

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v19r106

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА ОЗЕЕНА В $L$ -ОБРАЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. В. Рукавишников<sup>1</sup>

Для задачи типа Озеена в вихревой форме в многоугольной области с входящим тупым углом на границе определено  $R_\nu$ -обобщенное решение. Для ее приближенного решения построен весовой метод конечных элементов. Численные эксперименты модельной задачи в  $L$ -образной области показали преимущества предложенного метода.

**Ключевые слова:** задача Озеена с сингулярностью, весовой метод конечных элементов.

**Введение.** Для системы уравнений Максвелла в двумерной многоугольной области  $\Omega$  с входящим тупым углом на границе известно, что ее обобщенное решение не принадлежит пространству Соболева  $W_2^1(\Omega)$ . Такая задача называется краевой задачей с сильной сингулярностью. Для системы Ламе, например, в области с тупым углом на границе можно определить обобщенное решение в пространстве  $W_2^1(\Omega)$ , но оно не будет принадлежать пространству  $W_2^2(\Omega)$ . Такая задача называется краевой задачей со слабой сингулярностью. В [1] для эллиптических краевых задач было предложено определять решение как  $R_\nu$ -обобщенное в весовом пространстве Соболева. Предложенный метод позволил построить весовой метод конечных элементов и получить лучший (большой) порядок сходимости приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения к точному решению задачи по сравнению с классическим конечно-разностным и конечно-элементным подходами.

В настоящей статье предложен численный метод решения задачи типа Озеена в вихревой форме в области с тупым углом. Отметим, что решение задачи имеет особенность в угле  $\varphi$ ,  $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ , даже если входные данные задачи гладкие. Двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в невыпуклой области впервые изучено в [2]. Для обобщенного решения задачи Стокса (следовательно, и задачи Озеена) хорошо известно, что компоненты вектора скоростей и функция давления в области  $\Omega$  с тупым углом на границе не принадлежат пространствам  $W_2^2(\Omega)$  и  $W_2^1(\Omega)$  соответственно [3], а приближенное решение, полученное с помощью стандартных конечно-разностных и конечно-элементных схем, сходится к точному решению задачи со скоростью, не превосходящей  $\mathcal{O}(h^\xi)$ ,  $\xi < 1$ , для компонент вектора скоростей и функции давления в нормах пространств  $W_2^1(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  соответственно и со скоростью  $\mathcal{O}(h^{2\xi})$  для компонент вектора скоростей в норме пространства  $L_2(\Omega)$ . Такой эффект загрязнения, в частности для задачи Стокса (см., например, [4]), наблюдается не только в нормах классических пространств Соболева, но и в нормах весовых пространств. Для того чтобы построить эффективный приближенный метод решения задачи, вычислителю необходимо знать, как ведет себя решение в полярных координатах в окрестности входящего угла. Сингулярные компоненты решения характеризуются числами, которые являются решениями соответствующего нелинейного уравнения и зависят от величины тупого угла (более подробно см. [3, 5], а также [6–8]).

В нашей статье построен весовой метод конечных элементов [9–14] (МКЭ), основанный на определении  $R_\nu$ -обобщенного решения [1, 15–18] в  $L$ -образной области и использовании Скотт–Вогелиус элементной пары второго порядка [19], основанной на триангуляции с барицентрическим измельчением. В [20] установлена LBB-устойчивость рассматриваемой Скотт–Вогелиус элементной пары.

Численные эксперименты для модельной задачи показали, что приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение (вектор скоростей и функция давления) сходится к точному решению со скоростью  $\mathcal{O}(h)$  в нормах пространств  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$  и  $L_{2,\nu}(\Omega)$  соответственно и вектор скоростей сходится к точному решению со скоростью  $\mathcal{O}(h^2)$  в норме пространства  $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$ , что почти в два раза лучше по порядку, чем в классических подходах.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $R^2$  — двумерное евклидово пространство,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  — его элемент с нормой  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  и мерой  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$ . Пусть  $\Omega \subset R^2$  ограниченная невыпуклая  $L$ -образная область с границей  $\Gamma$ . Вершина тупого угла находится в начале координат,  $\bar{\Omega}$  — замыкание области  $\Omega$ , т.е.  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ .

<sup>1</sup> Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН (Хабаровское отделение), ул. Дзержинского, д. 54, 680000, г. Хабаровск; вед. науч. сотр., e-mail: 78321a@mail.ru

Запишем уравнения Навье–Стокса несжимаемой жидкости в переменных скорость–давление в конвективной форме: найти  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))$  (вектор скоростей) и  $p(\mathbf{x}, t)$  (кинематическое давление), удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \bar{\nu} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega \times (0, T] \quad (1)$$

при заданных массовых силах  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  и кинематической вязкости  $\bar{\nu} > 0$ . Систему (1) дополним начальными и граничными условиями

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на } \Gamma \times (0, T], \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$  — заданные функции в  $\Omega$  и на  $\Gamma$  соответственно.

Используя равенство  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$  и заменив кинематическое давление  $p$  давлением Бернулли [21]  $P = p + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ , перепишем систему (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \bar{\nu} \Delta \mathbf{u} + (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \quad (3)$$

Эта система является альтернативной записью уравнений Навье–Стокса в вихревой форме. Условия (2) для нее являются начальными и граничными условиями в  $\Omega$  и на  $\Gamma$  соответственно. Линеаризация, основанная на итерациях Пикара (см. [22] и цитируемую там литературу), и применение неявных схем по времени для (3) приводит к системе Озеена в вихревой форме. Задача состоит в том, чтобы найти  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  (вектор скоростей) и  $P$  (давление), удовлетворяющие системе уравнений и граничным условиям

$$\alpha \mathbf{u} - \bar{\nu} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на } \Gamma, \quad (5)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}$  — известное приближение к  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = (-wu_2, wu_1)$ . Следует отметить, что линеаризация  $(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$  обеспечивает эллиптичность той части системы, что зависит от вектора скоростей в первом уравнении (4). Для линеаризованной системы остаются справедливы законы сохранения.

В настоящей работе определим  $R_\nu$ -обобщенное решение задачи (4)–(5), построим весовой метод конечных элементов ее решения. Проведем серию численных экспериментов и покажем преимущество предложенного метода перед классическими подходами в  $L$ -образной области (с тупым углом, равным  $3\pi/2$  в начале координат на границе области  $\Omega$ ).

Введем обозначения и определим необходимые пространства обобщенных функций. Обозначим через  $\Omega'_\delta = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \|\mathbf{x}\| \leq \delta < 1, \delta > 0\}$  часть  $\delta$ -окрестности точки  $(0, 0)$ , принадлежащей  $\bar{\Omega}$ . Определим весовую функцию  $\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|, & \mathbf{x} \in \Omega'_\delta, \\ \delta, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \Omega'_\delta. \end{cases}$

Через  $L_{2,\beta}(\Omega)$  обозначим пространство функций с ограниченной нормой

$$\|u\|_{L_{2,\beta}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \rho^{2\beta}(\mathbf{x}) u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Пусть  $W_{2,\beta}^1(\Omega)$  — пространство функций с ограниченной нормой

$$\|u\|_{W_{2,\beta}^1(\Omega)} = \left( \sum_{|m| \leq 1} \|\rho^\beta(\mathbf{x}) |D^m u(\mathbf{x})|\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (6)$$

где  $D^m u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|m|} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}}$ ,  $|m| = m_1 + m_2$ ,  $m_i \geq 0$  — целые. Через  $W_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$  для  $\beta > 0$  обозначим множество функций из пространства  $W_{2,\beta}^1(\Omega)$ , удовлетворяющих условиям

$$\int_{\bar{\Omega} \setminus \Omega'_\delta} \rho^{2\beta}(\mathbf{x}) u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq C_1 > 0, \quad |D^m u(\mathbf{x})| \leq C_2 \left( \frac{\delta}{\rho(\mathbf{x})} \right)^{\beta+m}, \quad \mathbf{x} \in \Omega'_\delta, \quad (7)$$

где  $m = 0, 1$  и  $C_2$  — положительная константа, не зависящая от  $m$ , с нормой (6). Через  $L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$  обозначим множество функций из пространства  $L_{2,\beta}(\Omega)$ , которые подчиняются требованиям (7) (при  $m = 0$ ) с нормой  $L_{2,\beta}(\Omega)$ . Пусть  $L_{2,\beta}^0(\Omega, \delta) = \{q \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta) : \int_{\Omega} \rho^{\beta} q \, d\mathbf{x} = 0\}$ .

Через  $\overset{o}{W}_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$  ( $\overset{o}{W}_{2,\beta}^1(\Omega, \delta) \subset W_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$ ) обозначим замыкание по норме (6) множества бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  функций, удовлетворяющих условиям (7).

Будем говорить, что  $\varphi(\mathbf{x}) \in W_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)$ , если существует  $\Phi(\mathbf{x}) \in W_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$ , такая, что  $\Phi(\mathbf{x})|_{\Gamma} = \varphi(\mathbf{x})$  и  $\|\varphi\|_{W_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)} = \inf_{\Phi|_{\Gamma} = \varphi} \|\Phi\|_{W_{2,\beta}^1(\Omega)}$ . Для вектор-функций  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  определим множества  $\mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta)$  и  $\mathbf{W}_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$ , такие, что  $v_i \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$  и  $v_i \in W_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$  с ограниченной нормой пространств  $\mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega)$  и  $\mathbf{W}_{2,\beta}^1(\Omega)$  соответственно. Аналогично для вектор-функций вводятся множества  $\overset{o}{\mathbf{W}}_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$  и  $\mathbf{W}_{\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)$ .

Введем для задачи (4)–(5) понятие  $R_{\nu}$ -обобщенного решения.

**Определение 1.** Пару функций  $(\mathbf{u}_{\nu}, P_{\nu}) \in \overset{o}{\mathbf{W}}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$  назовем  $R_{\nu}$ -обобщенным решением задачи (4)–(5), если  $\mathbf{u}_{\nu}(\mathbf{x})$  удовлетворяет условию (5) на  $\Gamma$  и для любой пары  $(\mathbf{v}, q) \in \overset{o}{\mathbf{W}}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$  и  $w \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{g} \in \mathbf{W}_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)$ ,  $\nu \geq \beta$  справедливы интегральные равенства

$$a(\mathbf{u}_{\nu}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, P_{\nu}) = l(\mathbf{v}), \quad c(\mathbf{u}_{\nu}, q) = 0,$$

где билинейные и линейная формы имеют вид

$$a(\mathbf{u}_{\nu}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [\alpha \rho^{2\nu} \mathbf{u}_{\nu} \cdot \mathbf{v} + \bar{\nu} \nabla \mathbf{u}_{\nu} \cdot \nabla (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) + \rho^{2\nu} (w \times \mathbf{u}_{\nu}) \cdot \mathbf{v}] \, d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}, P_{\nu}) = - \int_{\Omega} P_{\nu} \operatorname{div} (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

$$c(\mathbf{u}_{\nu}, q) = - \int_{\Omega} (\rho^{2\nu} q) \operatorname{div} \mathbf{u}_{\nu} \, d\mathbf{x}, \quad l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

**2. Схема весового метода конечных элементов.** Выполним триангуляцию  $\Upsilon_h$ , основанную на барицентрическом разбиении элементов квазиравномерной триангуляции  $T_h$  области  $\bar{\Omega}$  [23]. Таким образом, разобьем  $\bar{\Omega}$  на конечное число треугольников  $L_i$ ,  $L_i \in T_h$  (макроэлемент). Затем каждый  $L_i$  поделим на три треугольника  $K_{ij}$  (конечный элемент),  $K_{ij} \in \Upsilon_h$  (общая вершина которых находится в барицентре макроэлемента  $L_i$ ). Обозначим через  $R_l$  и  $S_k$  вершины и середины сторон  $K_s$  соответственно. Тогда

1)  $R^{\text{vel}} = R_{\Omega}^{\text{vel}} \cup R_{\Gamma}^{\text{vel}} = \{R_l \cup S_k\}$ , где  $R_{\Omega}^{\text{vel}}$  и  $R_{\Gamma}^{\text{vel}}$  — множества узлов триангуляции для компонент вектора скоростей в  $\Omega$  и на  $\Gamma$  соответственно;

2)  $R^{\text{pres}} = \{Q_l\}$  — множество узлов триангуляции для давления, где  $Q_l$  совпадает с узлом  $R_k$  на соответствующем  $K_{ij}$ .

Обозначим через  $\Omega_h = \bigcup_{K_s \in \Upsilon_h} K_s$  совокупность конечных элементов со стороной порядка  $h$ . Далее, опишем Скотт–Вогелиус (SV) элементную пару (см. [19], случай  $k = 2$ ). Для компонент вектора скоростей используем полиномы второй степени ( $X^h$ ), а для давления — первой степени ( $Z^h$ ):

$$X^h = \left\{ v^h \in C(\Omega) : v^h|_K \in P_2(K), \forall K \in \Upsilon_h \right\}; \quad Z^h = \left\{ z^h \in L_2(\Omega) : z^h|_K \in P_1(K), \forall K \in \Upsilon_h, \int_{\Omega} z^h \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Далее, представим специальные базисные функции и построим схему весового метода конечных элементов для задачи (4)–(5). Каждому узлу  $M_k \in R_{\Omega}^{\text{vel}}$  ( $N_l \in R^{\text{pres}}$ ) соответствует базисная функция

$$\theta_k(\mathbf{x}) = \rho^{\nu^*}(\mathbf{x}) \cdot \varphi_k(\mathbf{x}), \quad (\chi_l(\mathbf{x}) = \rho^{\mu^*}(\mathbf{x}) \cdot \psi_l(\mathbf{x})), \quad k = 0, 1, \dots, (l = 0, 1, \dots),$$

где  $\varphi_k \in X^h$ ,  $\varphi_k(M_j) = \delta_{kj}$ ,  $k, j = 0, 1, \dots$  ( $\psi_l \in Z^h$ ,  $\psi_l(N_j) = \delta_{lj}$ ,  $l, j = 0, 1, \dots$ );  $\delta_{lj}$  — символ Кронекера,  $\nu^*$  и  $\mu^*$  — действительные числа.

Пространства  $V^h$  и  $Q^h$  для компонент вектора скоростей и давления определяются как линейные оболочки систем базисных функций  $\{\theta_k\}_k$  и  $\{\chi_l\}_l$  соответственно. Пусть  $V_0^h$  — подпространство  $V^h$  :  $V_0^h = \left\{ v^h \in V^h : v^h(M_k)|_{M_k \in R_{\Gamma}^{\text{vel}}} = 0 \right\}$ . Приближенные компоненты вектора скоростей и функции давления будем искать в виде

$$\mathbf{u}_{\nu,1}^h(\mathbf{x}) = \sum_k d_{2k} \theta_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_{\nu,2}^h(\mathbf{x}) = \sum_k d_{2k+1} \theta_k(\mathbf{x}), \quad p_{\nu}^h(\mathbf{x}) = \sum_l e_l \chi_l(\mathbf{x}), \quad (8)$$

где  $d_j = \rho^{-\nu^*} (M_{[j/2]}) \tilde{d}_j$ ,  $e_i = \rho^{-\mu^*} (N_i) \tilde{e}_i$ . Коэффициенты  $d_j$  и  $e_i$  в (8) находим в результате решения системы (9) (см. ниже). Пусть  $\mathbf{V}^h = V^h \times V^h$ ,  $\mathbf{V}_0^h = V_0^h \times V_0^h$  и  $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_h, \delta)$ ,  $\mathbf{V}_0^h \subset \overset{\circ}{\mathbf{W}}_{2,\nu}^1(\Omega_h, \delta)$ ,  $Q^h \subset L_{2,\nu}^0(\Omega_h, \delta)$ .

**Определение 2.** Приближенным  $R_\nu$ -обобщенным решением задачи (4)–(5), полученным с помощью весового МКЭ, назовем пару функций  $(\mathbf{u}_\nu^h, P_\nu^h) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$ , такую, что  $\mathbf{u}_\nu^h = (u_{\nu,1}^h, u_{\nu,2}^h)$  в узлах множества  $R_\Gamma^{\text{rel}}$  удовлетворяет условию (5) и для произвольных пар  $(\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}_0^h \times Q^h$  и  $w \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ ,  $\mathbf{g} \in \mathbf{W}_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)$ ,  $\nu \geq \beta$ , выполняются равенства

$$a(\mathbf{u}_\nu^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{v}^h, P_\nu^h) = l(\mathbf{v}^h), \quad c(\mathbf{u}_\nu^h, q^h) = 0. \quad (9)$$

**3. Построение итерационного процесса.** Конечно-элементная задача (9) порождает систему линейных алгебраических уравнений с седловой точкой вида

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В нашем случае,  $A$  — положительно определенная квадратная матрица,  $B$  и  $C^T$  — прямоугольные (не квадратные) матрицы,  $\zeta = \mathbf{u}_\nu^h$ ,  $\eta = P_\nu^h$ ,  $\omega = \mathbf{f}^h$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ .

Для нахождения решения системы (10) построим сходящийся итерационный процесс [24]. Для этого

1) выберем произвольные начальные приближения  $\eta^0, \zeta^0$  для (10);  
2) проведем итерации  $k = 0, 1, 2, \dots$ , далее 3) и 4), пока не будет выполнено условие остановки итерационного процесса;

3) вычислим  $\zeta^{k+1} = \zeta^k + \hat{A}^{-1}(\omega - A\zeta^k - B\eta^k)$ ;

4) найдем  $\eta^{k+1} = \eta^k + \hat{S}^{-1}(C^T \zeta^{k+1} - \mathbf{z})$ .

В пунктах 3 и 4 матрицы  $\hat{A}$  и  $\hat{S}$  — переобуславливающие матрицы для матриц  $A$  и дополнения по Шуру  $S = C^T A^{-1} B$  соответственно.

Для построения матрицы  $\hat{A}$  используем неполное  $LU$ -разложение матрицы  $A - ILU(0)$  [25]. Задачу  $A\mathbf{q} = \chi$  на каждой итерации в пункте 3 решаем с помощью обобщенного метода минимальных невязок GMRES( $n$ ) с левым переобуславливанием матрицы  $A$  системы. Пусть  $\mathbf{r}_0 = \hat{A}^{-1}(\chi - A\mathbf{q})$ , тогда процедура Арнольди образует ортогональный базис в  $n$ -м подпространстве Крылова:

$$\text{Span} \left\{ \mathbf{r}_0, \hat{A}^{-1} A \mathbf{r}_0, \dots, (\hat{A}^{-1} A)^{n-1} \mathbf{r}_0 \right\}, \quad n = 10.$$

Далее, построим вспомогательную матрицу  $\tilde{S}$  к  $\hat{S}$ , которая является весовой матрицей масс  $M_P^{\nu, \mu^*}$  пространства давления, такой, что на каждом  $L \in \Upsilon_h$  выполнено

$$\left( M_P^{\nu, \mu^*} \right)_{lj} = \frac{1}{\nu} \int_L \rho^{2(\nu + \mu^*)} \psi_l(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad l, j = 0, 1, \dots$$

Затем определим диагональную матрицу  $\bar{S} = \bar{M}_P^{\nu, \mu^*}$ , где  $\left( \bar{M}_P^{\nu, \mu^*} \right)_{ii} = \sum_k \left( M_P^{\nu, \mu^*} \right)_{ik}$ . Известно [26], что таким образом построенная диагональная матрица является хорошим переобуславливателем для соответствующей ей матрицы масс.

Основываясь на вышесказанном, на каждой итерации пункта 4 находим вектор  $\psi^\circ := \hat{S}^{-1} \theta$  как решение внутренней итерационной процедуры:

1)  $\phi_0 = \mathbf{0}$ ;

2)  $\phi_m = \phi_{m-1} + \bar{S}^{-1} \left( \theta - \tilde{S} \phi_{m-1} \right)$ ,  $m = 1, \dots, M$ ;

3)  $\psi^\circ = \phi_M$ .

В нашем исследовании используем перезапускающийся GMRES( $k$ )-метод:

$$\text{Span} \left\{ \bar{\mathbf{r}}, \bar{S}^{-1} \tilde{S} \bar{\mathbf{r}}, \dots, (\bar{S}^{-1} \tilde{S})^{k-1} \bar{\mathbf{r}} \right\}, \quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{S}^{-1} (\theta - \tilde{S} \phi_{m-1}), \quad k = 5.$$

**4. Результаты численных экспериментов.** Пусть  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$ . Тогда разобьем  $\bar{\Omega}$  горизонтальными и вертикальными отрезками  $x_1^{(j)} = -1 + jh$ ,  $x_2^{(i)} = -1 + ih$ ,  $j, i = 0, \dots, N$ , на

элементарные квадраты  $S_l$ ,  $\{S_l\}_{l=1}^{G_h}$ ,  $h = \frac{2}{N}$ ,  $N$  – четное число,  $G_h = \frac{3N^2}{4}$ . Затем каждый  $S_l$  диагонально делим на два треугольника  $L_m$ , их множество (макроэлементов) обозначим через  $\{L_m\}_{m=1}^{3N^2/2}$ . Далее, каждый  $L_m$  разбиваем на три треугольника  $K_s$  (барицентрическое разбиение), их множество обозначим через  $\{K_s\}_{s=1}^{9N^2/2}$  (рис. 1).

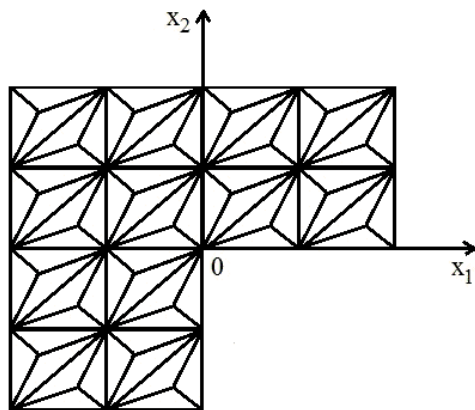


Рис. 1. Триангуляция  $\Upsilon_h$  области  $\bar{\Omega}$

Таблица 1  
Величины норм погрешностей обобщенного решения, при  $\nu = 0, \delta = 1, \nu^* = \mu^* = 0$

$N$	74	148	296
$\ \mathbf{u}^h - \mathbf{u}\ _{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$	2.886e-1	1.980e-1	1.358e-1
$\ \mathbf{u}^h - \mathbf{u}\ _{L_2(\Omega)}$	3.325e-3	1.523e-3	7.081e-4
$\ P^h - P\ _{L_2(\Omega)}$	1.872e-1	1.286e-1	8.771e-2

Рассмотрим решение  $(\mathbf{u}, P)$  задачи (4)–(5), имеющее особенность в окрестности входящего тупого угла  $\omega = 3\pi/2$  с вершиной в начале координат  $(0, 0)$ . Пусть  $\alpha = \bar{\nu} = 1, w = b \cdot \text{rot } \mathbf{u}, b = 0.95$ . В полярных координатах  $(r, \varphi)$  точное решение (см., например, [27]) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 u_1(r, \varphi) &= r^\lambda \cdot ((1 + \lambda)\Psi(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + \Psi'(\varphi) \cdot \cos(\varphi)), \\
 u_2(r, \varphi) &= r^\lambda \cdot (\Psi'(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - (1 + \lambda)\Psi(\varphi) \cdot \cos(\varphi)), \\
 P(r, \varphi) &= -r^{\lambda-1} \cdot \frac{(1 + \lambda)^2 \Psi'(\varphi) + \Psi'''(\varphi)}{1 - \lambda}, \\
 \Psi(\varphi) &= \frac{\sin((1 + \lambda)\varphi) \cdot \cos(\omega\lambda)}{1 + \lambda} - \cos((1 + \lambda)\varphi) - \frac{\sin((1 - \lambda)\varphi) \cdot \cos(\omega\lambda)}{1 - \lambda} + \cos((1 - \lambda)\varphi).
 \end{aligned}$$

Число  $\lambda$  ( $\lambda \approx 0.544483$ ) является наименьшим положительным решением уравнения  $\sin(\lambda\omega) + \lambda \sin(\omega) = 0$ .

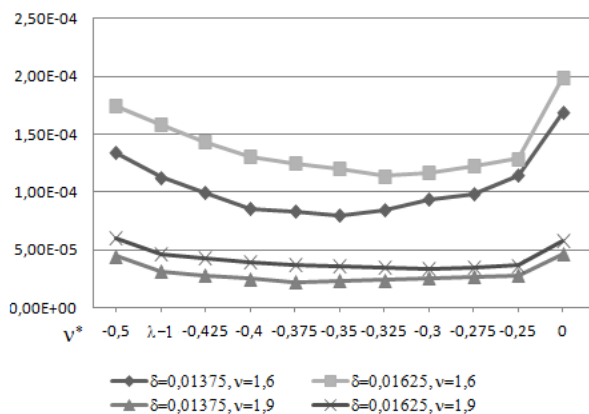


Рис. 2. График зависимости  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)}$  от параметра  $\nu^*$ ,  $N = 148$

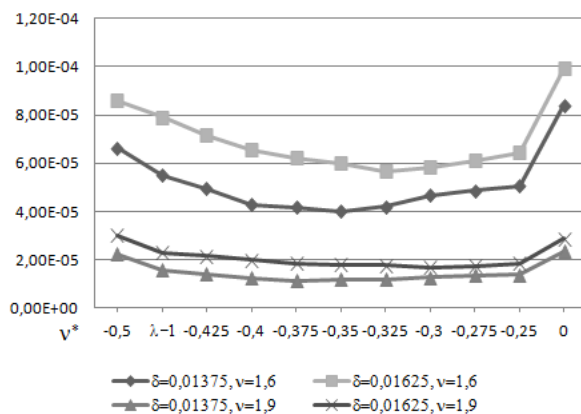


Рис. 3. График зависимости  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)}$  от параметра  $\nu^*$ ,  $N = 296$

Пара функций  $(\mathbf{u}, P)$  аналитична в  $\bar{\Omega} \setminus (0, 0)$ , но  $\nabla \mathbf{u}$  и  $P$  имеют особенность в начале координат, при этом  $\mathbf{u} \notin \mathbf{W}_2^2(\Omega)$  и  $P \notin W_2^1(\Omega)$  – типичное поведение решения задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в многоугольной области с входящим тупым углом на границе  $\Gamma$ .

Таблица 2

Величины  $\|\mathbf{u}_\nu^h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}(\Omega)}$   $R_\nu$ -обобщенного решения для различных  $\nu$  и  $\delta$

$(\nu, \delta), N =$	$\nu^* = \mu^* = \lambda - 1$			$\nu^* = \nu_{\text{opt}}^* = \mu^* = \mu_{\text{opt}}^*$			$\nu^* = \mu^* = 0$		
	74	148	296	74	148	296	74	148	296
(1.6,0.01375)	2.26e-4	1.12e-4	5.50e-5	1.61e-4	8.02e-5	3.99e-5	3.39e-4	1.68e-4	8.39e-5
(1.6,0.015)	2.85e-4	1.42e-4	7.08e-5	1.83e-4	9.10e-5	4.51e-5	3.58e-4	1.78e-4	8.91e-5
(1.6,0.01625)	3.18e-4	1.58e-4	7.89e-5	2.29e-4	1.13e-4	5.64e-5	3.95e-4	1.98e-4	9.91e-5
(1.9,0.01375)	6.23e-5	3.10e-5	1.54e-5	4.46e-5	2.23e-5	1.11e-5	9.35e-5	4.65e-5	2.32e-5
(1.9,0.015)	7.50e-5	3.73e-5	1.85e-5	5.31e-5	2.64e-5	1.32e-5	1.02e-4	5.06e-5	2.52e-5
(1.9,0.01625)	9.31e-5	4.60e-5	2.28e-5	6.78e-5	3.38e-5	1.67e-5	1.15e-4	5.74e-5	2.86e-5

Таблица 3

Величины  $\|\mathbf{u}_\nu^h - \mathbf{u}\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}$   $R_\nu$ -обобщенного решения для различных  $\nu$  и  $\delta$

$(\nu, \delta), N =$	$\nu^* = \mu^* = \lambda - 1$			$\nu^* = \nu_{\text{opt}}^* = \mu^* = \mu_{\text{opt}}^*$			$\nu^* = \mu^* = 0$		
	74	148	296	74	148	296	74	148	296
(1.6,0.01375)	4.41e-6	1.11e-6	2.80e-7	1.38e-6	3.46e-7	8.69e-8	9.59e-6	2.41e-6	6.07e-7
(1.6,0.015)	6.98e-6	1.75e-6	4.41e-7	1.89e-6	4.74e-7	1.18e-7	1.16e-5	2.94e-6	7.43e-7
(1.6,0.01625)	9.51e-6	2.39e-6	6.01e-7	2.82e-6	7.07e-7	1.77e-7	1.57e-5	3.96e-6	9.98e-7
(1.9,0.01375)	1.29e-6	3.25e-7	8.18e-8	4.63e-7	1.16e-7	2.91e-8	2.39e-6	6.03e-7	1.52e-7
(1.9,0.015)	2.55e-6	6.41e-7	1.61e-7	7.79e-7	1.95e-7	4.89e-8	4.60e-6	1.16e-6	2.93e-7
(1.9,0.01625)	3.37e-6	8.47e-7	2.13e-7	1.04e-6	2.61e-7	6.53e-8	5.99e-6	1.51e-6	3.82e-7

Таблица 4

Величины  $\|P_\nu^h - P\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}$   $R_\nu$ -обобщенного решения для различных  $\nu$  и  $\delta$

$(\nu, \delta), N =$	$\nu^* = \mu^* = \lambda - 1$			$\nu^* = \nu_{\text{opt}}^* = \mu^* = \mu_{\text{opt}}^*$			$\nu^* = \mu^* = 0$		
	74	148	296	74	148	296	74	148	296
(1.6,0.01375)	1.05e-4	5.27e-5	2.65e-5	7.71e-5	3.87e-5	1.94e-5	1.58e-4	7.96e-5	4.00e-5
(1.6,0.015)	1.30e-4	6.53e-5	3.28e-5	8.94e-5	4.48e-5	2.23e-5	1.74e-4	8.75e-5	4.41e-5
(1.6,0.01625)	1.51e-4	7.61e-5	3.81e-5	1.10e-4	5.50e-5	2.76e-5	1.93e-4	9.75e-5	4.92e-5
(1.9,0.01375)	2.94e-5	1.48e-5	7.45e-6	2.17e-5	1.09e-5	5.44e-6	4.45e-5	2.24e-5	1.13e-5
(1.9,0.015)	3.49e-5	1.75e-5	8.83e-6	2.53e-5	1.27e-5	6.38e-6	4.91e-5	2.47e-5	1.24e-5
(1.9,0.01625)	4.32e-5	2.17e-5	1.09e-5	3.19e-5	1.59e-5	7.97e-6	5.54e-5	2.79e-5	1.41e-5

Таблица 5

Число вершин (в процентах от общего числа), где  $\delta_{1i}$  ( $\delta_{2i}$ ) и  $\delta'_{1i}$  ( $\delta'_{2i}$ ) меньше заданных величин  $\bar{\Delta}_k$ , для  $R_\nu$ -обобщенного и обобщенного решений

$\bar{\Delta}_k, N =$	$R_\nu$ -обобщенное: $\nu = 1.9, \delta = 0.01375$						обобщенное: $\nu = 0, \delta = 1$		
	$\nu^* = \mu^* = \lambda - 1$			$\nu^* = \nu_{\text{opt}}^* = \mu^* = \mu_{\text{opt}}^* = -0.375$			$\nu^* = \mu^* = 0$		
	74	148	296	74	148	296	74	148	296
$10^{-4}$	35.1%	47.3%	62.8%	62.4%	82.4%	95.0%	30.1%	40.2%	52.1%
$10^{-5}$	14.9%	17.8%	27.4%	19.1%	36.7%	65.7%	13.2%	14.8%	22.1%

Численные эксперименты проведены на сетках с различным шагом  $h$ . Величины погрешности  $R_\nu$ -обобщенного и обобщенного ( $\nu = 0, \delta = 1, \nu^* = \mu^* = 0$ ) решений определили с помощью модуля разности между точным и приближенным решениями в узлах  $M_i$ , т.е.  $\delta_{ji} = |u_j(M_i) - u_{\nu,j}^h(M_i)|$  для  $R_\nu$ -обобщенного и  $\delta'_{ji} = |u_j(M_i) - u_j^h(M_i)|$  для обобщенного решений,  $M_i \in R_\Omega^{\text{vel}}, j = 1, 2$ , а также в различных нормах.

В табл. 2–5 и на рис. 2 и 3 представлены результаты численных экспериментов для компонент  $R_\nu$ -обобщенного решения: вектора скоростей в нормах  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$  и  $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$  и функции давления в норме  $L_{2,\nu}(\Omega)$ , а в табл. 1 — для компонент обобщенного решения (классического подхода): вектора скоростей в нормах  $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$  и  $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$  и функции давления в норме  $L_2(\Omega)$ .

**Заключение.** Серии численных экспериментов показали следующие результаты.

1. Приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение задачи (4)–(5): вектор скоростей и функция давления сходятся к точному решению со скоростью  $\mathcal{O}(h)$  в нормах  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$  и  $L_{2,\nu}(\Omega)$  соответственно, вектор скоростей сходится к точному решению со скоростью  $\mathcal{O}(h^2)$  в норме  $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$ , в то время как приближенное обобщенное решение (в классическом подходе): вектор скоростей и функция давления сходятся к точному решению со скоростью  $\mathcal{O}(h^\lambda)$  в нормах  $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  соответственно, вектор скоростей сходится к точному решению со скоростью  $\mathcal{O}(h^{2\lambda})$  в норме  $\mathbf{L}_2(\Omega)$ ;  $\lambda \approx 0.55$  — так называемый эффект загрязнения [4] (табл. 1–4).

2. Для всех значений  $\delta$ , близких к оптимальному, приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение: вектор скоростей сходится к точному со скоростью  $\mathcal{O}(h)$  и  $\mathcal{O}(h^2)$  в нормах  $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$  и  $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$  соответственно, функция давления —  $\mathcal{O}(h)$  в норме  $L_{2,\nu}(\Omega)$ .

3. Для всех значений  $\delta$ , близких к оптимальному, можно определить наилучшую степень  $\nu_{\text{opt}}^*(\mu_{\text{opt}}^*)$  весовой функции  $\rho(\mathbf{x})$  с точки зрения наименьшей погрешности, которая находится между числом  $\lambda - 1$ , определяющим асимптотику решения (по давлению), и нулем (не весовой метод конечных элементов). При этом случай  $\nu^* = 0$  хуже, чем  $\nu^* = \lambda - 1$ , и тем более, чем  $\nu^* = \nu_{\text{opt}}^*$  (табл. 2–4 и рис. 2–3).

4. Количество узлов в процентном отношении от их общего числа, в которых модуль разности между приближенным и точным решениями не превосходит заданные предельные значения, больше для предложенного весового метода по сравнению с классическим МКЭ (табл. 5).

Предложенный метод прост в реализации и позволяет инженерам правильно рассчитывать течение жидкости вблизи особых точек на границе области.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рукавишников В.А. О дифференциальных свойствах  $R_\nu$ -обобщенного решения задачи Дирихле // Докл. АН СССР. 1989. **309**, № 6. 1318–1320.
2. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // Journal of Fluid Mechanics. 1964. **18**, N 1. 1–18.
3. Dauge M. Stationary Stokes and Navier–Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. Part I. Linearized Equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1989. **20**, N 1. 74–97.
4. Blum H. The influence of reentrant corners in the numerical approximation of viscous flow problems // Notes on Numerical Fluid Mechanics. Vol. 30. Wiesbaden: Springer, 1990. 37–46.
5. Orlt M., Sändig A.-M. Regularity of viscous Navier-Stokes flows in nonsmooth domains // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 167. New York: Marcel Dekker, 1995. 185–201.
6. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московского матем. общества. 1967. **16**. 209–292.
7. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: AMS Press, 1997.
8. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations. Providence: AMS Press, 2001.
9. Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И. Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // Доклады АН. 1994. **338**, № 6. 731–733.
10. Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В. Схема метода конечных элементов для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Сиб. журн. вычисл. матем. 2009. **12**, № 3. 313–324.
11. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. **234**, N 9. 2870–2882.
12. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O. New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity // Journal of Computational Physics. 2012. **231**, N 6. 2438–2448.
13. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. On the error estimation of the finite element method for the boundary value problems with singularity in the Lebesgue weighted space // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2013. **34**, N 12. 1328–1347.

14. Рукавишников В.А., Николаев С.Г. Весовой метод конечных элементов для задачи теории упругости с сингулярностью // Доклады АН. 2013. **453**, № 4. 378–382.
15. Рукавишников В.А. О единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения для краевых задач с несогласованным вырождением исходных данных // Доклады АН. 2001. **376**, № 4. 451–453.
16. Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В. О принадлежности  $R_\nu$ -обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  // Дифференциальные уравнения. 2009. **45**, № 6. 894–898.
17. Рукавишников В.А. О существовании и единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Доклады АН. 2014. **458**, № 3. 261–263.
18. Рукавишников В.А., Николаев С.Г. Об  $R_\nu$ -обобщенном решении системы Ламе с угловой сингулярностью // Доклады АН. 2015. **463**, № 2. 137–139.
19. Scott L.R., Vogelius M. Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 1985. **19**, N 1. 111–143.
20. Qin J. On the convergence of some low order mixed finite elements for incompressible fluids. PhD thesis. State College: Pennsylvania State University, 1994.
21. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970.
22. Benzi M., Golub G.H., Liesen J. Numerical solution of saddle point problems // Acta Numerica. 2005. **14**. 1–137.
23. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
24. Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1997. **34**, N 3. 1072–1092.
25. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. М.: Изд-во Моск. гос. ун-т, 2013.
26. Olshanskii M.A., Reusken A. Analysis of a Stokes interface problem // Numerische Mathematik. 2006. **103**, N 1. 129–149.
27. Verfürth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Chichester–Stuttgart: Wiley–Teubner, 1996.

Поступила в редакцию  
21.11.2017

---

## A Numerical Method for Solving the Oseen-Type Problem in an $L$ -Shaped Domain

A. V. Rukavishnikov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Khabarovsk Division of Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences; Ulitsa Dzerzhinskogo, 54, Khabarovsk, 680000, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: 78321a@mail.ru*

Received November 21, 2017

**Abstract:** In this paper we introduce the notion of an  $R_\nu$ -generalized solution to the Oseen-type problem in rotation form in a polygonal domain with a reentrant obtuse angle on its boundary. We propose a weighted finite element method to solve this problem approximately. A number of numerical experiments performed on a model problem in an  $L$ -shaped domain show the advantages of the proposed method.

**Keywords:** Oseen problem with singularity, weighted finite element method.

### References

1. V. A. Rukavishnikov, “On Differentiability Properties of an  $R_\nu$ -Generalized Solution of the Dirichlet Problem,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **309** (6), 1318–1320 (1989) [Sov. Math. Dokl. **40** (3), 653–655 (1990)].
2. H. K. Moffatt, “Viscous and Resistive Eddies near a Sharp Corner,” J. Fluid Mech. **18** (1), 1–18 (1964).
3. M. Dauge, “Stationary Stokes and Navier–Stokes Systems on Two- or Three-Dimensional Domains with Corners. Part I. Linearized Equations,” SIAM J. Math. Anal. **20** (1), 74–97 (1989).
4. H. Blum, “The Influence of Reentrant Corners in the Numerical Approximation of Viscous Flow Problems,” in *Notes on Numerical Fluid Mechanics* (Springer, Wiesbaden, 1990), Vol. 30, pp. 37–46.
5. M. Ortl and A.-M. Sändig, “Regularity of Viscous Navier–Stokes Flows in Nonsmooth Domains,” in *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics* (Marcel Dekker, New York, 1995), Vol. 167, pp. 185–201.
6. V. A. Kondrat’ev, “Boundary Value Problems for Elliptic Equations in Domains with Conical or Angular Points,” Tr. Mosk. Mat. Obshch. **16**, 209–292 (1967) [Trans. Moscow Math. Soc. **16**, 227–313 (1967)].
7. V. A. Kozlov, V. G. Maz’ya, and J. Rossmann, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities* (AMS Press, Providence, 1997).



8. V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, and J. Rossmann, *Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations* (AMS Press, Providence, 2001).
9. V. A. Rukavishnikov and E. I. Rukavishnikova, "The Finite Element Method for the First Boundary Value Problem with Compatible Degeneracy of the Initial Data," *Dokl. Akad. Nauk* **338** (6), 731–733 (1994) [*Dokl. Math.* **50** (2), 335–339 (1995)].
10. V. A. Rukavishnikov and E. V. Kuznetsova, "A Finite Element Method Scheme for Boundary Value Problems with Noncoordinated Degeneration of Input Data," *Sib. Zh. Vych. Mat.* **12** (3), 313–324 (2009) [*Numer. Anal. Appl.* **2** (3), 250–259 (2009)].
11. V. A. Rukavishnikov and H. I. Rukavishnikova, "The Finite Element Method for a Boundary Value Problem with Strong Singularity," *J. Comput. Appl. Math.* **234** (9), 2870–2882 (2010).
12. V. A. Rukavishnikov and A. O. Mosolapov, "New Numerical Method for Solving Time-Harmonic Maxwell Equations with Strong Singularity," *J. Comput. Phys.* **231** (6), 2438–2448 (2012).
13. V. A. Rukavishnikov and H. I. Rukavishnikova, "On the Error Estimation of the Finite Element Method for the Boundary Value Problems with Singularity in the Lebesgue Weighted Space," *Numer. Funct. Anal. Optim.* **34** (12), 1328–1347 (2013).
14. V. A. Rukavishnikov and S. G. Nikolaev, "Weighted Finite Element Method for an Elasticity Problem with Singularity," *Dokl. Akad. Nauk* **453** (4), 378–382 (2013) [*Dokl. Math.* **88** (3), 705–709 (2013)].
15. V. A. Rukavishnikov, "On the Uniqueness of an  $R_\nu$ -Generalized Solution to Boundary Value Problems with Inconsistently Degenerate Initial Data," *Dokl. Akad. Nauk* **376** (4), 451–453 (2001) [*Dokl. Math.* **63** (1), 68–70 (2001)].
16. V. A. Rukavishnikov and E. V. Kuznetsova, "The  $R_\nu$ -Generalized Solution of a Boundary Value Problem with a Singularity Belongs to the Space  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$ ," *Differ. Uravn.* **45** (6), 894–898 (2009) [*Differ. Equ.* **45** (6), 913–917 (2009)].
17. V. A. Rukavishnikov, "On the Existence and Uniqueness of an  $R_\nu$ -Generalized Solution of a Boundary Value Problem with Uncoordinated Degeneration of the Input Data," *Dokl. Akad. Nauk* **458** (3), 261–263 (2014) [*Dokl. Math.* **90** (2), 562–564 (2014)].
18. V. A. Rukavishnikov and S. G. Nikolaev, "On the  $R_\nu$ -Generalized Solution of the Lamé System with Corner Singularity," *Dokl. Akad. Nauk* **463** (2), 137–139 (2015) [*Dokl. Math.* **92** (1), 421–423 (2015)].
19. L. R. Scott and M. Vogelius, "Norm Estimates for a Maximal Right Inverse of the Divergence Operator in Spaces of Piecewise Polynomials," *Math. Model. Numer. Anal.* **19** (1), 111–143 (1985).
20. J. Qin, *On the Convergence of Some Low Order Mixed Finite Elements for Incompressible Fluids*, PhD Thesis (Pennsylvania State University, State College, 1994).
21. L. I. Sedov, *Mechanics of Continuous Media* (Nauka, Moscow, 1970; World Scientific, River Edge, 1997).
22. M. Benzi, G. H. Golub, and J. Liesen, "Numerical Solution of Saddle Point Problems," *Acta Numerica* **14**, 1–137 (2005).
23. Ph. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (North-Holland, Amsterdam, 1978; Mir, Moscow, 1980).
24. J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and A. T. Vassilev, "Analysis of the Inexact Uzawa Algorithm for Saddle Point Problems," *SIAM J. Numer. Anal.* **34** (3), 1072–1092 (1997).
25. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 2003; Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013).
26. M. A. Olshanskii and A. Reusken, "Analysis of a Stokes Interface Problem," *Numer. Math.* **103** (1), 129–149 (2006).
27. R. Verfürth, *A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques* (Wiley and Teubner, Chichester–Stuttgart, 1996).