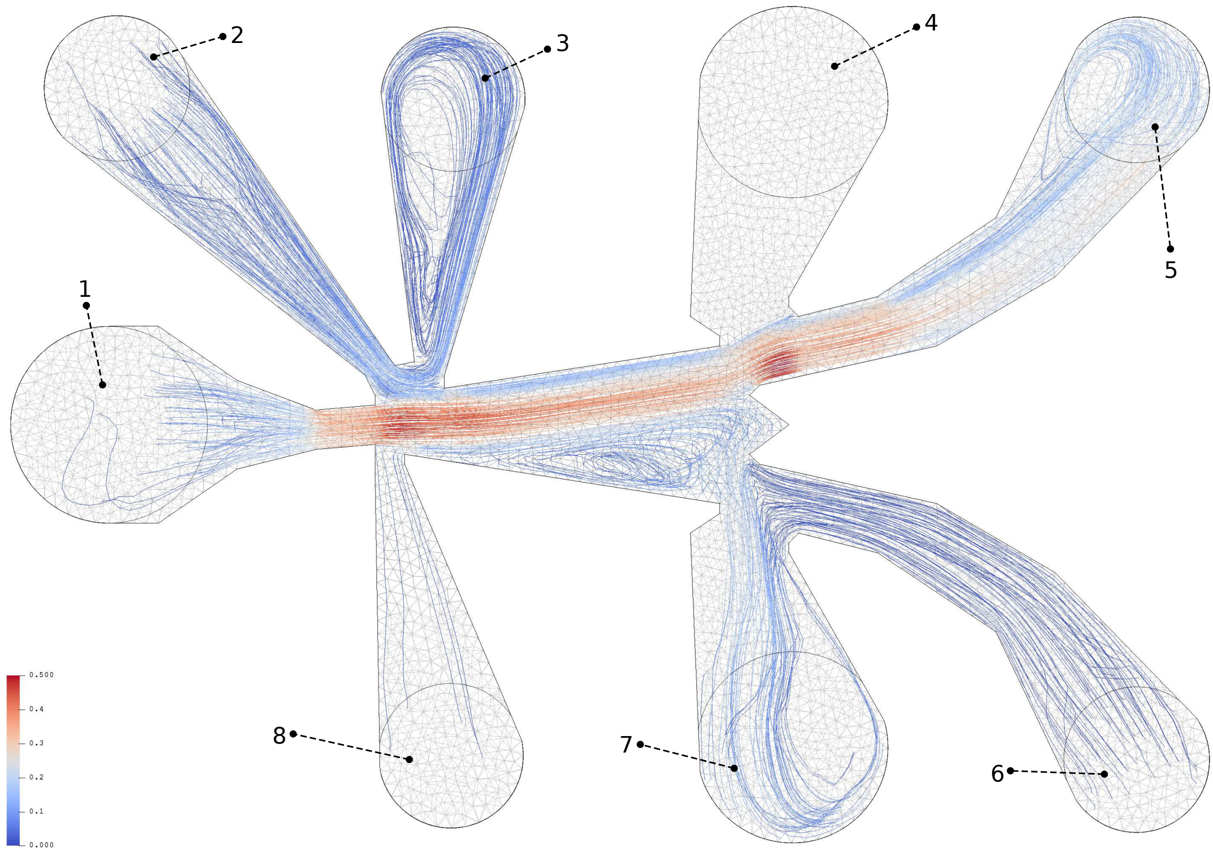
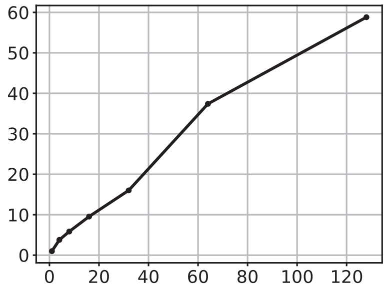


Рис. 2. Линии тока до момента переключения, вид сверху. Цифрой 1 обозначен канал питания. Цифрами 2 и 3 обозначены первый и второй управляющие каналы соответственно. Цифрами 5 и 6 обозначены первое и второе выходное отверстие соответственно. Цифрами 4, 7 и 8 обозначены вентиляционные отверстия

Численный эксперимент проводился на сетке, состоящей из 1.4 млн тетраэдров. Для построения сетки использовался свободный программный пакет Gmsh [13]. К сожалению, данный пакет не позволяет построить сетку из преимущественно остроугольных тетраэдров. Таким образом, примерно у половины тетраэдров центр описанной сферы находился вне ячейки. Тем не менее, сетка оказалась “хорошо” структурирована, т.е. в ней практически отсутствовали “плоские” тетраэдры, а именно средний объем тетраэдра составляет 2.61×10^{-5}, а средняя площадь грани 1.28×10^{-3}, расстояние измеряется в миллиметрах. Граничные условия в эксперименте следующие: на входной границе канала питания задано постоянное давление $1\,\dfrac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$ или $2\,\dfrac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$, на участке границы, содержащей выходные и вентиляционные отверстия, задано атмосферное давление и атмосферная температура. Температура на жесткой стенке считается равной атмосферной. Давление и температура на участке границы, содержащей не используемые в текущем эксперименте управляющие входы, задаются атмосферными. Температура на входном отверстии питания и на активном управляющем входе определяется приближенно исходя из баротропной модели газа, а именно $p = C\rho^\gamma$, где p — давление газа, ρ — плотность, γ — показатель адиабаты Пуассона, а C — некоторый коэффициент, определяемый температурой газа при атмосферном давлении. Физические величины, входящие в состав уравнений (1)–(4), считаем постоянными и задаем их по таблице в соответствии с физическими свойствами воздуха. Давление на активном управляющем входе повышается линейно от атмосферного давления вплоть до того момента, пока струя не перенаправится в другое выходное отверстие. Характерный физический временной интервал, моделируемый в данном эксперименте, составляет около 15 мс.



Расчет проводился с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса “Ломоносов”. Время расчета на 128 узлах (1024 ядер) составляет около суток. Результаты численных экспериментов показали, что алгоритм хорошо масштабируется на несколько вычислительных узлов.

В частности, при использовании 128 узлов удалось достичь ускорения расчетов приблизительно в 60 раз. На рисунке справа показано ускорение работы алгоритма в зависимости от числа вычислительных узлов. Стоит отметить, что в данной работе детально не изучались способы разделения сетки на кластеры таким образом, чтобы количество тетраэдров, соприкасающихся с соседними кластерами, было минимальным. Исследования в этой области могут существенно сократить объем пересылок и улучшить масштабируемость метода.

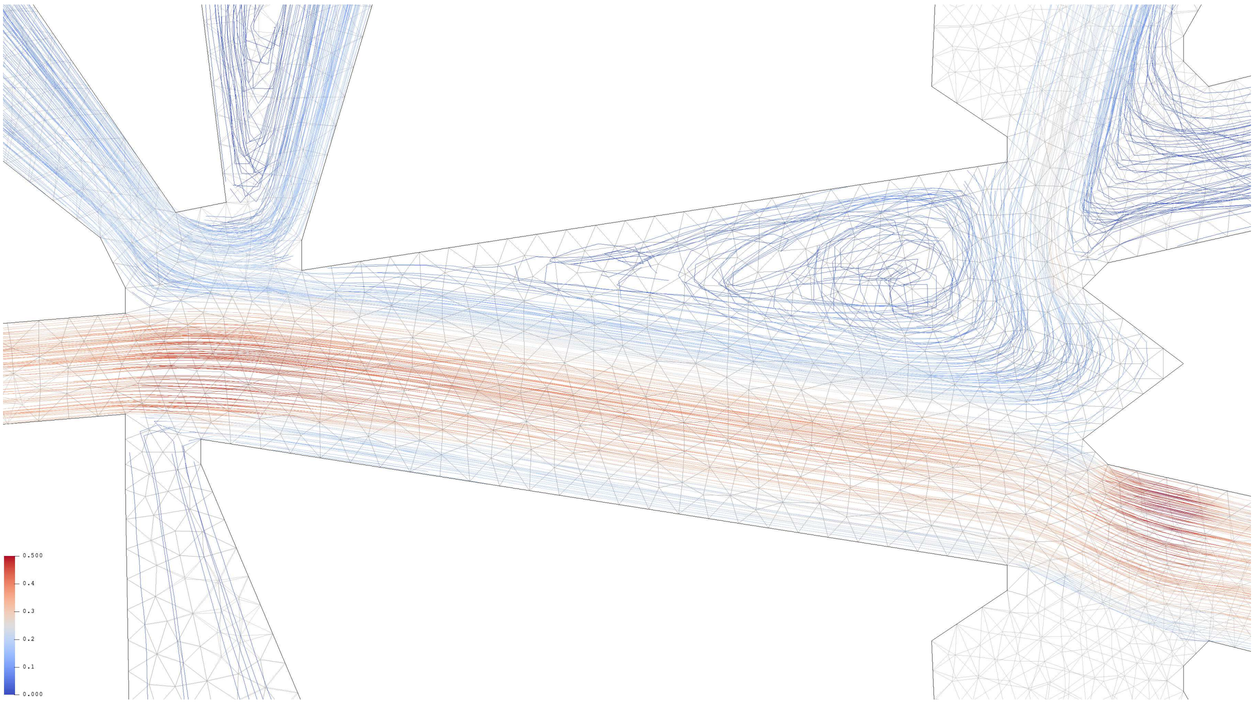


Рис. 3. Линии тока после переключения, вид сверху

На рис. 2 и 3 изображены линии тока до момента переключения и после соответственно. На обоих рисунках в эксперименте участвует первый управляющий канал, второй управляющий канал выходит в атмосферу. Цветом обозначена скорость газа.

Сравнение результатов численного и натурного экспериментов

Давление питания, $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$	Управляющий канал	Давление переключения в численном эксперименте, $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$	Давление переключения в натурном эксперименте, $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$
1	1	0.15–0.16	0.17
1	2	0.15	0.13
2	1	0.34	0.35
2	2	0.32	0.32

В таблице приведены точные значения давления на первом и втором управляющих каналах в зависимости от давления на канале питания, необходимого для перенаправления потока газа во второе выходное отверстие, а также значения, полученные в результате численного эксперимента. Результаты численного расчета оказались близки к результатам натурных испытаний.

Численные расчеты проведены с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Данная работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 17–01–00838).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2008. **20**, № 8. 48–60.
2. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 1. 32–45.
3. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 5. 57–66.
4. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* О методе адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 7. 121–128.
5. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* О новом выборе адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 12. 23–32.
6. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* Конечно-разностный метод решения трехмерных уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2011. **23**, № 3. 89–100.
7. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 6. 109–127.
8. *Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996.
9. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
10. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
11. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. **13**, N 2. 217–237.
12. *MacCormack R.W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper N 69-354. 1969.
13. *Geuzaine C., Remacle J.-F.* Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. **79**, N 11. 1309–1331.

Поступила в редакцию
20.11.2017

A Method of Adaptive Artificial Viscosity for Solving Numerically the Equations of a Viscous Heat-Conducting Compressible Gas

D. V. Ivanov[1], **G. M. Kobelkov**[2], **M. A. Lozhnikov**[3], **and A. F. Kharisov**[4]

[1] *Korotkov Research and Production Company "Temp"; ulitsa Pravdy 23, Moscow, 127015, Russia; Ph.D., General Director, e-mail: d.ivanov@npptemp.com*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru*

[3] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Graduate Student, e-mail: lozhnikovma@gmail.com*

[4] *Korotkov Research and Production Company "Temp"; ulitsa Pravdy 23, Moscow, 127015, Russia; Programmer, e-mail: a.kharisov@npptemp.com*

Received November 20, 2017

Abstract: This paper is devoted to the numerical solution of the dynamics equations for a viscous heat-conducting compressible gas by the method of adaptive viscosity on unstructured tetrahedral meshes. A combination of the MacCormack method and the Lax–Wendroff method allows one to monotonize the difference scheme using the method of frozen coefficients. The numerical results are in good agreement with experimental data.

Keywords: numerical simulation, gas dynamics, unstructured meshes, artificial viscosity.

References

1. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “Finite-Difference Method for Solving Gas Dynamics Equations Using Adaptive Artificial Viscosity,” Mat. Model. **20** (8), 48–60 (2008) [Math. Models Comput. Simul. **1** (4), 493–502 (2009)].

2. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “Adaptive Artificial Viscosity for Multidimensional Gas Dynamics for Euler Variables in Cartesian Coordinates,” Mat. Model. **22** (1), 32–45 (2010) [Math. Models Comput. Simul. **2** (4), 429–442 (2010)].

3. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “Calculations of Two-Dimensional Test Problems by the Method of Adaptive Viscosity,” Mat. Model. **22** (5), 57–66 (2010) [Math. Models Comput. Simul. **2** (6), 724–732 (2010)].

4. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “A Method of Adaptive Artificial Viscosity,” Mat. Model. **22** (7), 121–128 (2010) [Math. Models Comput. Simul. **3** (1), 18–24 (2011)].

5. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “On the New Choice of Adaptive Artificial Viscosity,” Mat. Model. **22** (12), 23–32 (2010) [Math. Models Comput. Simul. **3** (4), 411–418 (2011)].

6. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “Finite-Difference Method for Computation of 3-D Gas Dynamics Equations with Artificial Viscosity,” Mat. Model. **23** (3), 89–100 (2011) [Math. Models Comput. Simul. **3** (5), 587–595 (2011)].

7. I. V. Popov and I. V. Fryazinov, “Method of Adaptive Artificial Viscosity for Gas Dynamics Equations on Triangular and Tetrahedral Grids,” Mat. Model. **24** (6), 109–127 (2012) [Math. Models Comput. Simul. **5** (1), 50–62 (2013)].

8. A. A. Samarskii, A. V. Koldoba, Yu. A. Poveshchenko, et al., *Difference Schemes on Irregular Grids* (Kriterii, Minsk, 1996) [in Russian].

9. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Difference Schemes for Solving Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1992) [in Russian].

10. T. G. Elizarova, *Quasi-Gas-Dynamic Equations and Methods of Calculation of Viscous Flows* (Nauchnyi Mir, Moscow, 2007) [in Russian].

11. P. Lax and B. Wendroff, “Systems of Conservation Laws,” Commun. Pure Appl. Math. **13** (2), 217–237 (1960).

12. R. W. MacCormack, “The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering,” AIAA Paper No. 69-354 (1969).

13. C. Geuzaine and J.-F. Remacle, “Gmsh: A Three-Dimensional Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre- and Post-Processing Facilities,” Int. J. Numer. Meth. Eng. **79** (11), 1309–1331 (2009).