УДК 518.5:533.6

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР В РЕАЛЬНЫХ ГАЗАХ: МАХОВСКОЕ И/ИЛИ РЕГУЛЯРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ

Г. А. Тарнавский[1]

Рассмотрен ряд проблем неединственности ударно-волновых структур, возникающих в высокоскоростных газовых потоках при взаимодействии скачков уплотнения с отражением маховского или регулярного типов. Исследовано влияние реальных свойств газа (модель эффективного показателя адиабаты) на изменение положения в параметрическом пространстве задачи точек бифуркации — границ области, в которой возможно существование двойного решения.

Ключевые слова: ударно-волновых структуры, скачки уплотнения, маховское отражение, точки бифуркации.

1. Введение. Развитие методов математического моделирования, обусловленное высокими качествами современной вычислительной техники, сделало возможным исследование пространственных высокоскоростных течений газа с образованием сложных ударно-волновых структур в потоке. При этом весьма важным становится изучение проблем неединственности и гистерезиса получаемых численных решений, анализа их адекватности реальным физическим процессам. Основной целью настоящей работы является исследования такого взаимодействия ударных волн, например в воздухозаборниках и соплах двигателей гиперзвуковых летательных аппаратов в некоторых диапазонах режимов полета, когда имеет место дуализм решения — возможность существования при одних и тех же определяющих параметрах задачи картин отражения двух различных типов: регулярного или маховского (парадокс Неймана [1]).

К настоящему времени проведенные исследования регулярного (РО) и маховского (МО) отражений ударных волн (УВ) позволяют сделать некоторые выводы об областях их существования, в том числе и об области существования двойного решения, т.е. о наличии ряда поддиапазонов изменения определяющих параметров процесса, таких как число Маха набегающего потока, угол отклонения потока и т.п., в которых возможно образование устойчивых картин как РО, так и МО. Схематическое изображение этих двух ударно-волновых структур, которые возникают при отражении УВ в установившихся течениях, представлено на рис. 1.

Картина РО (рис. 1 a), образовавшаяся при натекании сверхзвукового потока с числом Маха M_0 на два клина, характеризующихся углами β_1 и β_2, включает соответственно два косых скачка уплотнения (СУ) i_1 и i_2, сформированных вблизи поверхности клиньев и падающих внутрь области течения с углами наклона φ_1 и φ_2 (здесь и далее углы определяются по отношению к направлению вектора набегающего потока), и два отраженных СУ r_1 и r_2 с углами наклона φ_3 и φ_4. Эти СУ пересекаются в точке R. Спутная струя S с углом наклона δ образуется при прохождении потока через систему скачков, с углами отклонения потока θ_1, θ_2, θ_3 и θ_4 на скачках i_1, i_2, r_1 и r_2 соответственно. Для стационарной картины выполняются соотношения: $\theta_1 = \beta_1$; $\theta_2 = \beta_2$; $\theta_1 - \theta_3 = \theta_2 - \theta_4 = \delta$.

Для симметричного ($\beta_1 = \beta_2$) отражения, естественно, $\delta = 0$.

При возникновении волновой структуры с МО (рис. 1 b) в дополнение к падающим и отраженным СУ i_1, i_2, r_1 и r_2 появляется центральный скачок m, фронт которого соединяет две тройные точки пересечения скачков (i_1, r_1, m) и (i_2, r_2, m), а также возникают две спутные струи S_1 и S_2 с углами наклона δ_1 и δ_2. Для стационарной картины выполняются соотношения: $\theta_1 = \beta_1$; $\theta_2 = \beta_2$; $\theta_1 - \theta_3 = \delta_1$; $\theta_2 - \theta_4 = \delta_2$.

В случае симметрии ($\beta_1 = \beta_2$), очевидно, $\theta_1 = \theta_2$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

Вся область течения разделяется на ряд зон (см. рис. 1), в каждой из которых течение (в идеализированной постановке — однородное) имеет собственные характеристики. Зона 0, область невозмущенного течения, ограничена слева любой границей, помещенной в область набегающего сверхзвукового потока (например прямой линией, соединяющей вершины клиньев), а справа — фронтами СУ i_1 и i_2 (и дополнительно фронтом СУ m для МО).

Зона 1, область течения, развернутого (по часовой стрелке) на СУ i_1 вдоль поверхности верхнего клина, ограничена фронтами СУ i_1 и r_1 соответственно слева и справа. Аналогично зона 2, область,

[1] Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, г. Новосибирск; e-mail: tarnav@itam.nsc.ru

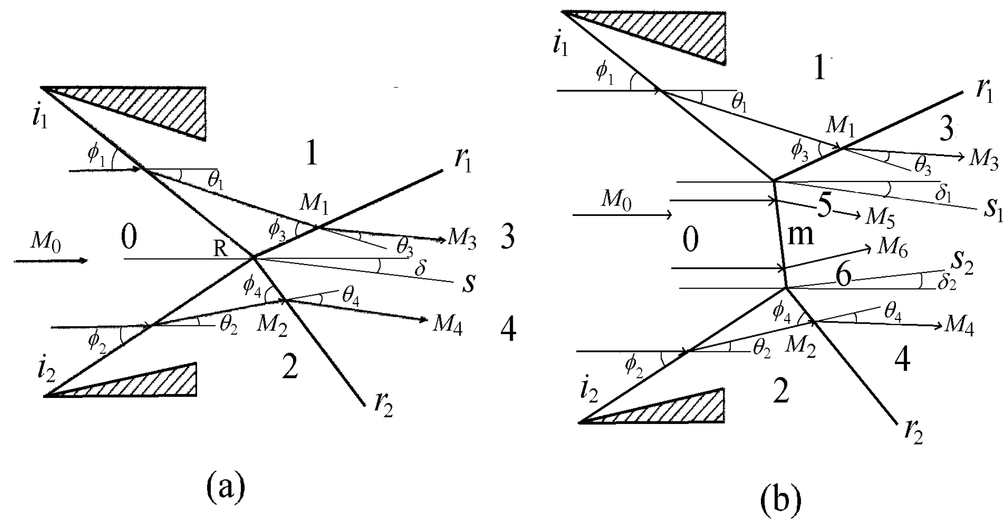

Рис. 1. Картины ударно-волновых структур при взаимодействии скачков уплотнения: регулярное (a) и маховское (b) отражения

течения развернутого (против часовой стрелки) на СУ i_2 вдоль поверхности нижнего клина, ограничена фронтами СУ i_2 и r_2 слева и справа соответственно.

Зона 3, сектор течения, развернутого (против часовой стрелки) на СУ r_1, ограничена его фронтом и поверхностью контактного разрыва, который является границей спутной струи S (для МО — S_1). Зона 4, сектор течения, развернутого (по часовой стрелке) на СУ r_2, ограничена его фронтом и поверхностью контактного разрыва, который также является границей спутной струи S (для МО — S_2). В случае РО зоны 3 и 4 имеют общую границу (непосредственно смыкаются), а в случае МО между ними расположены зоны 5 и 6, области течения за фронтом СУ m.

Переходы между этими двумя типами отражения определяются критерием отделения и критерием Неймана. Оба эти критерия (точки бифуркации) разграничивают три области, в которых возможно существование только МО, МО и РО или только РО. Процесс перехода этих типов отражения одной в другую при вариации параметров, определяющих физику задачи, например скорости и высоты полета, может сопровождаться явлением гистерезиса.

Обычно исследование волновых структур этих двух типов (РО и МО) проводится в предположении неизменности физических свойств газового потока при прохождении через всю систему УВ, т.е. используется модель идеального политропного газа с постоянным значением показателя адиабаты (политропы) γ во всей области течения (см., например, [2]). Однако реальные процессы (см. [3, 4]), изучение которых связано с интенсификацией разработки гиперзвуковых летательных аппаратов, настоятельно требуют расширения этой физической модели. Заметим, что процесс, схематически изображенный на рис. 1, моделирует течение на входе в воздухозаборник ГПВРД. Уровень знания режимов этого течения, предсказание переходов от РО к МО и обратно, а также ответ на вопрос, какой из двух типов ударно-волновых структур реализуется в области неединственности решения и какие факторы влияют на это, весьма важны при создании системы управления режимом горения топлива для устойчивого функционирования двигательной установки в целом.

В настоящей работе для исследования газо- и термодинамики физического процесса [3 – 5] используется метод "эффективного показателя адиабаты" (см. [5 – 7]), позволяющий моделировать течение газа с учетом его реальных свойств при помощи вариации показателя адиабаты $\gamma(p, T)$, изменяющегося во всем поле течения в зависимости от локальных значений давления p и температуры T.

Иллюстрацией к выводу о необходимости учета изменения термодинамических свойств газа в гиперзвуковых потоках с зонами высоких p и T является рис. 2, на котором приведена зависимость отношения теплоемкостей c_p/c_v для воздуха (классический показатель адиабаты $\gamma = c_p/c_v$) от температуры в параметрическом виде, где параметр — давление с фиксированными значениями для каждой кривой. Данные взяты из таблиц [8, 9]. "Волнообразное" поведение кривых связано с такими физическими процессами, последовательно протекающими при увеличении T, как возбуждение колебательных степеней свободы

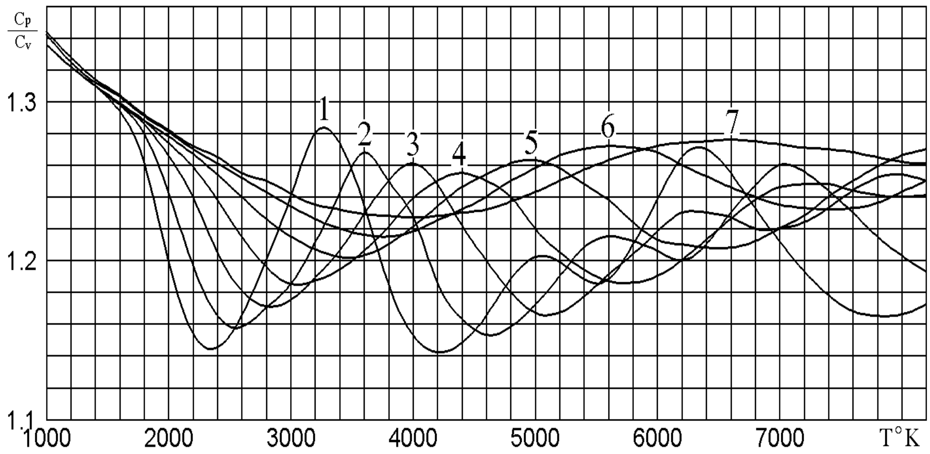

Рис. 2. Зависимость отношения c_p/c_v (для воздуха) от температуры при вариации давления $10^{-3}(1)$, $10^{-2}(2)$, $10^{-1}(3)$, $1(4)$, $10(5)$, $10^2(6)$, $10^3(7)$ атм

молекул кислорода и их диссоциация, возбуждение колебаний в молекулах азота и их диссоциация, возбуждение электронных оболочек атомов и их ионизация.

В данной работе для учета реальных свойств газа используется физико-математическая модель УВ с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка уплотнения, который предполагается бесконечно тонким разрывом. Основные газо- и термодинамические соотношения на разрыве, анализ области применимости модели и ее сравнение с моделью неизменности свойств газовой среды при переходе через СУ даны в работе [10].

2. Неединственность решений одного типа. Маховское отражение: слабые и сильные решения. Для анализа волновых структур, возникающих при взаимодействии падающих УВ i_1 и i_2, которые определяют образование отраженных УВ r_1 и r_2 различных типов (РО и МО), весьма удобно использовать технику ударных поляр (см. также [11]). Эта техника позволяет заменить сложный математический анализ результатов совместного решения нескольких (по числу взаимодействующих УВ) нелинейных алгебраических уравнений, связывающих значения параметров перед и за фронтом каждого СУ с необходимостью селекции решений вследствие их неединственности, наглядным графическим способом получения решения. Данный способ делает сам процесс получения решений и их анализ существенно более ясным и логичным, а выбор необходимого решения в случае их неединственности вызывает значительно меньше затруднений.

Под полярой ударной волны, или просто ударной полярой, понимается соотношение, связывающее угол отклонения потока θ и отношение давлений $\xi = p_+/p_-$, где p_+ — давление за, а p_- — перед фронтом СУ, при параметрической зависимости от числа Маха M_- и эффективных показателей адиабаты γ_+ и γ_-:

$$f(\theta, \xi, M_-, \gamma_-, \gamma_+) = 0. \tag{1}$$

Графически иллюстрирующая зависимость (1) кривая, собственно и называемая ударной полярой (в дальнейшем — УП) в плоскости

$$(x, y) = (\theta, \xi), \tag{2}$$

является замкнутой кривой, ограниченной значениями

$$\theta_{\min} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\max}\,, \quad \xi_{\min} \leqslant \xi \leqslant \xi_{\max} \tag{3}$$

и зеркально симметричной относительно прямой

$$\theta_s = 0.5(\theta_{\min} + \theta_{\max})\,. \tag{4}$$

Конкретный вид (1) в (2) и подробный анализ УП при вариации γ_+, γ_- и M_-, определяющие значения (3) – (4), приводятся в [10].

Все типы УП (1) являются двузначными кривыми как для зависимости

$$\xi = \xi(\theta), \tag{5}$$

так и для обратной зависимости

$$\theta = \theta(\xi), \tag{6}$$

образуя соответственно верхнюю и нижнюю (5), а также левую и правую ветви для (6). Для определенности в (5) верхнюю ветвь называют сильным, а нижнюю — слабым решением. Для (6) сильным решением определяется правая, а слабым — левая ветвь, если $\theta_s \geqslant 0$, а при $\theta_s < 0$, наоборот, сильным решением — левая, а слабым — правая ветвь.

На рис. 3 представлены УП для задачи с фиксированными значениями числа Маха $M_0 = 5$, угла верхнего клина $\beta_1 = 25°$ и вариацией угла нижнего клина $\beta_2 = 35°, 30°, 25°, 20°, 15°, 10°$ (рис. 3 ,a, b, c, d, e, f соответственно). Показатель адиабаты газовой среды γ неизменен во всех зонах течения: $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1.4$.

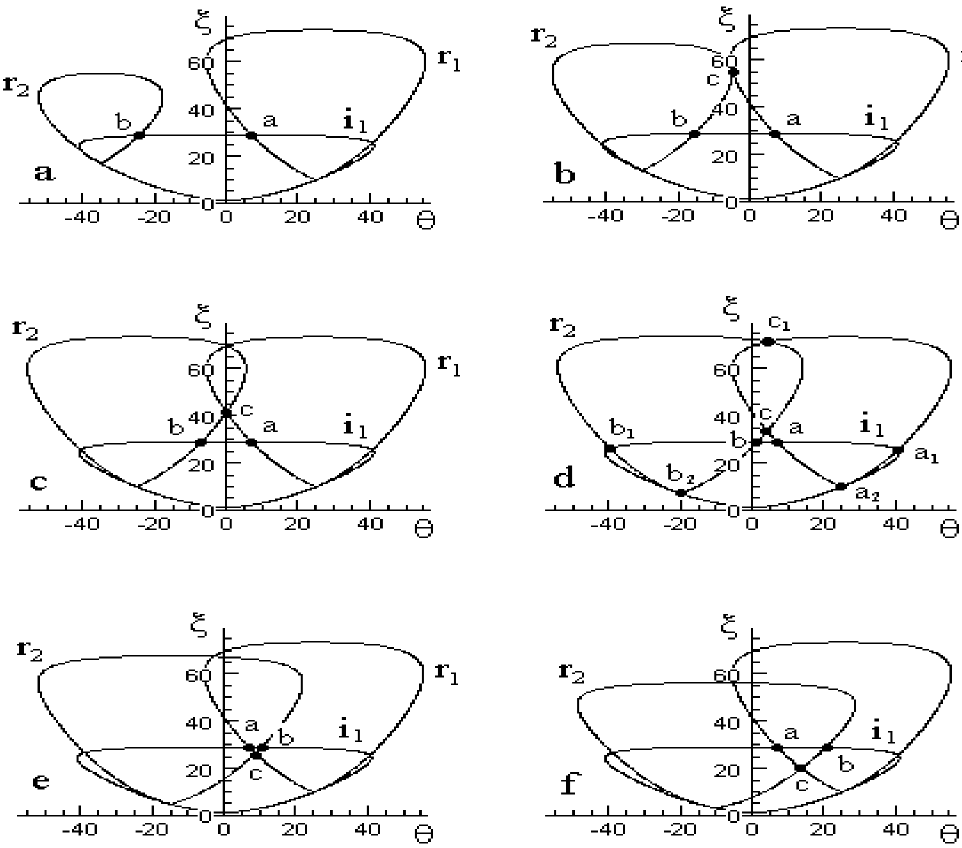

Рис. 3. Поляры падающей i_1 и двух отраженных r_1 и r_2 ударных волн при фиксированных значениях $M_0 = 5$; $\gamma = 1.4$; $\beta_1 = 25°$ и вариации $\beta_2 = 35°$ (рис. a), 30° (b), 25° (c), 20° (d), 15° (e), 10° (f)

На падающих с клиньев внутрь области СУ i_1 и i_2 происходит разворот потока с углами $\theta_1 = \beta_1$ и $\theta_2 = -\beta_2$. Здесь и ниже знак θ определяется направлением разворота течения относительно вектора набегающего потока: угол положителен при развороте по часовой стрелке (например, угол θ_1 на рис. 1) и отрицателен при развороте против часовой стрелки (например, угол θ_2 на рис. 1).

Поскольку $\gamma_2 = \gamma_1$, то ударные поляры скачков i_1 и i_2 (в дальнейшем для краткости П-i_1, П-i_2 и т.д.), определяемые по (1) с заменой индексов “-” на “0”, “+” на “1” (для П-i_1), “+” на “2” (для П-i_2), совпадают. Поляры отраженных СУ r_1 и r_2 связывают величины в зонах 3/1 и 4/2 (соответственно +/- в (1)).

Для того чтобы адекватно сопоставить поляры П-i_1, П-i_2, П-r_1, П-r_2 на одной плоскости (2), удобнее всего провести перенормировку поляр П-r_1 и П-r_2 к переменным П-i_1 и П-i_2. При этом П-r_1 смещается “вверх–вправо” и “опирается” на точку П-i_1 с координатами $\big(\beta_1, \xi(\beta_1)\big)$, а П-$r_2$ смещается “вверх–влево” и “опирается” на точку П-i_2 (напомним, что в данном случае П-i_2 совпадает с П-i_1) с координатами $\big(-\beta_2, \xi(-\beta_2)\big)$. Соответствующие точки “опор” a_2 и b_2 показаны на рис. 3 d.

Расположение точек попарного пересечения поляр (П-i_1 и П-r_1), (П-i_2 и П-r_2), (П-r_1 и П-r_2) характеризует возникающую ударно-волновую структуру течения с формированием РО и/или МО. Пересечение П-i_1 с П-r_1 и П-i_2 с П-r_2 определяет маховский тип отражения, который и будет рассматриваться в этом пункте данный работы.

Сделаем некоторое важное отступление. Вообще говоря, поляры П-i и П-r в классическом случае неизменности свойств газовой среды на СУ пересекаются в трех точках, включая точку "опоры" П-r на П-i. Эти точки отмечены на рис. 3 d как точки a, a_1, a_2. Таким образом, имеет место неединственность решения, поскольку возможны три конфигурации МО с различными значениями угла направления потока в спутной струе θ_a, θ_{a_1}, θ_{a_2} и давления в ней p_a, p_{a_1}, p_{a_2}. Третье решение (θ_{a_2}, p_{a_2}) может быть исключено из рассмотрения, поскольку является вырождением ударной волны в волну бесконечно малой интенсивности.

Рассмотрим два нетривиальных решения (точки a и a_1). Для углов направления спутного потока имеет место соотношение

$$\theta_a < \beta_1 < \theta_{a_1}. \tag{7}$$

Таким образом, из (7) следует, что первое решение (точка a) обеспечивает разворот потока на УВ r_1 против часовой стрелки по отношению к направлению потока перед ее фронтом. Этот разворот уменьшает угол наклона δ_1 течения в спутной струе к направлению вектора набегающего потока, или, говоря другими словами, к центральной линии задачи. Второе решение характерно дополнительным доворотом потока на УВ r_1 по часовой стрелке, с существенным увеличением δ_1 (см. рис. 1 b). Первое решение может быть названо слабым, а второе — сильным МО (аналогично слабому и сильному решению задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком газа).

Подчеркнем, что не следует путать, несмотря на лингвистическую тождественность, слабые и сильные **совместные** решения **всей** задачи, которые представляются точками пересечения поляр, с **собственно ветвями** поляр: слабыми (нижними или левыми) и сильными (верхними или правыми).

Заметим, что, вообще говоря, сильное решение плохо согласуется с трехскачковой схемой структуры течения (рис. 1 b), требуя, как минимум, еще одного замыкающего скачка для доворота потока в спутной струе к направлению, параллельному (или близко к нему) вектору набегающего потока.

Запишем всю ударно-волновую структуру, состоящую из двух падающих СУ i_1 и i_2, двух отраженных СУ r_1 и r_2, а также связывающего их центрального СУ m, в символическом виде

$$MO \Longrightarrow i_1 + i_2 + m + r_1 + r_2. \tag{8}$$

Введем для (8) верхние индексы, обозначая слабое решение литерой w, а сильное — литерой s.

Теоретически возможно существование целого семейства волновых картин. Основная, наблюдаемая в экспериментах картина соответствует "полностью слабому" решению

$$MO^{wwww} \Longrightarrow i_1^w + i_2^w + m + r_1^w + r_2^w. \tag{9}$$

Не противоречит физическим законам сохранения и "полностью сильное" решение

$$MO^{ssss} \Longrightarrow i_1^s + i_2^s + m + r_1^s + r_2^s. \tag{10}$$

Теоретически возможны, кроме (10), еще 14 комбинаций "смешанных" решений МО с индексами: *wwws, wwsw, wwss, wsww, wsws, wssw, wsss, swww, swws swsw, swss,ssww, ssws, sssw.*

В целом же вопрос о селекции решений при их неединственности весьма не так прост, как зачастую его пытаются трактовать, аргументируя невозможность существования сильного решения или некими "энтропийными" соображениями, или доказывая (заметим — в линейном приближении) его неустойчивость. Однако эта проблема лежит вне рамок настоящей работы, и ниже будут анализироваться только слабые решения (9).

Таким образом, в графическом анализе будет рассматриваться только единственная точка a пересечения левой ветви П-r_1 верхней ветвью П-i_1 и единственная точка b пересечения правой ветви П-r_2 с верхней ветвью П-i_2; эти точки отмечены на всех рис. 3 (точки a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 отмечены только на рис. 3 d).

Возможность существования маховского отражения определяется взаимным положением точек a и b, фактически соотношением их абсцисс θ_a и θ_b. Для УВ r_1 МО называется:

1) прямым, если $\theta_a > 0$;
2) стационарным, если $\theta_a = 0$;
3) инверсным, если $\theta_a < 0$.

Для УВ r_2, соответственно, наоборот: МО — прямое, если $\theta_b < 0$, и инверсное, если $\theta_b > 0$.

Прямые МО УВ r_1 имеют место для всех вариантов задачи, представленных на рис. 3 a – 3 e. Для УВ r_2 реализуются: прямые МО — в вариантах рис. 3 a, b, c и инверсные МО — показаны на рис. 3 d, e, f. При этом формируются следующие типы трубок тока выходного спутного течения (ограниченного на рис. 1b штриховыми линиями): сужающаяся, параллельная или расширяющаяся, если соответственно выполняются условия

$$\theta_a - \beta_b > 0, \tag{11}$$

$$\theta_a - \beta_b = 0, \tag{12}$$

$$\theta_a - \beta_b < 0. \tag{13}$$

Заметим, что при выполнении (12) возможно существование стационарного МО.

Волновая структура, удовлетворяющая (13), не имеет физического смысла, поскольку дозвуковое течение за фронтом центрального СУ m (рис. 1 b) не может формировать расширяющуюся трубку тока. Таким образом, условие (12), называемое условием Неймана, отделяет область (13), где запрещены МО, от области (11), где возможны и РО, и МО. В параметрическом пространстве задачи условие Неймана определяет точку бифуркации решения, отделяющую область существования единственного решения (возможно только РО) от области существования двойного решения (возможны и РО, и МО).

Забегая несколько вперед, укажем, что в области (11) существует вторая точка бифуркации решения, отделяющую область существования двойного решения (возможны и РО, и МО) от области единственности решения (возможно только МО).

3. Неединственность решений одного типа. Регулярное отражение: слабые и сильные решения. Возможность существования ударно-волновой структуры с образованием картины регулярного отражения (рис. 1 a) определяется наличием или отсутствием точек пересечения ударных поляр П-r_1 и П-r_2. Для цикла задач с фиксированным значением угла верхнего клина $\beta_1 = 25°$ и вариацией значений угла нижнего клина $\beta_2 = 35°$, $30°$, $25°$, $20°$, $15°$, $10°$ (рис. 3 a – 3 f соответственно) эти поляры не пересекаются только при $\beta_2 = 35°$; следовательно, в этом случае РО невозможно.

При других значениях β_2 существуют две точки пересечения П-r_1 и П-r_2, которые показаны на рис. 3 d, — точки c и c_1 (на других рис. 3 точка c_1 не маркируется во избежание излишнего загромождения рисунка). Для определенности эти точки обозначаются в соответствии со значением их ординат

$$\xi_c < \xi_{c_1}. \tag{14}$$

Решение (θ_c, ξ_c) определим как слабое, а $(\theta_{c_1}, \xi_{c_1})$ — как сильное. Еще раз заметим, что не следует путать, несмотря на сходство терминологии, слабое и сильное **совместное** решение всей задачи (точки c и c_1 пересечения двух разных поляр) с понятием слабого или сильного решения для **каждой поляры** по отдельности как некоторого множества решений (1), составляющих поляру и определяемых принадлежностью к той или иной ветви поляры (сильные решения составляют верхнюю, а слабые — нижнюю ветвь поляры).

Сильное (по (14)) решение может быть точкой пересечения как верхних ветвей УП (рис. 3 b – 3 e), так и нижней ветви П-r_1 и верхней ветви П-r_2. Аналогично и слабое решение задачи (точки c на всех рис. 3) может быть точкой пересечения как двух нижних, так и одной нижней и одной верхней ветвью поляр, несмотря на то, что на всех представленных рис. 3 b – 3 f слабое решение определяется пересечением только нижних ветвей П-r_1 и П-r_2.

Это связано только с большим шагом параметра β_2 в представленных графиках ($\Delta\beta_2 = 5°$). При более мелкой вариации β_2, естественно, существует критическое значение β_2^*, при котором П-r_1 и П-r_2 касаются друг друга, т.е. имеют единственную точку пересечения; в этом случае сильное и слабое решения совпадают. Для данной задачи при значениях других параметров: $M_0 = 5$ и $\beta_1 = 25°$ критическое значение $\beta_2^* = 30.1°$ (см. близкий к этому рис. 3 b, где $\beta_2 = 30°$).

Рассмотрим несколько более подробно, какими именно ветвями поляр образуется точка касания. Очевидно, для симметричной задачи, например при фиксированных $\beta_1 = \beta_2$ и вариации M_0 для поиска критического значения $M_0^*(\beta_1, \beta_2)$, поляры, будучи зеркально симметричными относительно оси ординат, коснутся друг друга своими “максимально удаленными” точками (3): $\bigl(\theta_{\max}, \xi(\theta_{\max})\bigr)$ — левой поляры и $\bigl(\theta_{\min}, \xi(\theta_{\min})\bigr)$ — правой поляры. Эти точки есть точки перехода нижних ветвей поляр в верхние.

Для несимметричной задачи, показанной на рис. 3, уменьшение варьируемого параметра β_2 от $35°$ к $30°$ приводит к увеличению геометрического размера П-r_2 и ее приближению к П-r_1 (см. рис. 3 a – 3 b). Касание поляр осуществится точками, принадлежащими: слева — верхней ветви П-r_2, справа — нижней ветви поляры П-r_1. При дальнейшем уменьшении β_2 (см. рис. 3 c – 3 d) точки пересечения поляр образуются, как уже отмечалось выше, следующими ветвями поляр: точка c (слабое решение) — нижними ветвями, точка c_1 (сильное решение) — верхними ветвями.

Таким образом, следует подчеркнуть важный факт, что для несимметричных задач вблизи точки касания существует очень небольшой диапазон значений варьируемого параметра, в котором слабое решение всей задачи (т.е. совместное решение) будет образовываться обязательно одним слабым и одним сильным ударно-волновым решением (1). Заметим, что в данном случае этот диапазон составляет всего около $\Delta\beta_2 \approx 0.5°$, что делает экспериментальные исследования, с последующим сравнением с вычислительными результатами, весьма затруднительным.

В связи с анализом, проведенным выше, аргументы, приводимые для доказательства (точнее, для некоторых объяснений), что сильное решение “в принципе никогда не реализуется”, представляются малоубедительными. Действительно, пока в экспериментах обнаруживаются только слабые решения

$$PO^{wwww} \Longrightarrow i_1^w + i_2^w + r_1^w + r_2^w.$$

Но физические законы сохранения допускают (во всяком случае не противоречат) существование как полностью сильных

$$PO^{ssss} \Longrightarrow i_1^s + i_2^s + +r_1^s + r_2^s,$$

так и 14 вариантов “смешанных” решений *wwss, ssww* и т.д. (см. выше).

Однако данная проблема требует особого исследования и также лежит вне рамок настоящей работы, поэтому далее рассматриваются и анализируются только слабые решения (точки c пересечения П-r_1 и П-r_2).

4. Неединственность решений разных типов: маховское и/или регулярное отражение. Рассмотрим влияние вариации угла β_2 при последовательном уменьшении его значения на формирование ударно волновых структур течения.

При $\beta_2 = 35°$ (рис. 3 a) нет пересечения П-r_1 и П-r_2 и существуют только точки пересечения П-i_1 и П-r_1 (точка a) и П-i_1 и П-r_2 (точка b). Таким образом, при рассмотренном наборе определяющих параметров M_0, β_1 и β_2 возможно только маховское отражение. Кроме того, это МО является прямым как для верхней, так и для нижней отраженной УВ.

Уменьшение β_2 до значения 30° (рис. 3 b) приводит к появлению точки c пересечения П-r_1 и П-r_2, в данном случае можно считать — точки касания. Поэтому наряду с прямым МО становится возможной ударно-волновая структура с РО. Таким образом, в параметрическом пространстве задачи существует точка

$$\beta_2 = \beta_2^{**}(M_0, \beta_1, \gamma), \tag{15}$$

которая является точкой (верхней по β_2) бифуркации решения, ограничивающей область

$$\beta_2 > \beta_2^{**} \tag{16}$$

единственности решения, где возможно только МО, от области

$$\beta_2 < \beta_2^{**} \tag{17}$$

неединственности, где (в некотором диапазоне) возможно существование как МО, так и РО. Граница (15), называемая условием отделения [1], для рассматриваемой задачи $M_0 = 5$, $\beta_1 = 25°$, $\gamma = 1.4$ есть $\beta_2^{**} = 30.1°$.

Напомним, что в области (16), вообще говоря, имеет место граница $\beta_2 > \beta_{\max}$ применимости модели СУ, присоединенного к клину; при $\beta_2 > \beta_{\max}$ образуется течение с отошедшим скачком и совершенно другой ударно-волновой картиной, чем представленные на рис. 1. Такое же ограничение на рассматриваемую модель имеет место и по углу β_1.

Дальнейшее уменьшение β_2 до 25° (рис. 3 c), т.е. до значения $\beta_1 = \beta_2$, естественно, приводит к симметричности течения: точка c лежит на оси ординат, а точки a и b зеркально симметричны относительно нее. Это также область неединственности решения: возможно как РО, так и прямое МО.

Уменьшение β_2 до 20° (рис. 3 d), оставляя решение в области неединственности, приводит к изменению типа МО: в верхней части течения реализуется по-прежнему прямое МО, а в нижней — МО становится инверсным. При этом волновая структура МО является устойчивой, поскольку формирующееся за скачками спутное течение характеризуется сужающейся трубкой тока (выполняется условие (11), как и в предыдущих вариантах).

Дальнейшее уменьшение β_2 до 15° (рис. 3 e) и далее до 10° (рис. 3 f) приводит к тому (см. расположение точек a и b), что выполняется условие (13), т.е. трубка тока спутного течения становится расходящейся.

Эта волновая структура МО физически нереализуема, поскольку является неустойчивой — дозвуковое течение за центральным СУ m не может формировать расширяющуюся устойчивую трубку тока.

Заметим, что графический анализ делает ненужным численную проверку выполнения условий с номерами (11) – (13): если точка c находится внутри области поляры П-i_1, то при этом наборе определяющих параметров возможно только РО.

Таким образом, наряду с (15), в параметрическом пространстве задачи существует точка (при этом графически все точки a, b, c совпадают)

$$\beta_2 = \beta_2^*(M_0, \beta_1, \gamma), \tag{18}$$

которая является точкой (нижней по β_2) бифуркации решения, ограничивающей область

$$\beta_2 < \beta_2^* \tag{19}$$

единственности решения, где возможно только РО, от области неединственности, где (в некотором диапазоне) возможно существование как РО, так и МО.

Граница (18), называемая условием Неймана [1], для рассматриваемой задачи $M_0 = 5$, $\beta_1 = 25°$, $\gamma = 1.4$ есть $\beta_2 = 17°$.

Согласовывая условия (17) и (19) и объединяя с этим условия (15) и (19) в единую запись, имеем следующие диапазоны ударно-волновых структур:

$$\begin{array}{ll} \beta_2 < \beta_2^*, & \text{возможно только РО;} \\ \beta_2^* \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_2^{**}, & \text{возможно и РО, и МО;} \\ \beta_2 > \beta_2^{**}, & \text{возможно только МО.} \end{array} \tag{20}$$

Для рассматриваемой задачи с условием неизменности показателя адиабаты во всех зонах течения $\gamma = 1.4$, значениями $M_0 = 5$ и $\beta_1 - 25°$ имеют место границы смены ударно-волновых режимов $\beta^* = 17°$, $\beta^{**} = 30°$.

Заметим, что помимо определения границ режимов, техника ударных поляр делает возможным получение числовых характеристик течений (рис. 1 a, b): определяются относительное и абсолютное значения давления и угла отклонения потока на фронтах всех СУ, а по ним — значения всех остальных газодинамических параметров и углов наклона ударных волн во всей области течения.

В заключение следует кратко остановиться на следующем вопросе. Прямое численное моделирование течений на основе, в частности, уравнений Эйлера, в области неединственности решения ставит свои особые, специфические проблемы. Поскольку вычислительный алгоритм может получить только какое-то одно определенное решение, то возникают вопросы: какое это решение (МО или РО), какие факторы влияют на получение именно этого решения. Например, каковы бассейны притяжения решения: при использовании различных начальных данных, если используются методы установления; при вариации других алгоритмических параметров — размерности и конфигурации расчетной сетки и т.п. Интересным является вопрос о характере вычислительного процесса вблизи точек бифуркации решения: есть ли спонтанные переходы с одной ветви решения на другую, в особенности при попытке получить в финале один тип решения, стартуя с другого типа? Или алгоритм "самостоятельно определяет" только один тип решения, полностью игнорируя другой?

Подчеркнем, что основной "опасностью" прямого численного моделирования сложных задач газовой динамики в малоизученной или вообще неизученной области, где нет поддержки ни аналитическими соотношениями, ни экспериментальными данными, служащими определенным ориентиром, является вероятность получения какого-либо "собственного" решения (см., например, [12, 13]). Это особенно касается разработанного в последнее время большого количества алгоритмов так называемого "повышенного" порядка точности и их применения для расчета задач со сложной ударно-волновой конфигурацией. Например, в работах [14, 15] было показано, что все примененные алгоритмы дали различные (некоторые кардинально) решения одной и той же задачи.

Поэтому теоретические исследования, выявляющие особые области поведения решений, вновь становятся весьма важным элементом продвижения численного моделирования в область гиперзвуковых течений реального газа.

5. Неединственность решений: влияние показателя адиабаты. В классической модели неизменности свойств газа ударно-волновые структуры рассматриваемой задачи (рис. 1) определяются следующим списком параметров:

$$F_c = (\beta_1, \beta_2, M_0, \gamma). \tag{21}$$

Рассмотрим физически более реальную, в особенности для высокоскоростных течений газа, модель, учитывающую изменение свойств газовой среды при прохождении потока через фронты СУ. В этом случае список (21) расширяется:

$$F_r = (\beta_1, \beta_2, M_0, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4), \tag{22}$$

где γ_i ($i \in [0, 4]$) — показатели адиабаты в различных зонах течения, разграниченных фронтами СУ (см. рис. 1). Более подробно описание модели эффективного показателя адиабаты, область ее применимости, газодинамические соотношения, отличие от классической модели приведено в [6, 7, 10].

Параметры (22) изменяются в диапазонах

$$\begin{aligned} &M_0 \in (1, \infty), \\ &\beta_k \in [0, \beta_{\max}], \quad k = 1, 2, \\ &\gamma_i \in (1, 5/3], \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{23}$$

Значение $\beta_{\max}$ в (23) определяется условием существования присоединенных СУ, при которых имеют место ударно-волновые структуры, показанные на рис. 1 a или рис. 1 b.

В данном пункте работы исследуется влияние реальных свойств среды (при использовании модели эффективного показателя адиабаты) на область неединственности решения, т.е. на положение точек бифуркации в параметрическом пространстве (22). Оценка этого влияния будет рассматриваться на одном из исследованных выше вариантов задачи: $\gamma_0 = 1.4$, $M_0 = 5$, симметричная геометрия $\beta_1 = \beta_2 = 25°$ (см. рис. 3 c). Для сохранения симметрии примем условия $\gamma_2 = \gamma_1$ и $\gamma_4 = \gamma_3$ (одинаковые газовые среды за падающими СУ в зонах 1 и 2; и также одинаковые газовые среды за отраженными СУ в зонах 3 и 4). Значения γ_1 и γ_3 будут варьироваться практически по всему диапазону своего возможного изменения (23).

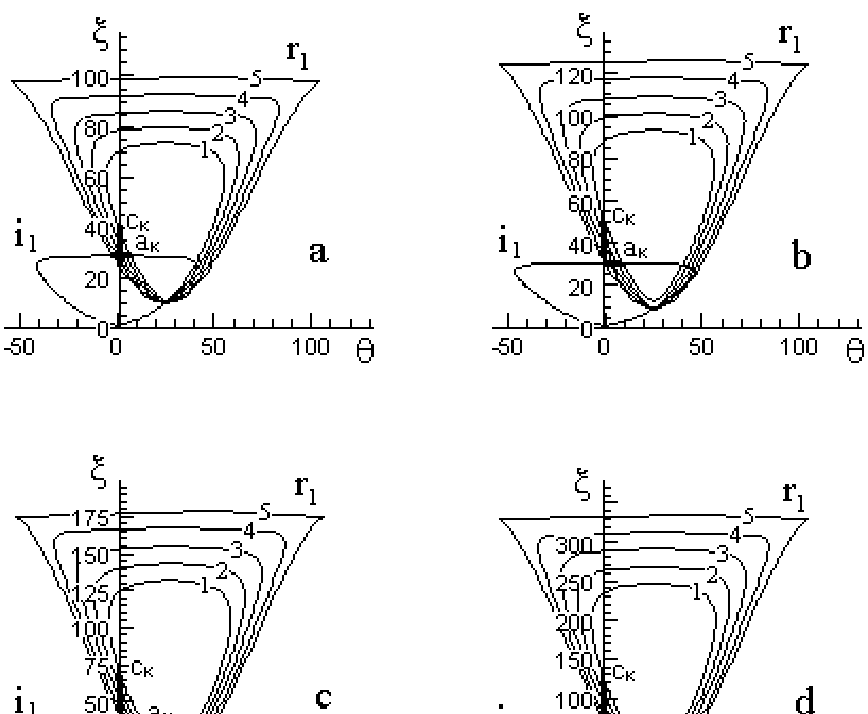

Рис. 4. Поляры падающей i_1 и семейств отраженных r_1 ударных волн при фиксированных значениях $M_0 = 5$; $\beta_1 = \beta_2 = 25°$; $\gamma_0 = 1.4$; вариации $\gamma_1 = 1.4$ (рис. a); 1.3 (b); 1.2 (c); 1.1 (d) и вариации $\gamma_3 = 1.4$ (кривые 1); 1.3 (2); 1.2 (3); 1.1 (4); 1.01 (5)

На рис. 4 a – 4 d приводятся ударные поляры при значениях $\gamma_1 = 1.4; 1.3; 1.2$ и 1.1 соответственно. На каждом из этих графиков показаны:

1) поляра П-i_1 с ударным переходом в (1) от $\gamma_- = \gamma_0 = 1.4$ к $\gamma_+ = \gamma_1$;

2) семейство поляр П-r_1 с ударным переходом от $\gamma_- = \gamma_1$ к $\gamma_+ = \gamma_3 = 1.4; 1.3; 1.2; 1.1$ и 1.01 (кривые $1-5$ соответственно).

Поляра П-i_2 также, как и в вариантах, иллюстрирующих рис. 3, совпадает с П-i_1. Поляры П-i_2 на рис. 4 не приводятся во избежание ненужного загромождения рисунков: вследствие симметрии задачи точки c пересечения П-r_1 и П-r_2 есть точки пересечения П-r_1 с осью ординат, а точки b (см. рис. 3) пересечения П-r_2 и П-i_1 зеркально симметричны относительно оси ординат точкам a пересечения П-r_1 и на рис. 4 также не приводятся. На рис. 4 точки a_k и c_k ($k \in [1, 5]$) маркируют точки пересечения левой нижней ветви k — варианта семейства П-r_1 соответственно: с верхней ветвью П-i_1 и осью ординат. Ниже рассматриваются в основном слабые (совместные) решения; в некоторых случаях будет проведен краткий анализ особенностей сильных решений.

Ударным полярам в газе, не меняющем своего значения $\gamma = 1.4$ (показанным ранее на рис. 3 c), соответствуют на рис. 4 a поляра П-i_1 и кривая 1 семейства поляр П-r_1. Остальные кривые рис. 4 представляют УП реагирующих газов с изменением значения γ на фронте СУ. Заметим, что поляры, связывающие значения γ до и после прохождения потока через УВ, представляют две ситуации: уменьшение или рост γ.

Первая, с точки зрения физики процесса, чаще реализующаяся ситуация: за скачком возбуждаются дополнительные степени свободы (например, колебательные) молекул газа и значение γ уменьшаются (убывающие участки кривых на рис. 2). Вторая ситуация представляет область параметров перед и за фронтом скачка, располагающихся на возрастающих участках кривых рис. 2, например в диапазоне температур от 2400 до 3300° К для давления 10^{-3} атм или от 3100 до 4200° К для давления 1 атм. На этих участках доминирующим является не процесс возбуждения колебательных степеней свободы молекул, а их диссоциация, вызывающая рост γ.

В дальнейшем для краткости изложения (чисто условно) введем для этих двух ситуаций изменения γ при переходе через фронт СУ терминологию: ВК-переход и Д-переход (т.е. "возбуждение колебаний" и "диссоциация"). Переход через СУ без изменения γ будем называть К-переходом ("классический тип").

Рассмотрим последовательно роль γ_1 и γ_3 и их различных взаимных комбинаций. На рис. 4 a ($\gamma = 1.4$) представлена ударно-волновая картина, в которой УП i_1 является К-переходом, а все УП r_1 (кривые 1–5) — переходом ВК-типа. Анализ расположения точек пересечения поляр показывает следующее. Уменьшение γ_3 приводит к уменьшению в (θ, ξ)-пространстве области неединственности решения (возможности существования как МО, так и РО) — точки a_k смещаются влево, а c_k — вниз при увеличении индекса k, и при $\gamma_3 < 1.1$ становится возможным только РО. Подчеркнем, что при этом наборе параметров M_0, γ_0, γ_1 нет сильных решений ВК-типа, т.е. поляру П-i_1 пересекает только левая ветвь П-r_1 и нет пересечения П-i_1 с правой ветвью П-r_1 в диапазоне $\gamma_3 < \gamma_3^*$, где $\gamma_3^* \approx 1.25$.

При $\gamma_1 = 1.3$ (рис. 4 b) СУ i_1 является ВК-переходом, а переходы на СУ r_1 имеют: Д-тип при $\gamma_3 = 1.4$ (кривая 1), К-тип при $\gamma_3 = 1.3$ (кривая 2) и Д-тип при $\gamma_3 = 1.2; 1.1; 1.01$ (кривые 3–5). Во всем диапазоне вариации γ_3 возможно существование как РО, так и МО. Как и в предыдущем случае (заметим, что это же имеет место и в рассматриваемых далее вариантах), уменьшение γ_3 приводит к уменьшению в (θ, ξ)-пространстве области неединственности решения. При этом во всем диапазоне вариации γ_3 с фиксированными значениями остальных параметров β_1, M_0, γ_0, γ_1 возможно как РО, так и МО. Предельный случай $\gamma_3 = 1.01$ представляет границу режима неединственности ударно-волновой картины течения — точки a_5 и c_5 совпадают как между собой, так и с точкой пересечения оси ординат с П-i_1.

При дальнейшем уменьшении γ_3 до 1.2 (рис. 4 c) и далее до 1.1 (рис. 4 d) эта тенденция развивается: соответствующие точки a_k сдвигаются вправо, а c_k — вверх (визуально это лучше всего просматривается на точках a_5 и c_5 всех рис. 4 a – 4 d). Следовательно, вся область решений есть область неединственности с возможностью существования как РО, так и МО. Заметим, что при $\gamma_1 = 1.2$ СУ i_1 является переходом ВК-типа, а переходы СУ r_1 имеют Д- , К- и ВК-типы (кривые 1–3, 4 и 5 соответственно). При $\gamma_1 = 1.1$ СУ i_1 также имеет ВК-тип, как и рассмотренные ранее, и является наиболее интенсивным из них. Переходы СУ r_1 также являются Д- , К- и ВК-переходами (кривые 1–3, 4 и 5 соответственно). Следует обратить внимание на кривую 1 рис. 4 d, представляющую поляру П-r_1 со значениями γ до и после фронта скачка 1.1 и 1.4, что соответствует сильному Д-переходу. Данная кривая имеет точку касания (не пересечения) с полярой П-i_1. Это приводит к заключению, что дальнейшее увеличение γ_3 (для одноатомного газа с невозбужденными электронными степенями свободы $\gamma = 1.67$) делает невозможным образование волновой структуры с МО, допуская существование только РО.

Сделаем некоторое замечание относительно решений с образованием отражения маховского типа. Число точек пересечения П-i_1 и П-r_1 для большинства представленных вариантов равно двум (слабое и сильное решение). Однако в некоторых случаях таких точек может быть четыре (слабое, сильное и еще два решения, не имеющих собственного названия). Это, например, точки пересечения поляры П-i_1 и некоторых вариантов П-r_1: кривая 2 рис. 4 a, кривые 3 и 4 рис. 4 b, кривые 4 и 5 рис. 4 c, кривая 5 рис. 4 d. В данном случае вопрос селекции решений, как лежащий вне рамок настоящей работы, сводился к игнорированию всех решений, кроме слабых, однако представляется весьма интересным проведение их специального анализа.

Кратко обратим внимание на топологию некоторых кривых. Поляры, представляющие переходы Д-типа на СУ r_1, "отрываются" от базовой точки поляры П-i_1 ($\theta = 25°, \xi = 9$). Это кривые 1 рис. 4 a, 2 и 3 рис. 4 b, 3 и 4 рис. 4 c, 4 и 5 рис. 4 d. Поляры П-i_1, представляющие К- или ВК-переходы, исходят (касаются или пересекают) из этой базовой точки. Данный вопрос подробно обсужден в [10].

Подведем итоги этого аспекта исследований. Вариация γ_1 и γ_3 при фиксированных значениях β_1, M_0, γ_0 показывает следующее. Если в случае классической аэродинамики $\gamma = \mathrm{const}$ $(= 1.4)$ во всей области течения, возможно (см. расположение точек a, b, c на рис. 3 c) существование области неединственности, где допустимы ударно-волновые структуры и маховского, и регулярного типа отражения, то уменьшение γ_1 и γ_3 приводит к появлению особых диапазонов их значений: для $\gamma_0 = 1.4$ поддиапазоны ($\gamma_1 = 1.4$, $\gamma_3 \leqslant 1.1$) и ($\gamma_1 = 1.1$, $\gamma_3 \geqslant 1.4$) есть подобласти единственности решения, где возможно существование только регулярного отражения УВ. Говоря другими словами, в "трехмерной" области $\{R\} = \gamma_0 \bigotimes \gamma_1 \bigotimes \gamma_3$ с физически реальным диапазоном изменения $\gamma \in (1, 5/3]$ при фиксированных β_1 и M_0 (в данном случае $\beta_1 = 25°$ и $M_0 = 5$) имеются подобласти, где невозможно образование трехскачковых структур с отражением маховского типа (рис. 1 b).

6. Неединственность решений: влияние геометрии задачи на ударно-волновую структуру ВК-типа. Исследуем зависимость положения в многопараметрическом пространстве (22) точек бифуркации решения (маховское и/или регулярное отражение) от геометрических параметров задачи (β_1, β_2) при использовании физической модели эффективного показателя адиабаты со скачкообразным изменением γ на ударно-волновых переходах (математически бесконечно тонкие фронты СУ). Описание, область применимости и основные соотношения модели приведены в [10]. Этот анализ удобно провести на задаче, допускающей адекватные сравнения с решениями задачи классической аэродинамики с неизменностью физических свойств газовой среды (постоянством показателя адиабаты γ) при переходе газа через фронты СУ. Рассмотрим ударно-волновые структуры течения, возникающие при набегании сверхзвукового потока с $M_0 = 5$ на два клина с фиксированным значением угла $\beta_1 = 25°$ и вариацией $\beta_2 = 35°, 30°, 25°, 20°, 15°$ и $10°$. Соответствующие ударные поляры П-i_1, П-r_1 и П-r_2 приведены на рис. 5 a – 5 f (варьируется только поляра П-r_2). Подобная задача с такой геометрией рассматривалась выше (рис. 3 a – 3 f).

Различие между задачами, представленными на рис. 3 и рис. 5, заключается в следующем. Ранее (рис. 3) рассматривалось течение с постоянным значением γ во всех зонах течения: $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1.4$. Теперь изучается течение со значениями $\gamma_0 = 1.4$; $\gamma_1 = \gamma_3 = 1.3$; $\gamma_2 = \gamma_4 = 1.2$, т.е. возникающие СУ предполагаются ударно-волновыми переходами ВК-типа. Такая постановка вычислительного эксперимента допускает непосредственное сравнение результатов (рис. 3 a — рис. 5 a и т.п.) и их совместный анализ. Заметим, что подобная задача приближенно моделирует реальные условия полета в земной атмосфере на высоте 50 км со скоростью 1.7 км/сек.

Кардинальное отличие имеет место уже при сравнении рис. 3 a и рис. 5 a, представляющих вариант расчета с $\beta_2 = 35°$. Если при $\gamma = 1.4$ поляры П-r_1 и П-r_2 не пересекались, что означало единственность решения при $\beta_2 = 35°$ (невозможно РО, возможно только МО), то при учете реальных процессов это значение β_2 лежит в параметрическом диапазоне неединственности решений с возможностью существования как МО, так и РО. Обратим внимание также на число точек пересечения поляр (П-r_1×П-i_1) и (П-r_2×П-i_2). Напомним, что в случае $\gamma_1 = \gamma_2$ поляры П-i_1 и П-i_2 совпадают, и на всех рис. 5 поляра П-i_2 не маркируется. На рис. 5 a поляра П-i_1 пересекается полярой П-r_1 в четырех, а поляра П-i_2 полярой П-r_2 — всего в двух точках; в классическом случае точек пересечения всегда три (см. рис. 3) и одна из них является точкой касания.

Далее, если значение $\beta_2 = 30°$ в модели $\gamma = \mathrm{const}$ (рис. 3 b) есть верхняя точка бифуркации решения β_2^{**} (условие (15)), т.е. это значение β_2 является границей области неединственности, за которой при $\beta_2 > \beta_2^{**}$ (условие (16)) невозможно РО, то теперь, при таких γ_i, для этого значения β_2 уже могут иметь место картины развитых волновых структур как МО-, так и РО-типа.

Для симметричной картины течения с $\beta_1 = \beta_2 = 25°$ (рис. 3 c и рис. 5 c) обе модели допускают существование и РО, и МО.

В модели реального газа $\gamma_1 \neq \gamma_0$ значение $\beta_2 = 20°$ есть нижняя точка бифуркации решения β_2^* (18), т.е. это граница области неединственности, за которой при $\beta_2 > \beta_2^*$ возможно только РО и невозможно МО: на рис. 5 d точки пересечения поляр a, b, c совпадают. В классической модели (рис. 3 d) нижняя

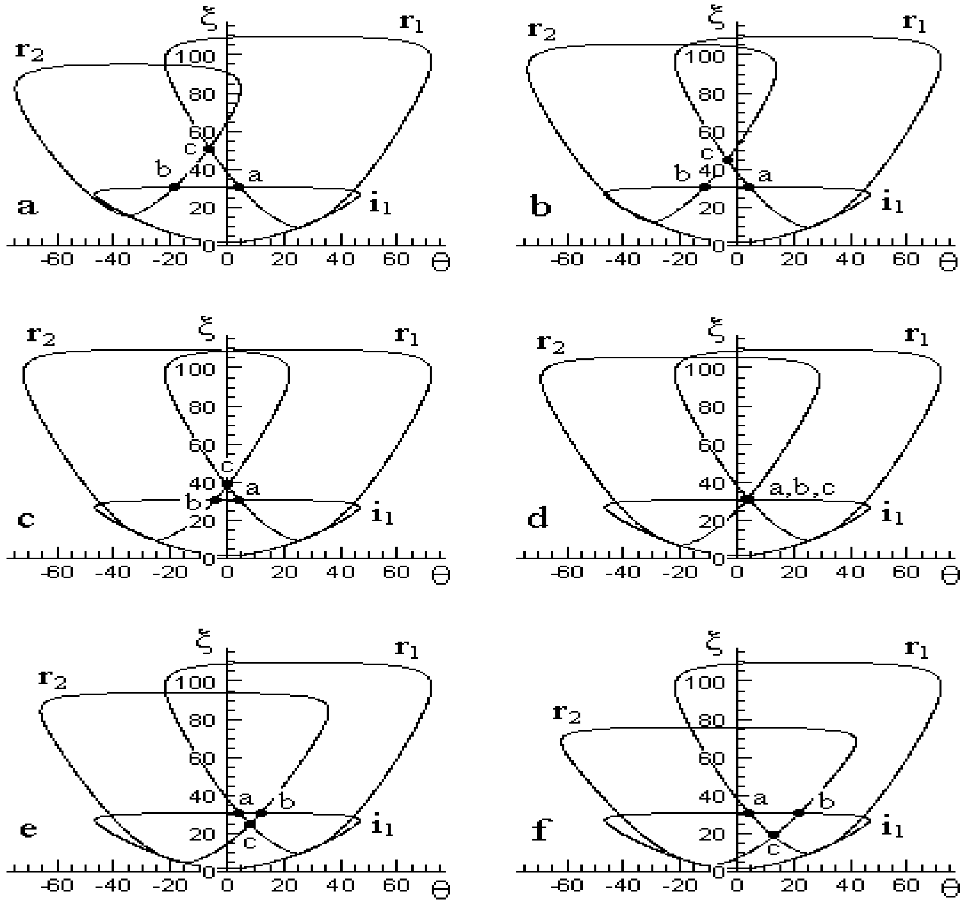

Рис. 5. Поляры падающей i_1 и двух отраженных r_1 и r_2 ударных волн при фиксированных значениях $M_0 = 5$; $\gamma_0 = 1.4$; $\gamma_1 = \gamma_3 = 1.3$; $\gamma_2 = \gamma_4 = 1.2$; $\beta_1 = 25°$ и вариации $\beta_2 = 35°$ (рис. a), 30° (b), 25° (c), 20° (d), 15° (e), 10° (f)

точка бифуркации имеет значение $\beta_2^* = 17°$ и при $\beta_2 = 20°$ возможны как РО, так и МО.

При дальнейшем уменьшении β_2 до 15° (рис. 3 e и рис. 5 e) и далее до 10° (рис. 3 f и рис. 5 f) становится возможным только РО как в классической модели, так и в модели реального газа. Разумеется, значения газодинамических параметров, полученных при использовании этих моделей (отношение давлений ξ и отклонение потоков на СУ), существенно различны.

Таким образом, учет реальных свойств газа приводит к изменению положения в параметрическом пространстве положения нижней β_2^* (18) и верхней β_2^{**} (15) точек бифуркации, ограничивающих область неединственности решения (20) от областей существования только единственного решения. При этом область неединственности смещается по параметру β_2 от диапазона $(17°, 30°)$ в классическом случае к диапазону $(20°, 38°)$ в модели изменяющегося эффективного показателя адиабаты.

7. Методология демаркации области ударно-волновых структур и определения границ двойного решения в реальных задачах. В прикладных задачах аэродинамики о движении какого-либо объекта в земной атмосфере, в рассматриваемой работе — задача о течении в воздухозаборнике ГПВРД, как правило, задаются следующие основные параметры: геометрия входа (углы β_1 и β_2 на рис. 1), высота H и скорость V полета. При этом непосредственно неизвестны ни значение числа Маха M_0, ни значения эффективного показателя адиабаты не только в области возмущенного течения, но и в зоне набегающего невозмущенного потока, которые определяют всю ударно-волновую картину. В некотором аспекте это является положительным фактором, поскольку список определяющих параметров (22) не только существенно укорачивается:

$$F_c = (\beta_1, \beta_2, H, V), \tag{24}$$

но и его компоненты имеют более “прозрачный” смысл, не допускающий неоднозначной трактовки — геометрические углы, отклоняющие поток, высота и скорость полета гиперзвукового летательного аппарата.

В комплексе программ, обеспечивающей решение рассматриваемой задачи, используется следующая схема проведения расчета. Предусмотрен специализированный режим запуска прикладной задачи с вводом параметров H и V, дополняющий исследовательский режим с возможностью непосредственного ввода M_0 и γ_i, где i — номер зоны течения ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). На первом этапе вычислительного конвейера по значению H база данных программного комплекса определяет по [8] все значения газодинамических параметров в зоне 0 невозмущенного потока (давление p_0, температуру T_0, показатель адиабаты γ_0, скорость звука a_0). По этим значениям и значению входного параметра V определяется M_0. Далее решение переходит на второй, существенно более сложный этап вычисления ударной поляры П-i_1. Этот этап является итерационным, с априори неизвестным необходимым числом итераций. На первой итерации как начальное приближение полагается $\gamma_1^0 = \gamma_0$ и по списку параметров M_0, γ_0, γ_1 приводится расчет поляры (1) со значением итерационного индекса $n = 1$:

$$f_1^n(\theta, \xi, M_0, \gamma_0, \gamma_1^{n-1}) = 0. \tag{25}$$

По значению угла β_1 и условию отклонения потока вдоль поверхности клина

$$\theta_1 = \beta_1 \tag{26}$$

на поляре (25) определяется точка (θ_1, ξ_1), где

$$\xi_1^n = \xi_1^n(\theta, M_0, \gamma_0, \gamma_1^{n-1}). \tag{27}$$

Поскольку поляра в области своего определения является двузначной зависимостью (5), таких точек, как правило, две: с ординатами $\xi_{1,w}^n$ и $\xi_{1,s}^n$ (эти точки совпадают только при $\theta = \theta_{\min}$ или $\theta = \theta_{\min}$). Из них выбирается слабое решение:

$$\xi_{1,w}^n \leqslant \xi_{1,s}^n, \quad \xi_1^n = \xi_{1,w}^n. \tag{28}$$

По значениям θ_1, ξ_1^n, T_0, p_0 вычисляются размерные значения температуры и давления за фронтом СУ i_1 (в зоне 1):

$$T_1^n = T_1^n(\theta_1, \xi_1^n, T_0, p_0, \gamma_0, \gamma_1^{n-1}), \quad p_1^n = p_1^n(\theta_1, \xi_1^n, T_0, p_0, \gamma_0, \gamma_1^{n-1}). \tag{29}$$

Конкретный вид (29) приведен в [10].

Это позволяет вычислить новое значение эффективного показателя адиабаты (см. [7, 9]):

$$\gamma_1^n = \gamma_1^n(p_1^n, T_1^n) \tag{30}$$

и перейти на новый $(n+1)$-й итерационный слой в (25). Итерационная процедура (25) – (30) повторяется до установления самосогласованного решения во всех точках ударной поляры (24):

$$\left\| f_1^N - f_1^{N-1} \right\| < \varepsilon. \tag{31}$$

Вычислительные эксперименты, проведенные в широком диапазоне определяющих параметров, показали практически безотказную работу итерационного алгоритма (25) – (31) с минимальным ($N < 7$ при $\varepsilon = 10^{-3}$) числом требуемых итераций.

Аналогичную конструкцию имеет и третий этап вычислительного комплекса, обеспечивающий расчет параметров в зоне 2. При этом необходимо изменение расчетного шага (26) на

$$\theta_2 = \beta_2 \tag{32}$$

и всех нижних индексов “1” в (25 – 31) на индекс “2”.

Более сложным является четвертый этап определения положения СУ r_1 и параметров за ним в зоне 3 при отражении маховского типа. Алгоритм этого этапа принципиально аналогичен итерационному алгоритму (25) – (31) второго этапа. Поскольку параметры течения в зоне 1 уже известны, то, полагая на первой итерации как начальное приближение $\gamma_3^0 = \gamma_1$, можно провести расчет поляры (1) П-r_1 со значением итерационного индекса $n = 1$:

$$f_3^n(\theta, \xi, M_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}) = 0. \tag{33}$$

После этого отыскиваются все точки пересечения поляр П-r_1 и П-i_1:

$$(\theta_{3,k}^n, \xi_{3,k}^n) = \left\{ (\Pi - r_1) \times (\Pi - i_1) \right\}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \tag{34}$$

Число K точек пересечения, в зависимости от параметров задачи, может варьироваться от 1 до 4, включая точку “опоры” поляры П-r_1 на П-i_1 (см. п. 2). Из них выбирается слабое решение — точка (θ_3^n, ξ_3^n) пересечения левой ветви П-r_1 с верхней ветвью П-i_1:

$$\theta_3^n = \min\{\theta_{3,k}^n\}, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \tag{35}$$

Затем, вследствие двузначности поляры, выбирается

$$\xi_3^n = \max\left\{\xi_{3,1}^n(\theta_3^n), \xi_{3,2}^n(\theta_3^n)\right\}. \tag{36}$$

По известным значениям размерных параметров в зоне 1 вычисляются размерные значения температуры и давления за фронтом СУ r_1 в зоне 3:

$$T_3^n = T_3^n(\theta_3^n, \xi_3^n, T_1, p_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}), \quad p_3^n = p_3^n(\theta_3^n, \xi_3^n, T_1, p_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}). \tag{37}$$

Конкретный вид (37) приведен в [10]. Это позволяет вычислить новое значение эффективного показателя адиабаты

$$\gamma_3^n = \gamma_3^n(p_1^n, T_1^n) \tag{38}$$

и перейти на следующую итерацию алгоритма (33) – (38). Итерационная процедура повторяется до установления самосогласованного решения — конфигурации ударной поляры (33):

$$\left\| f_3^N - f_3^{N-1} \right\| < \varepsilon. \tag{39}$$

Алгоритм (33) – (39) также обеспечивает высокую скорость сходимости решения ($N < 7$ при $\varepsilon = 10^{-3}$) практически во всем диапазоне определяющих параметров.

Аналогичную конструкцию имеет пятый этап вычислительного конвейера программного комплекса, обеспечивающий расчет параметров в зоне 4 для маховского типа отражения СУ. При этом в алгоритме (33) – (39) изменяются нижние индексы: “1” на “2” и “3” на “4”. Кроме того, в качестве нужной точки пересечения выбирается точка пересечения правой ветви поляры П-r_2 с верхней ветвью поляры П-i_2, т.е. шаг алгоритма (35) заменяется на операцию

$$\theta_4^n = \max\{\theta_{4,k}^n\}, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \tag{40}$$

Заметим, что вторая и третья, четвертая и пятая ступени программного конвейера являются попарно независимыми друг от друга и могут быть выполнены параллельно на двухпроцессорных ПК или кластере мультипроцессорной системы. Это позволяет существенно снизить астрономическое время решения задачи, что особенно сказывается при проведении циклов расчетов с подробной мелкошаговой вариацией параметров, например высоты и скорости полета, двух углов конфигурации входа в воздухозаборник и т.п. Такие типы параллелизации задачи (по глобальным входным параметрам и внутренней структуре вычислительного алгоритма) рассматривались в работах [16, 17], а также монографии [18].

Шестой этап программного комплекса обеспечивает расчет положения СУ r_1 и СУ r_2 и параметров за ними в зонах 3 и 4 при отражении регулярного типа. В отличие от четвертого и пятого этапов, которые являются вычислительно независимыми, поскольку в случае маховского отражения зоны 3 и 4 разделены зонами 5 и 6 (в случае МО СУ r_1 и r_2 не пересекаются), данный этап требует совместного расчета соотношений Гюгонио на двух ударных волнах, так как зоны течения 3 и 4 прилегают друг к другу (в случае РО СУ r_1 и r_2 выходят из одной точки) и разделены лишь границей контактного разрыва. Это существенно усложняет алгоритм шестой ступени вычислительного конвейера по сравнению с предыдущими. Используется следующая итерационная методика. Поскольку параметры в зонах 1 и 2 уже известны, то, полагая на первой итерации как начальное приближение

$$\gamma_3^0 = \gamma_1, \quad \gamma_4^0 = \gamma_2, \tag{41}$$

можно провести расчет поляр (1) П-r_1 и П-r_2 со значением итерационного индекса $n-1$ на общей плоскости θ, ξ:

$$f_3^n(\theta, \xi, M_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}) = 0, \quad f_4^n(\theta, \xi, M_2, \gamma_2, \gamma_4^{n-1}) = 0. \tag{42}$$

По конфигурации поляр (42) отыскиваются все точки их пересечения:

$$(\theta_{34,k}^n, \xi_{34,k}^n) = \left\{(\Pi - r_1) \times (\Pi - r_2)\right\}_k, \quad k = 1, K. \tag{43}$$

Число K точек пересечения, в зависимости от параметров задачи, может быть равно 0 (нет пересечения), 1 (касание) или 2. Первый случай требует дополнительной проверки и будет особо рассмотрен ниже. Случай $K = 1$ безальтернативен, а в общем случае выбирается слабое решение — точка с ординатой

$$\xi_{34}^n = \min\{\xi_{34,1}^n, \xi_{34,2}^n\} \tag{44}$$

и соответствующей ей абсциссой (6)

$$\theta_{34}^n = \theta_{34}^n(\xi_{34}^n). \tag{45}$$

По известным значениям размерных параметров в зонах 0, 1, 2 и вычисленным в (44) – (45) относительному давлению ξ_{34}^n и углу отклонения потока θ_{34}^n можно определить размерные значения температуры и давления за фронтами СУ П-r_1 и П-r_2 (заметим,что давление в зонах 3 и 4 одинаково):

$$\begin{aligned} &p_3^n = p_3^n(\theta_{34}^n, \xi_{34}^n, T_1, p_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}), \quad p_4^n = p_3^n, \\ &T_3^n = T_3^n(\theta_{34}^n, \xi_{34}^n, T_1, p_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}), \quad T_4^n = T_4^n(\theta_{34}^n, \xi_{34}^n, T_2, p_2, \gamma_2, \gamma_4^{n-1}). \end{aligned} \tag{46}$$

Конкретный вид (46) см. в [10].

Далее определяются новые значения эффективных показателей адиабаты:

$$\gamma_3^n = \gamma_3^n(p_3^n, T_3^n), \quad \gamma_4^n = \gamma_4^n(p_4^n, T_4^n) \tag{47}$$

с которыми осуществляется переход на следующий $(n + 1)$-й итерационный шаг алгоритма (41) – (47). Так же, как и для ранее описанных алгоритмов, итерационная процедура повторяется до установления самосогласованного решения — конфигурации ударных поляр (42):

$$\left\| f_3^N - f_3^{N-1} \right\| < \varepsilon, \quad \left\| f_4^N - f_4^{N-1} \right\| < \varepsilon. \tag{48}$$

Алгоритм (41) – (48) также обеспечивает быструю сходимость решения ($N < 10$ при $\varepsilon = 10^{-3}$) в широком диапазоне определяющих параметров.

Однако следует иметь в виду, что в окрестности верхней (по (15)) точки бифуркации решения при недостаточно осторожном применении алгоритма (41) – (48) возможна потеря точки пересечения. Эту проблему следует обсудить более подробно. Допустим, окончательные конфигурации поляр П-r_1 и П-r_2 (априори пока неизвестные) таковы, что имеется всего одна точка их пересечения — точка касания. Поскольку топология поляр достаточно заметно зависит от γ_3 и γ_4, то выбор начального приближения (41) может привести к тому, что на первой итерации поляры (42) будут непересекающимися кривыми. В стандартном режиме расчета это приведет к остановке алгоритма (41) – (48) и выдаче сообщения, что "регулярное отражение ударных волн невозможно". Поэтому для такой ситуации предусмотрен более надежный, но и существенно более затратный по вычислительным ресурсам режим. Главный контрапункт этого режима заключается в следующем. Начальное приближение (41) "сканируется" в области своего изменения (23), т.е. проводится цикл расчетов с различными начальными приближениями

$$\gamma_{3,k}^0 = \text{variation}\,(1, 5/3, \delta_3), \quad k = 1, 2, \ldots . K_3, \tag{49}$$

$$\gamma_{4,k}^0 = \text{variation}\,(1, 5/3, \delta_4), \quad k = 1, 2, \ldots . K_4, \tag{50}$$

где символическая запись (49) – (50) означает, что производится перебор всех возможных значений эффективного показателя адиабаты в качестве начального приближения с интервалами δ_3 и δ_4. Эти значения, естественно, определяют число вариантов перебора K_3 и K_4. Применение алгоритма (41) – (50) с общим числом исполнения $K_3 \times K_4$ при достаточно малых δ_3 и δ_4 обеспечивает надежный поиск точек пересечения поляр даже в параметрической области бифуркации решения (касания поляр). Заметим, что этот алгоритм приводит к получению одного и того же решения при различных начальных приближениях (49) – (50), т.е. аттракторы алгоритма имеют широкий бассейн притяжения; странных аттракторов в многочисленных вычислительных экспериментах обнаружено не было (несмотря на все усилия), хотя утверждать, что алгоритм (41) – (50) их не имеет, было бы неоправданным оптимизмом.

Заключительная, восьмая стадия вычислительного конвейера заключается в совместном анализе полученных решений, т.е. анализе координат точек пересечения поляр П-i_1, П-i_2, П-r_1 и П-r_2 в случае маховского и регулярного типа отражений.

На основании описанной выше методологии делается вывод о том, какому диапазону решений (20) соответствует задача с данным набором параметров (24).

8. Неединственность решений: влияние высоты и скорости полета. Рассмотрим ударно-волновые структуры, возникающие в регулируемом (изменяемые углы β_1 и β_2) воздухозаборнике ГПВРД при различных значениях высоты H и скорости V полета. Применим описанную выше методологию для определения границ области неединственности, где возможны и маховское, и регулярное отражение скачков уплотнения. В параметрическом пространстве (24) определим положение нижней и верхней (20) бифуркационных точек

$$\beta_2^* = \beta_2^*(\beta_1, H, V), \tag{51}$$

$$\beta_2^{**} = \beta_2^{**}(\beta_1, H, V). \tag{52}$$

На рис. 6 – 7 приводятся поляры падающих (i_1 и i_2) и отраженных (r_1 и r_2) УВ. В области двойного решения применяются следующие обозначения поляр: для регулярного отражения — (r_{1R} и r_{2R}), для маховского отражения — (r_{1M} и r_{2M}). Значения параметров следующие: $\beta_1 = 25°$ (для всех этих рисунков), $V = 2$ км/сек (все рис. 6), $V = 4$ км/сек (все рис. 7), $H = 30$ км (левые колонки рисунков — рис. 6 a, c, e и рис. 7 a, c, e), $H = 50$ км (правые колонки рисунков — рис. 6 b, d, f и рис. 7 b, d, f).

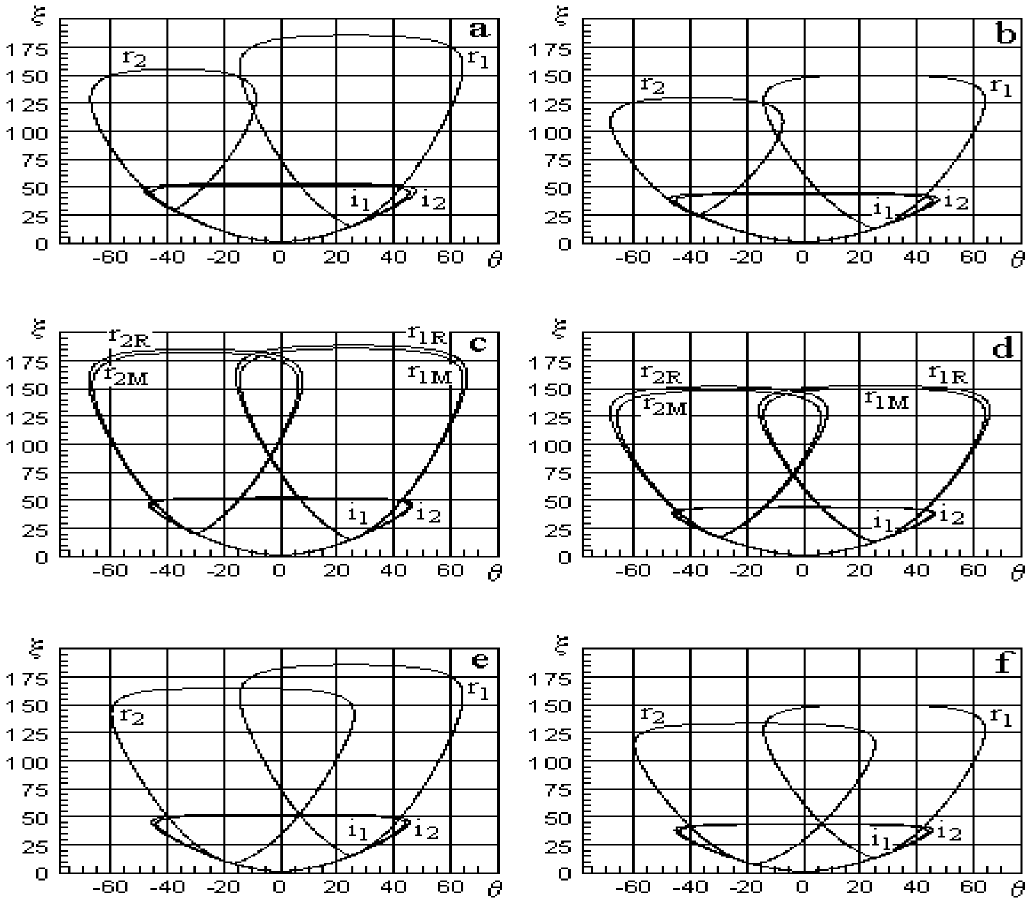

Рис. 6. Поляры падающих i_1 и i_2 и отраженных r_1 и r_2 ударных волн при полете в земной атмосфере со скоростью 2 км/сек на высоте 30 км (рис. a, c, e) и 50 км (рис. b, d, f) при фиксированном $\beta_1 = 25°$ и вариации $\beta_2 = 37.9°$ (рис. a), 37.7° (b), 30° (c, d), 16.9° (e), 17.3° (f). На рис. c и d показаны варианты поляр при маховском (r_{1M} и r_{2M}) и регулярном (r_{1R} и r_{2R}) отражении

В результате работы программного комплекса определены значения:

$$\beta_2^* = (25, 30, 2) = 16.9; \quad \beta_2^{**} = (25, 30, 2) = 37.9;$$
$$\beta_2^* = (25, 50, 2) = 17.3; \quad \beta_2^{**} = (25, 50, 2) = 37.7;$$
$$\beta_2^* = (25, 30, 4) = 12.6; \quad \beta_2^{**} = (25, 30, 4) = 41.7;$$
$$\beta_2^* = (25, 50, 4) = 12.3; \quad \beta_2^{**} = (25, 50, 4) = 42.2\,.$$

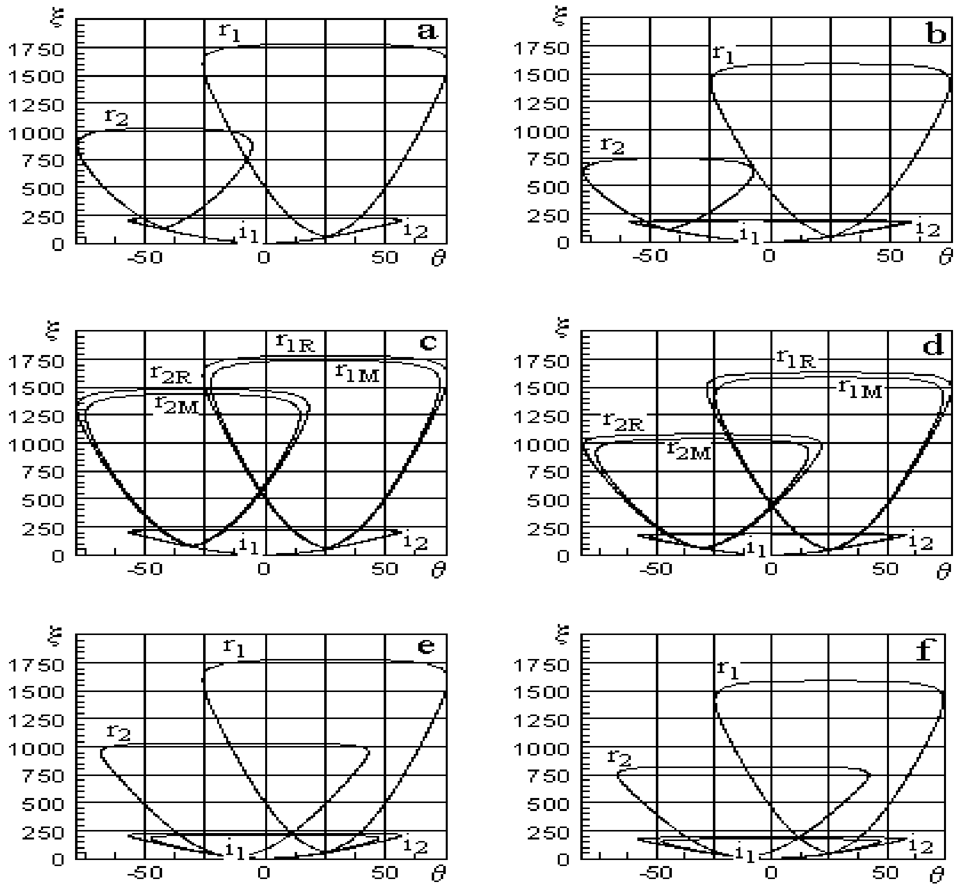

Рис. 7. Поляры падающих i_1 и i_2 и отраженных r_1 и r_2 ударных волн при полете в земной атмосфере со скоростью 4 км/сек на высоте 30 км (рис. a, c, e) и 50 км (рис. b, d, f) при фиксированном $\beta_1 = 25°$ и вариации $\beta_2 = 41.7°$ (рис. a), $42.2°$ (b), $30°$ (c, d), $12.6°$ (e), $12.3°$ (f). На рис. c и d показаны варианты поляр при маховском (r_{1M} и r_{2M}) и регулярном (r_{1R} и r_{2R}) отражении

Обратим внимание на немонотонную зависимость β_2^* и β_2^{**} от H и V в общем смысле. Так, при $V = 2$ имеет место $\beta_2^*(30°) < \beta_2^*(50°)$, и $\beta_2^{**}(30°) > \beta_2^{**}(50°)$, а при $V = 4$ уже $\beta_2^*(30°) > \beta_2^*(50°)$ и $\beta_2^{**}(30°) < \beta_2^{**}(50°)$. Говоря другими словами, в первом случае с увеличением высоты полета область неединственности решения уменьшается, а во втором — увеличивается. Однако при фиксированной высоте полета как для $H = 30$, так и для $H = 50$ область неединственности решения монотонно увеличивается с увеличением скорости полета (в данном диапазоне H и V). Это связано как с резким падением давления с ростом высоты, так и с немонотонной зависимостью температуры от высоты в земной атмосфере.

Верхние рис. 6 a, b и 7 a, b представляют расчеты с $\beta_2 = \beta_2^{**}$ и показывают граничную ситуацию перехода области единственности (возможно только МО) в область двойного решения. Поляры r_1 и r_2 касаются (рис. 7 b) или почти касаются (рис. 6 a, b и 7 a), поскольку расчет проводился с точностью только $0.1°$, а для хорошей визуализации касания точность должна быть не менее $0.01°$. Нижние рис. 6 e, f и 7 e, f представляют расчеты с $\beta_2 = \beta_2^*$ и показывают граничную ситуацию (поляры П-i_1, П-i_2, П-r_1, П-r_2 пересекаются в одной точке) перехода области единственности (возможно только РО) в область двойного решения. Средние рис. 6 c, d и 7 c, d представляют расчеты с $\beta_2^* < \beta_2 < \beta_2^{**}$ (конкретные значения β_2 особого значения не имеют; в данном случае $\beta_2 = 30°$ для всех рисунков) и показывают ситуацию в области двойного решения, когда возможны и МО (поляры r_{1M} и r_{2M}), и РО (поляры r_{1R} и r_{2R}).

Интересно сравнить значения термодинамических параметров в различных зонах течения. В таблице приводятся значения эффективного показателя адиабаты γ, давление p в атмосферах и температура T в градусах Кельвина для иллюстрируемых на рис. 6 e, f и рис. 7 e, f задач с $\beta_2 = \beta_2^*$, т. е. в нижней точке бифуркации решения.

Напомним, что фронты падающих УВ i_1 и i_2 разграничивают зоны $0-1$ и $0-2$, а фронты отраженных

Вариант	γ, p, T в зоне N				
(H, V)	0	1	2	3	4
1. (30,2)	1.401 $0.118 \cdot 10^{-1}$ 226	1.350 0.178 837	1.397 0.097 540	1.318 0.615 1268	1.327 0.615 1134
2. (50,2)	1.401 $0.788 \cdot 10^{-3}$ 271	1.344 0.010 900	1.375 0.006 611	1.313 0.034 1344	1.320 0.034 1227
3. (30,4)	1.401 $0.118 \cdot 10^{-1}$ 226	1.190 0.589 2720	1.347 0.186 866	1.207 2.653 3629	1.192 2.653 3243
4. (50,4)	1.401 $0.788 \cdot 10^{-3}$ 271	1.172 0.033 2830	1.344 0.010 901	1.221 0.149 3542	1.202 0.149 3353

УВ r_1 и r_2 — соответственно зоны 1–3 и 2–4. Кратко проанализируем изменения γ, p и T при переходе через эти фронты.

УВ i_1. Этот СУ является переходом ВК-типа для всех рассматриваемых сочетаний высот и скоростей полета. Значение γ уменьшается, и уменьшение является весьма существенным при $H = 50$ км и $V = 4$ км/сек — от 1.401 до 1.172. Это связано с тем, что значение T возрастает от 226° К по 2830° К, при котором весьма интенсивен процесс возбуждения молекул кислорода. В случае же $H = 30$ км и $V = 2$ км/сек температура на этом СУ возрастает всего до 837° К, колебательные степени свободы O_2 активированы еще незначительно и γ уменьшается лишь до 1.350.

УВ i_2. Этот СУ также является переходом ВК-типа для всех представленных вариантов, но значительно более слабым, чем СУ i_1, поскольку температура возрастает не так существенно и "не дотягивает" до области интенсивного возбуждения колебаний в молекулах газовой среды.

УВ r_1. Этот ударный переход может быть как переходом ВК-типа (варианты 1 и 2), так и переходом Д-типа (варианты 3 и 4). Определяющим фактором является скорость полета, доминирующая над варьируемыми значениями других параметров. Для вариантов 1 и 2 ($V = 2$ км/сек) рост T на СУ r_1 таков, что температура за его фронтом относительно невысока, около 1300°К, и лежит в области начала возбуждения интенсивных колебаний атомов в молекуле O_2. Для вариантов 3 и 4 конечная температура имеет значение около 3600°К, и здесь превалируют уже процессы диссоциации молекул O_2 при еще недостаточно заметной активации колебаний атомов в молекулах азота N_2. Интегрированным результатом этих процессов является рост значения γ от 1.190 до 1.207 (для $H = 30$ км) и от 1.172 до 1.221 (для $H = 50$ км). Заметим, что интенсивность этого отраженного скачка существенно меньше, чем падающего СУ i_1: отношение давлений за и перед фронтом СУ r_1 около 3–4, в зависимости от варианта задачи, тогда как на фронте СУ i_1 оно лежит в пределах от 15 до 50.

УВ r_2. Этот СУ является переходом только ВК-типа для всех вариантов значений H и V. Перед его фронтом температура относительно невысока, от 540°К до 901°К, и, соответственно, температура за фронтом попадает в температурный диапазон возбуждения колебаний в молекулах O_2. При скоростях полета $V = 2$ км/сек этот процесс значительно слабее (значение T около 1200°К и γ уменьшается лишь до значений 1.32), а при $V = 4$ км/сек колебательные степени свободы O_2 существенно возбуждены (температура около 3300° К, и значение γ существенно снижается до 1.192 при высоте 30 км и до 1.202 при высоте 50 км).

Заметим, что поскольку анализируется точка бифуркации $\beta_2 = \beta_2^*$, то давления в зонах течения 3 и 4 одинаковы, как и в случае маховского, так и регулярного отражения (для РО это справедливо во всем диапазоне его существования). В области неединственности решения поляры отраженных УВ маховского и регулярного типов не совпадают. Происходит расщепление поляр УВ r_1 и r_2 на поляры $r_{1M} - r_{1R}$ и $r_{2M} - r_{2R}$ (рис. 6 c, d и рис. 7 c, d), что приводит и к дуализму значений давления в этих зонах: $p_{3M} \neq p_{3R}$, $p_{4M} \neq p_{4R}$. Заметим, что, естественно, выполняется $p_{3R} = p_{4R}$, но $p_{3M} = p_{4M}$ только в случае симметричности течения при $\beta_1 = \beta_2$.

Расщепление поляр связано с тем, что конфигурация любой поляры (см. (1)) параметрически зависит от показателя адиабаты γ_+ за фронтом СУ, который, в свою очередь, зависит от давления p_+ за фронтом СУ, или, говоря другими словами, от значения ξ_+, т.е. некоторой точки, принадлежащей этой же поляре (1). Далее, в свою очередь, ξ_+ зависит (см. (5)) от угла разворота потока θ_+ за фронтом СУ.

Таким образом, γ_+ определяется точкой (ξ_+, θ_+) в пространстве (2), а положение этой точки различно в случае РО или МО. Для МО точка (ξ_+, θ_+) есть точка пересечения поляр П-i_1 и П-r_1 (точки a на рис. 3–5), а для РО — точка пересечения поляр П-r_1 и П-r_2 (точки c на рис. 3–5). В точке бифуркации решения $\beta_2 = \beta_2^*$ точки a и c совпадают (заметим, в скобках, что несмотря на сходную лингвистическую терминологию, не следует путать точки в пространстве (24) от точек в пространстве (2)). Соответственно совпадают и поляры r_{1M} и r_{1R}. При увеличении β_2 от β_2^* к β_2^{**} расстояние между точками a и c в (2) увеличивается, соответственно, увеличивается и степень расщепления поляры r на r_M и r_R. Вследствие большого "размаха" поляр П-i и П-r визуально это расщепление не слишком заметно (см. рис. 6 c, d и рис. 7 c, d) и для задач с данными значениями параметров H и V отклонение поляр П-r_M и П-r_R друг от друга не превосходит 2 %.

В диапазоне $\beta_2 < \beta_2^{**}$ расщепления поляр нет, поскольку П-r_R не может существовать (поляры П-r_1 и П-r_2 не пересекаются).

Аналогично и поляры падающих волн П-i_1 и П-i_2 также различны. В отличие от модельных задач, где в (1) равны все параметры (M_-, γ_- и γ_+) потока, набегающего на верхний и нижний углы входа в воздухозаборник (см. рис. 1), и, соответственно, поляры для них совпадают, для реальных задач полета в атмосфере ситуация несколько иная. Параметры (M_- и γ_-) набегающего потока, естественно, одинаковы для верхнего и нижнего углов, однако значения эффективного показателя адиабаты γ_+ за фронтом сходящего с вершин углов скачка уплотнения различны и определяются конкретными значениями углов β_1 и β_2, а также H и V. Эти параметры определяют значения температуры T_+ и p_+ за фронтом СУ, которые, в свою очередь, и определяют γ_+. Итерационный алгоритм расчета ударных поляр описан выше, а используемые конкретные формулы приведены в [10]. Заметим, что "вложенность" поляр П-i_1 и П-i_2 (какая из них является внешней, а какая — внутренней) зависит не только от соотношения β_1 и β_2, но и соотношения значений всех параметров определяющего списка (24). Их конкретные сочетания определяют тип возникающей ударной волны: ВК-, Д- или К-тип (см. п. 5 данной работы), соответствующий уменьшению или увеличения λ при переходе потока через фронт СУ.

В приводимых на рис. 6–7 полярах П-i_1 "вложена" в П-i_2, но их отклонение не слишком велико (до 4 %) и визуально плохо просматривается. Однако для задачи в целом эта разница имеет существенное значение, поскольку вниз по потоку отличия накапливаются, и в зонах течения 3 и 4 отличия, например, в значениях T достигают сотен градусов (см. таблицу).

Все это весьма существенно для оптимальной организации газового потока в тракте ГПВРД и систем обеспечения устойчивого функционирования двигательной установки гиперзвукового летательного аппарата.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность С. Н. Коробейникову и П. И. Гешеву за полезные обсуждения и О. Л. Бобренок за помощь в оформлении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 02–01–00097 и 01–01–00781).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neumann J. von.* Collected works (ed. A. Taub). V. 6. Oxford: Pergamon, 1963.
2. *Li H., Ben-Dor G.* Analytical and experimental investigations of the reflection of asymmetric shock waves in steady flows // J. Fluid Mech. 1999. **390**. 25–43.
3. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
4. *Кларк Дж., Макчесни М.* Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967.
5. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002.
6. *Tarnavsky G.A., Shpak S.I.* Effective specific heat ratio for problems of real gas hypersonic flows at bodies // Thermophysics and Aeromechanics. 2001. **8**, N 1. 39–53.
7. *Тарнавский Г.А., Шпак С.И.* Способы расчета эффективного показателя адиабаты при компьютерном моделировании гиперзвуковых течений // Сибирский журн. индустриальной математики. 2001. **4**, № 1(7). 177–197.
8. Tables of thermal properties of gases. USA. N. Y. Nat. Bureau of Standards. Circular 564 (1955).
9. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963.
10. *Тарнавский Г.А.* Ударные волны в газах с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 129–143.
11. *Ben-Dor G.* Shock wave reflection phenomena. Berlin: Springer, 1991.
12. *Тарнавский Г.А., Шпак С.И.* Некоторые аспекты компьютерного моделирования гиперзвуковых течений: устойчивость, неединственность и бифуркации численных решений уравнений Навье–Стокса // Инженерно-физич.

журн. 2001. **74**, № 3, 125–132.

13. *Волков В.Ф., Тарнавский Г.А.* Нарушение симметрии и гистерезис стационарных и квазистационарных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2001. **41**, № 11. 1742–1750.
14. *Pandolfi M., D'Ambrosio D.* Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the "carbuncle" phenomena // J. Comput. Phys. 2001. **166**, N 2. 271–301.
15. *Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W.* Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures // J. Comput. Phys. 2003. **186**, N 2. 690–696.
16. *Тарнавский Г.А., Шпак С.И.* Декомпозиция методов и распараллеливание алгоритмов решения задач аэродинамики и физической газовой динамики // Программирование. 2000. № 6. 45–57.
17. *Тарнавский Г.А., Корнеев В.Д., Вайнер Д.А., Покрышкина Н.М., Слюняев А.Ю., Танасейчук А.В., Тарнавский А.Г.* Вычислительная система "Поток - 3": опыт параллелизации вычислительного комплекса. Часть 1. Идеология распараллеливания // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 1. 37–48.
18. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб: БХВ–Петербург, 2002.

Поступила в редакцию
02.09.2003