УДК 519.622 doi 10.26089/NumMet.v19r216

К ТЕОРИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. Б. Арушанян[1], С. Ф. Залеткин[2]

Доказана теорема о разрешимости нелинейной системы уравнений относительно приближенных значений коэффициентов Чебышёва старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение. Теорема является теоретическим обоснованием ранее предложенного приближенного метода интегрирования канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на основе ортогональных разложений с использованием многочленов Чебышёва первого рода.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышёва, квадратурные формулы Маркова.

Введение. Рассматривается приближенный метод решения задачи Коши для канонической системы M обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y''(x) = f\big(x, y(x), y'(x)\big), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X. \tag{1}$$

Предполагается, что функция $f(x, y, y')$ непрерывна в области D определения системы вместе с частными производными до некоторого порядка и на отрезке $[x_0,\, x_0 + X]$ задача Коши (1) имеет единственное решение.

Приближенный метод решения задачи (1) основан на аппроксимации правой части системы, взятой на решении этой задачи, алгебраическим многочленом и последующем его интегрировании. Многочленное приближение для правой части можно выбирать разными способами. Одним из приемов получения многочленных приближений является интерполирование. В предыдущих работах авторов [1–3] предложен иной способ построения многочленного приближения, который опирается на разложение правой части системы

$$y''(x) = f\big(x, y(x), y'(x)\big) = f\big(x_0 + \alpha h,\, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big) = \Phi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad h \leqslant X,$$

на некотором элементарном сегменте $[x_0,\, x_0{+}h] \subset [x_0,\, x_0{+}X]$ в ряд по смещенным многочленам Чебышёва первого рода (смещенный ряд Чебышёва)

$$\Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\Phi(\alpha) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha, \qquad T_i^*(\alpha) = T_i(2\alpha - 1). \tag{2}$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$, $T_i(t)$ — многочлен Чебышёва первого рода на отрезке $[-1,\, 1]$. Если коэффициенты этого разложения (коэффициенты Чебышёва) известны, то решение $y(x_0 + \alpha h)$ задачи (1) и его производную $y'(x_0 + \alpha h)$ можно легко получить также в виде смещенных рядов Чебышёва на $[x_0,\, x_0 + h]$:

$$y'(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y'] T_i^*(\alpha), \qquad y(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{3}$$

Частичные суммы указанных рядов используются в качестве многочленов, аппроксимирующих решение задачи Коши и его производные первого и второго порядков.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: arush@srcc.msu.ru

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: iraz@srcc.msu.ru

Приближенные значения коэффициентов Чебышёва правой части $\Phi(\alpha)$ в данном методе получаются как решение некоторой нелинейной системы конечных уравнений. Важное место в настоящей статье отводится изучению условий, при которых эта система конечных уравнений имеет единственное решение, и способу нахождения решения этой системы. Полученные в статье результаты сформулированы в виде теоремы, которая, таким образом, является теоретическим обоснованием рассматриваемого метода интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Формулы, связывающие коэффициенты Чебышёва первой производной решения задачи Коши с коэффициентами Чебышёва правой части канонической системы. Коэффициенты Чебышёва производной $y'(x_0+\alpha h)$, рассматриваемой как функция переменной α, связаны с коэффициентами Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ с помощью следующих формул: для ненулевых коэффициентов

$$a_i^*\big[y'(x_0+\alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\left(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\right), \qquad i > 0; \tag{4}$$

для нулевого коэффициента

$$\frac{1}{2}\,a_0^*\big[y'(x_0+\alpha h)\big] = y_0' + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\,a_1^*[\Phi]\right) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\right)a_j^*[\Phi]. \tag{5}$$

2. Формулы, связывающие коэффициенты Чебышёва решения задачи Коши с коэффициентами Чебышёва правой части канонической системы. Коэффициенты Чебышёва решения $y(x_0+\alpha h)$, рассматриваемого как функция переменной α, связаны с коэффициентами Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ с помощью следующих формул: для ненулевых коэффициентов

$$a_i^*\left[y(x_0+\alpha h)\right] = \frac{h^2}{16}\,\frac{(i+1)a_{i-2}^*[\Phi] - 2ia_i^*[\Phi] + (i-1)a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i^2-1)}, \qquad i > 2; \tag{6}$$

$$a_2^*\left[y(x_0+\alpha h)\right] = \frac{h^2}{96}\left(3a_0^*[\Phi] - 4a_2^*[\Phi] + a_4^*[\Phi]\right); \tag{7}$$

$$a_1^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = \frac{h}{2}\left[y_0' + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{3}{4}\,a_1^*[\Phi] + \frac{1}{4}\,a_3^*[\Phi]\right) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\right)a_j^*[\Phi]\right]; \tag{8}$$

для нулевого коэффициента

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}a_0^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{2}\,y_0' + \frac{h^2}{32}\left(3a_0^*[\Phi] - 2a_1^*[\Phi] + a_2^*[\Phi]\right) + \\ + \frac{h^2}{8}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\right)a_j^*[\Phi] - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j}\right)\frac{a_j^*[\Phi] - a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}.\end{gathered} \tag{9}$$

3. Вывод уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части канонической системы. Из допущения о гладкости правой части в (1) следует равномерная сходимость рядов (2), (3) на $[x_0,\,x_0+h]$. Замена рядов для $\Phi(\alpha)$, $y'(x_0+\alpha h)$, $y(x_0+\alpha h)$ их частичными суммами k-го, $(k+1)$-го и $(k+2)$-го порядков соответственно, применение формулы численного интегрирования Маркова [4] на отрезке $[0,\,1]$ с узлами $\alpha_0^{(1)} = 0$, $\alpha_j^{(1)} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right)$, $j = 1,\ldots,k$, и весовой функцией $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$ для вычисления интеграла $a_i^*[\Phi]$ в (2) приводят к следующей системе уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\tilde P_k] \approx a_i^*[\Phi]$, $i = 0,\,1,\,\ldots,k$, правой части системы (1):

$$a_i^*[\tilde P_k] = B\sum_{j=0}^{k}{}' f\big(x_j^{(1)}, U\big(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde P_k],\,\ldots,a_k^*[\tilde P_k]\big),\;\; U'\big(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde P_k],\,\ldots,a_k^*[\tilde P_k]\big)\big)T_i^*(\alpha_j^{(1)}). \tag{10}$$

Здесь $x_j^{(1)} = x_0 + \alpha_j^{(1)}h$, $B = \dfrac{4}{2k+1}$. Используя квадратурную формулу Маркова [5] на отрезке $[0,\,1]$ с узлами $\alpha_0^{(2)} = 0$, $\alpha_j^{(2)} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos\dfrac{j\pi}{k+1}\right)$, $j = 1,\,\ldots,k$, $\alpha_{k+1}^{(2)} = 1$, соответствующую систему уравнений представим в виде

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = D\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f\bigl(x_j^{(2)}, U\bigl(x_j^{(2)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\bigr),\ \ U'\bigl(x_j^{(2)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\bigr)\bigr) T_i^*(\alpha_j^{(2)}), \tag{11}$$

где $x_j^{(2)} = x_0 + \alpha_j^{(2)} h$, $D = \dfrac{2}{k+1}$; два штриха у знака суммы означают, что слагаемые с индексами 0 и $k+1$ берутся с дополнительным множителем 1/2. Второй и третий аргументы функции f в (10) и (11) представляют приближенное решение $U(x_0+\alpha h) \approx y(x_0+\alpha h)$ и его производную $U'(x_0+\alpha h) \approx y'(x_0+\alpha h)$, а именно

$$U\bigl(x;\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\bigr) = \sum_{l=0}^{k+2}{}' a_l^*[U] T_l^*(\alpha), \qquad U'\bigl(x;\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\bigr) = \sum_{l=0}^{k+1}{}' a_l^*[U'] T_l^*(\alpha).$$

Коэффициенты $a_l^*[U]$ приближенного решения $U(x)$ в (10) и (11) вычисляются с помощью соотношений (6)–(9), в левых частях которых требуется y заменить на U, а в правых частях необходимо $a_q^*[\Phi]$ поменять на $a_q^*[\tilde{P}_k]$ при $q \leqslant k$ и на 0 при $q > k$. Коэффициенты $a_l^*[U']$ производной $U'(x)$ в (10) и (11) вычисляются аналогично с помощью соотношений (4), (5). Здесь мы рассматриваем приближенное решение $U(x_0 + \alpha h)$ и его производную $U'(x_0 + \alpha h)$ как функции не только аргумента $x_0 + \alpha h$, но и аргументов $a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]$. Обе системы (10) и (11) могут быть записаны в виде

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \varphi_i\bigl(a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\bigr), \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{12}$$

где φ_i — правая часть в (10) или (11).

4. Оценка частных производных для системы функций φ_i в (12). Обозначим l-ю компоненту вектор–функции φ_i через φ_{li}, а n-ю компоненту вектора $a_m^*[\tilde{P}_k]$ через a_{nm}. Найдем частную производную l-й компоненты функции φ_i по n-й компоненте коэффициента $a_m^*[\tilde{P}_k]$. Для системы (10) имеем (для сокращения записи коэффициенты $a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]$ в качестве аргументов функций U и U' указывать не будем):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = B\sum_{j=0}^{k}{}' \Biggl[&\frac{\partial f_l\bigl(x_j^{(1)}, U(x_j^{(1)}), U'(x_j^{(1)})\bigr)}{\partial y_n} \frac{\partial U_n(x_j^{(1)})}{\partial a_{nm}} + \\ &+ \frac{\partial f_l\bigl(x_j^{(1)}, U(x_j^{(1)}), U'(x_j^{(1)})\bigr)}{\partial y'_n} \frac{\partial U'_n(x_j^{(1)})}{\partial a_{nm}} \Biggr] T_i^*(\alpha_j^{(1)}) \end{aligned} \tag{13}$$

(мы учли, что каждая компонента векторов U и U' зависит только от одноименных компонент вектора $a_m^*[\tilde{P}_k]$). Аналогичное представление имеет место и для системы (11). Как следует из формул (6)–(9), выражение для частной производной $\dfrac{\partial U_n(x_0 + \alpha_j^{(1)} h)}{\partial a_{nm}}$ содержит множитель h^2. Из формул (4), (5) также вытекает, что выражение для частной производной $\dfrac{\partial U'_n(x_0 + \alpha_j^{(1)} h)}{\partial a_{nm}}$ содержит множитель h. Таким образом, все слагаемые, входящие в представление (13) для частной производной $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, содержат множители h или h^2. При этом остальные сомножители в этих слагаемых являются ограниченными функциями. Следовательно, справедлива асимптотическая оценка $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h)$, $h \to 0$. Если правая часть дифференциального уравнения (1) не зависит от y', т.е. уравнение (1) имеет вид $y''(x) = f\bigl(x, y(x)\bigr)$, то $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h^2)$, $h \to 0$. Отсюда следует, что если значение h выбрать достаточно малым, то какая-нибудь норма матрицы, составленной из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей частных производных $\left|\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$, станет меньше единицы.

Из работ [1, 5] следует, что невязка ρ_i, которая получается при подстановке в уравнение (12) точных значений коэффициентов Чебышёва правой части $\Phi(\alpha)$ системы (1) вместо $a_i^*[\tilde{P}_k]$, имеет порядок относительно h, равный

$$\rho_i = a_i^*[\Phi] - \varphi_i\bigl(a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\bigr) = O(h^{k+s}), \qquad h \to 0, \tag{14}$$

где $s = 1$ или $s = 2$ в зависимости от используемой квадратурной формулы Маркова, а именно $s = 1$ для системы (10) и $s = 2$ для системы (11), при этом предполагается, что $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные по x, y и y' до порядка $2k + s$ включительно.

5. О погрешности начальных приближений для коэффициентов Чебышёва правой части канонической системы. В [3] описаны два способа построения двух приближений $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$, $i = 0, \dots, k$, к коэффициентам $a_0^*[\Phi], \dots, a_k^*[\Phi]$, одно из которых имеет погрешность

$$a_i^*[\Phi] - a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k] = O(h^2), \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{15}$$

а другое — погрешность

$$a_i^*[\Phi] - a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k] = O(h^{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{16}$$

6. Условия, при которых система конечных уравнений (12) имеет единственное решение. Рассмотрим совокупность первых $k + 1$ коэффициентов Чебышёва $a_0^*[\Phi], \dots, a_k^*[\Phi]$ функции $\Phi(\alpha)$ как точку z_0 в $M(k + 1)$-мерном арифметическом пространстве $R^{M(k+1)}$:

$$z_0 = \big(a_0^*[\Phi], \dots, a_k^*[\Phi]\big) = \big(a_{10}^*[\Phi], \dots, a_{M0}^*[\Phi], \dots, a_{1k}^*[\Phi], \dots, a_{Mk}^*[\Phi]\big), \quad z_0 \in R^{M(k+1)}.$$

Обозначим через G окрестность точки z_0 радиуса r, т.е. множество всех точек данного пространства $z = (a_0, a_1, \dots, a_k) = (a_{10}, \dots, a_{M0}, \dots, a_{1k}, \dots, a_{Mk})$, $z \in R^{M(k+1)}$, для которых $\rho(z, z_0) = ||z - z_0||_\infty \leqslant r$, где r — некоторое число, от h не зависящее. Пусть z — произвольная точка области $G : z \in G$. Обозначим через $a_i^*[U](a_0, a_1, \dots, a_k)$ коэффициенты Чебышёва функции $U(x) = U(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, на $[x_0,\, x_0 + h]$, вычисляемые через величины $a_0, a_1, \dots, a_k$ по описанному выше правилу, т.е. по формулам (6)–(9), в левых частях которых требуется y заменить на U, в правых частях $a_q^*[\Phi]$ поменять на a_q при $0 \leqslant q \leqslant k$, а все остальные $a_q^*[\Phi]$, $q > k$, заменить нулями. Обозначим также через $a_i^*[U'](a_0, a_1, \dots, a_k)$ коэффициенты Чебышёва функции $U'(x) = U'(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, на $[x_0,\, x_0 + h]$, вычисляемые аналогично через величины $a_0, a_1, \dots, a_k$ по формулам (4), (5).

Сформулируем следующее предложение, содержащее условия, при которых система уравнений (12), которую мы запишем в виде

$$a_i = \varphi_i(a_0, a_1, \dots, a_k), \quad i = 0, 1, \dots, k, \tag{17}$$

имеет единственное решение.

Теорема. *Пусть выполняются перечисленные ниже условия.*

1) *Для всех точек $z \in G(\rho(z, z_0) \leqslant r)$ и для всех h, меньших некоторого значения h_1, $0 < h \leqslant h_1$, $h_1 \leqslant X$, линейные комбинации вида*

$$U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{l=0}^{k+2}}' a_l^*[U](a_0, \dots, a_k) T_l^*(\alpha), \quad U'(x_0 + \alpha h) = {\sum_{l=0}^{k+1}}' a_l^*[U'](a_0, \dots, a_k) T_l^*(\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

входящие в качестве второго и третьего аргументов функции $f(x, y, y')$ в (10) и (11), принимают на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ значения, принадлежащие области D определения функции $f(x, y, y')$.

2) *При всех h, меньших некоторого значения h_2, $0 < h \leqslant h_2$, норма $K = ||Q||_\infty$ матрицы Q, составленной из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей частных производных $\left|\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$, где $l, n = 1, \dots, M$ и $i, m = 0, \dots, k$, меньше единицы.*

3) *При всех h, меньших некоторого значения h_3, $0 < h \leqslant h_3$, мажорантная оценка $O(h^{k+s})$ невязки ρ_i в (14) настолько мала, что выполняется неравенство*

$$||\varphi(z_0) - z_0||_\infty < (1 - K)r, \quad \varphi(z_0) = \big(\varphi_0(z_0), \dots, \varphi_k(z_0)\big).$$

4) *При всех h, меньших некоторого значения h_4, $0 < h \leqslant h_4$, мажорантная оценка (15) или (16) погрешности начального приближения $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$, $i = 0, \dots, k$, настолько мала, что выполняется неравенство*

$$\rho(z_0, z^{(0)}) \leqslant r, \quad z^{(0)} = \big(a_0^{*(0)}[\tilde{P}_k], \dots, a_k^{*(0)}[\tilde{P}_k]\big), \quad \rho(z_0, z^{(0)}) = \max_i \Big(\max_n \big|a_{ni}^*[\Phi] - a_{ni}^{*(0)}[\tilde{P}_k]\big|\Big).$$

Тогда существует такое значение $h_0 > 0$, *а именно*: $h_0 = \min\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, *что при всех* h, $0 < h \leqslant h_0$, *для задачи Коши* (1), *рассматриваемой на частичном отрезке* $[x_0, x_0 + h]$, *система уравнений* (17) *относительно приближенных значений коэффициентов Чебышёва функции* $\Phi(\alpha)$ *имеет в области* $G\{\rho(z, z_0) \leqslant r\}$ *единственное решение* $z = \big(a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big)$, *которое можно получить методом простых итераций как предел последовательности*

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k] = \varphi_i\big(a_0^{*(\nu)}[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]\big), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

исходя из начального приближения $a_0^{*(0)}[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^{*(0)}[\tilde{P}_k]$.

Доказательство. Так как $h \in (0, h_0]$, то все четыре условия теоремы выполняются одновременно при одном и том же значении h. К системе уравнений (17) относительно неизвестных приближенных значений коэффициентов Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ можно применить уточненный принцип сжатых отображений [6]. Действительно, в области $G\{\rho(z, z_0) \leqslant r\}$, где $z_0 = \big(a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big)$ — фиксированная точка пространства $R^{M(k+1)}$, система функций $\varphi_i(a_0, \ldots, a_k)$, $i = 0, \ldots, k$, определена и удовлетворяет условию Липшица с константой $K < 1$ (в силу первого и второго условий). В точке z_0 выполняется неравенство

$$\rho\big(\varphi(z_0), z_0\big) < (1 - K)\, r, \qquad \rho\big(\varphi(z_0), z_0\big) = ||\varphi(z_0) - z_0||_\infty$$

(в силу третьего условия). Начальное приближение $z^{(0)}$ принадлежит области G (в силу четвертого условия). Теперь заключение теоремы непосредственно следует из уточненного принципа сжатых отображений [6], применяемого как для исследования сходимости итерационных методов, так и для доказательства существования корня уравнения.

Эту теорему можно распространить на произвольный частичный сегмент из интервала $[x_0, x_0 + X]$ существования решения задачи Коши (1) заменой x_0 на x_n, а $x_0 + h$ на $x_n + h$, т.е. заменой сегмента $[x_0, x_1]$ на сегмент $[x_n, x_{n+1}]$.

Пример. Интегрируется нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' = 2yy', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{18}$$

Точное решение задачи (18) имеет вид $y(x) = \operatorname{tg} x$. Для данной задачи характерно то, что при возрастании x от 0 до $\pi/2$ интегральная кривая приближается к асимптоте $x = \pi/2$, параллельной оси Oy. На полусегменте $[0, \pi/2)$ решение задачи не ограничено. Поэтому задача Коши (18) имеет быстро растущее решение на отрезке $[0, x_f]$ при $x_f < \pi/2$ и достаточно близком к $\pi/2$ (решение имеет большую производную y').

Вычисляется решение задачи Коши (18) на нескольких интервалах интегрирования $[0, x_f]$, отличающихся только длиной: $x_f = 1,5;\ 1,56;\ 1,57;\ 1,5707$. Эта задача решается описанным выше методом рядов Чебышёва.

1) При $x_f = 1,5$ задавалось разбиение отрезка интегрирования $[0, x_f]$ на 15 элементарных (частичных) сегментов длиной $h = 0,1$; на каждом таком сегменте решение представлялось в виде $(k + 2)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k = 20$ (задача 1).

2) При $x_f = 1,56$ отрезок интегрирования представлялся в виде объединения двух отрезков: $[0;\ 1,56] = [0;\ 1,5] \cup [1,5;\ 1,56]$. Для первого промежутка $[0;\ 1,5]$ задавалось такое же разбиение на элементарные сегменты, как в задаче 1, и с тем же значением параметра k ($k = 20$). Второй промежуток $[1,5;\ 1,56]$ разбивался на два элементарных сегмента длиной $h = 0,05$ и $h = 0,01$, и на каждом таком сегменте решение представлялось в виде $(k + 2)$-й частичной суммы при $k = 30$.

3) При $x_f = 1,57$ отрезок интегрирования представлялся в виде объединения двух отрезков: $[0;\ 1,57] = [0;\ 1,5] \cup [1,5;\ 1,57]$. Для первого промежутка $[0;\ 1,5]$ задавалось такое же разбиение на элементарные сегменты, как в задаче 1, и с тем же значением параметра k ($k = 20$). Второй промежуток $[1,5;\ 1,57]$ разбивался на 12 частичных сегментов длиной $h = 0,006$ (последний, двенадцатый, шаг нестандартный), и на каждом таком сегменте выбиралось значение параметра $k = 35$, т.е. решение представлялось на каждом частичном сегменте в виде $(k + 2)$-й частичной суммы при $k = 35$.

4) При $x_f = 1,5707$ отрезок интегрирования представлялся в виде объединения двух отрезков: $[0;\ 1,5707] = [0;\ 1,5] \cup [1,5;\ 1,5707]$. Для первого промежутка $[0;\ 1,5]$ задавалось такое же разбиение на элементарные сегменты, как в задаче 1, и с тем же значением параметра k ($k = 20$). Второй промежуток $[1,5;\ 1,5707]$ разбивался на 15 частичных сегментов длиной $h = 0,005$ (последний, пятнадцатый, шаг нестандартный), и на каждом таком сегменте значение параметра k полагалось равным 35.

Все вычисления проводились с 15–16 значащими цифрами.

В таблице представлены результаты счета.

x_f	Метод рядов Чебышёва			Метод Штермера		
	абсолютная (относительная) погрешность	N_h	N_f	абсолютная (относительная) погрешность	N_h	N_f
1	2	3	4	5	6	7
1,5	$-0,53 \times 10^{-14}$ $-0,37 \times 10^{-15}$	15	7835	$0,97 \times 10^{-12}$ $0,62 \times 10^{-13}$	7741	20779
1,56	$-0,19 \times 10^{-11}$ $-0,20 \times 10^{-13}$	17	9157	$-0,54 \times 10^{-10}$ $-0,59 \times 10^{-12}$	8627	22914
1,57	$-0,43 \times 10^{-9}$ $-0,34 \times 10^{-12}$	27	19187	$-0,15 \times 10^{-7}$ $-0,12 \times 10^{-10}$	8930	23660
1,5707	$-0,14 \times 10^{-6}$ $-0,13 \times 10^{-10}$	30	22025	$-0,22 \times 10^{-5}$ $-0,21 \times 10^{-9}$	36154	95811

В первом столбце таблицы приводится значение x_f конца интервала интегрирования $[0,\ x_f]$. Во втором столбце показаны полученные при интегрировании методом рядов Чебышёва абсолютная и (чуть ниже) относительная погрешности приближенного решения в конце x_f интервала интегрирования. В третьем и в четвертом столбцах приводятся (общее) число элементарных сегментов, на которые разбивался отрезок интегрирования $[0,\ x_f]$ в методе рядов (число шагов N_h), а также количество вычислений N_f правой части уравнения (18).

Задача Коши (18) решалась на всех четырех интервалах также и многошаговым методом Штермера пятого порядка точности типа предиктор–корректор с автоматическим выбором шага интегрирования. В пятом столбце таблицы показаны наилучшие абсолютная и (чуть ниже) относительная погрешности приближенного решения, достигнутые в конце интервала интегрирования $[0,\ x_f]$. В шестом и седьмом столбцах приведены число выполненных при этом шагов N_h, которое потребовалось для достижения такой точности, и количество обращений к правой части уравнения (18). Как следует из данного сравнения, приближенное решение задачи (18) в точке x_f методом рядов Чебышёва получено с большей точностью (на один-два порядка точнее) за значительно меньшее число шагов и существенно меньшее количество вычислений правой части уравнения, чем методом Штермера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Залеткин С.Ф.* Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием ортогональных разложений // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 1. 69–85.
2. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О применении ортогональных разложений для приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 4. 40–43.
3. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышёва // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 5. 24–30.
4. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* О применении формулы численного интегрирования Маркова в ортогональных разложениях // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2009. № 6. 18–22.
5. *Залеткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, раздел 3. 1–17.
6. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
21.03.2018

To the Orthogonal Expansion Theory of the Solution to the Cauchy Problem for Second-Order Ordinary Differential Equations

O. B. Arushanyan[1] **and S. F. Zaletkin**[2]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: arush@srcc.msu.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: iraz@srcc.msu.ru*

Received March 21, 2018

Abstract: A solvability theorem is proved for a nonlinear system of equations with respect to the approximate Chebyshev coefficients of the highest derivative in an ordinary differential equation. This theorem is a theoretical substantiation for the previously proposed approximate method of solving canonical systems of second-order ordinary differential equations using orthogonal expansions on the basis of Chebyshev polynomials of the first kind.

Keywords: ordinary differential equations, Cauchy problem, approximate analytical methods, numerical methods, orthogonal expansions, shifted Chebyshev series, Markov's quadrature formulas.

References

1. S. F. Zaletkin, "Numerical Integration of Ordinary Differential Equations Using Orthogonal Expansions," Mat. Model. **22** (1), 69–85 (2010).

2. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Application of Orthogonal Expansions for Approximate Integration of Ordinary Differential Equations," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 4, 40–43 (2010) [Moscow Univ. Math. Bull. **65** (4), 172–175 (2010)].

3. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Calculation of Expansion Coefficients of Series in Chebyshev Polynomials for a Solution to a Cauchy Problem," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 5, 24–30 (2012) [Moscow Univ. Math. Bull. **67** (5–6), 211–216 (2012)].

4. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "Application of Markov's Quadrature in Orthogonal Expansions," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 18–22 (2009) [Moscow Univ. Math. Bull. **64** (6), 244–248 (2009)].

5. S. F. Zaletkin, "Markov's Formula with Two Fixed Nodes for Numerical Integration and Its Application in Orthogonal Expansions," Vychisl. Metody Programm. **6**, 1–17 (2005).

6. I. S. Berezin and N. P. Zhidkov, *Computing Methods* (Fizmatgiz, Moscow, 1962; Pergamon, Oxford, 1965).