УДК 532.529 doi 10.26089/NumMet.v19r328

ЛАГРАНЖЕВЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

К. Н. Волков[1], В. Н. Емельянов[2], И. Е. Капранов[3], И. В. Тетерина[4]

Рассматриваются вопросы, связанные с реализацией и физико-математическим сопровождением вычислительных экспериментов по исследованию течений жидкости и газа, содержащих лагранжевые когерентные вихревые структуры. Обсуждаются методы и инструменты, предназначенные для визуализации вихревых течений, возникающих в различных практических приложениях. Приводятся примеры визуального представления решений ряда задач вихревой газовой динамики, полученных при помощи лагранжевых подходов к описанию течений жидкости и газа. Помимо традиционных подходов к визуализации вихревых течений, основанных на построении линий уровня различных характеристик потока, применяются фазовые траектории лагранжевых частиц, сечения Пуанкаре и метод локальных показателей Ляпунова.

Ключевые слова: вычислительная газовая динамика, научная визуализация, вихрь, лагранжевая турбулентность, хаотическая адвекция, сечение Пуанкаре, показатель Ляпунова.

1. Введение. Развитие прикладной математики и компьютерных технологий открывает новые возможности по моделированию сложных физических явлений и процессов, возникающих в вычислительной газовой динамике (Computational Fluid Dynamics, CFD) [1].

В соответствии с особенностями описания движения жидкости или газа выделяют различные подходы к визуализации вихревых течений: эйлеровые (Eulerian) и лагранжевые (Lagrangian). В методе Эйлера внимание фиксируется на некоторой точке пространства, занятого жидкостью, и наблюдается, что происходит в этой точке. Переменными выступают координаты точки пространства и время. В методе Лагранжа фиксируется внимание на жидкой частице и прослеживается история ее движения. Переменными в данном случае являются начальные координаты частицы и время.

В эйлеровых подходах для визуализации вихревых течений обычно применяется тензор градиента скорости, его инварианты или их комбинации [2]. Основные недостатки эйлеровых методов связываются с необходимостью задания порогового значения того или иного критерия, используемого для идентификации вихря, а также с зависимостью этих критериев от выбора системы отсчета. Необходимость расчета производных скорости и связанные с этим погрешности вычислений тоже снижают привлекательность эйлеровых подходов.

Лагранжевые подходы к визуализации вихревых течений основаны на анализе траекторий жидких частиц. Границы вихревых структур определяются как линии максимальных значений поля локальных показателей Ляпунова [3–5]. Лагранжевые подходы оказываются инвариантными по отношению к выбору системы отсчета. Использование длинного промежутка времени для интегрирования основных уравнений обычно приводит к выявлению более мелких деталей течений.

Сравнение эйлеровых и лагранжевых способов описания течений жидкости и газа и методов визуализации когерентных вихревых структур рассматриваются в работах [6–9].

Перемешивание пассивных жидкостей (жидкостей с одинаковыми физическими свойствами) в гидродинамических течениях является сложным явлением, которое включает два процесса: деформация выделенной жидкости в заданном поле скорости и размыв ее границ за счет молекулярной диффузии [10].

[1] Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; вед. науч. сотр., e-mail: dsci@mail.ru

[2] Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; профессор, e-mail: vlademelyanov@gmail.com;

[3] Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; науч. сотр., e-mail: mrkap@yandex.ru

[4] Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: yaiv@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Анализ геометрических и временны́х масштабов течения позволяет в некоторых случаях пренебречь диффузионными эффектами, и проблема перемешивания сводится к анализу деформации выделенной области жидкости в рассматриваемом поле скорости (задача адвекции). Такая задача тесно связана с проблемами лагранжевого описания движения в гидродинамике и заключается в изучении траекторий системы лагранжевых жидких частиц в эйлеровом поле скорости. Эйлеровое поле скорости реальных течений не является строго регулярным, но в тех случаях, когда эйлеровое время корреляции достаточно велико по сравнению с лагранжевым, проблема перемешивания и переноса рассматривается в рамках концепции хаотической адвекции.

В теории нелинейных динамических систем хорошо изучены геометрические структуры, называемые инвариантными многообразиями, которые определяют движение в фазовом пространстве (стационарные точки, различные аттракторы, инвариантные торы). В гидродинамике такие когерентные структуры называются лагранжевыми (Lagrange Coherent Structure, LCS). При изучении явления адвекции применяются разные методы и критерии динамического хаоса [4]. Для определения хаотических режимов движения динамических систем находят применение построение и анализ фазовых траекторий, вычисление спектральных и корреляционных характеристик отдельных проекций фазовых траекторий, построение сечений Пуанкаре, анализ показателей Ляпунова. Их совместное использование позволяет достаточно надежно определить режимы движения отдельных частиц [3].

Одним из самых простых критериев является анализ фазовой траектории жидкой частицы (маркера). В том случае, когда траектория имеет определенную упорядоченность и предсказуемость, движение частицы считается регулярным. Если траектория частицы не содержит признака упорядоченности, то движение частицы считается хаотическим. Непосредственный анализ непрерывных интегральных кривых часто оказывается невозможным, в то время как отображения Пуанкаре помогают различать движения качественно отличающихся друг от друга типов (периодические, квазипериодические, хаотические).

Сечение Пуанкаре представляет собой систему точек, полученную в результате пересечения фазовой траекторией некоторой плоскости в выбранном направлении. Фазовая траектория считается регулярной, если система точек сечения Пуанкаре формирует упорядоченную структуру или ложится на регулярную кривую. Если траектория маркера формирует нерегулярную последовательность точек, то движение является хаотическим. При хаотическом движении две близлежащие траектории в среднем расходятся. Мерой расхождения близлежащих траекторий служат показатели Ляпунова. Положительное значение наибольшего показателя Ляпунова свидетельствует о хаотичности движения маркера. Построение сечений Пуанкаре и расчет показателей Ляпунова требуют достаточно мощных вычислительных ресурсов, поскольку оператор отображения строится путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Улучшение зрительного восприятия картины течения достигается за счет изменения формы частиц, которая изображается на рисунке, и ориентации частиц в соответствии с особенностями поля скорости. Например, форма частиц-маркеров изменяется с шарообразной в равномерном поле течения на эллипсоидальную в области отрыва потока [11]. В работе [12] для изменения пространственной плотности трассирующих частиц применяются показатели Ляпунова, а для уменьшения количества частиц, участвующих в расчетах — различные геометрические примитивы для рисования траекторий частиц. Увеличение расстояния между геометрическими примитивами указывает на увеличение скорости течения и наоборот [13]. Используется раскрашивание траекторий частиц в соответствии с каким-либо критерием (например, в зависимости от скорости или температуры), а для подчеркивания физических характеристик объекта — текстурный подход [14, 15].

Поиск критических параметров, при которых происходит интенсификация процессов адвекции, хорошо прослеживается на динамике изменений сечения Пуанкаре, бифуркационной диаграмме течения и проявляется в увеличении количества периодических эллиптических и гиперболических точек разного порядка. Расчет и визуализация неустойчивых многообразий осуществляются с помощью максимального показателя Ляпунова, являющегося мерой расхождения жидких частиц в хаотических потоках. Вычислив максимальный показатель Ляпунова для большого числа частиц, по линиям локальных максимумов этой величины (“хребтам”) можно определить наиболее влиятельные устойчивые многообразия в данной области. Поскольку при изменении знака времени устойчивые и неустойчивые многообразия меняются местами, то вычисление показателя Ляпунова при интегрировании уравнений адвекции назад во времени позволяет отождествить наиболее влиятельные неустойчивые многообразия с “впадинами” этой величины.

В данной работе обсуждаются методы визуализации вихревых течений жидкости и газа, для описания которых применяется лагранжев подход. Рассматриваются особенности реализации и применения лагранжевых подходов для анализа и визуализации структуры течений, возникающих в различных практических

приложениях. Приводятся детали численной реализации метода визуализации течений жидкости и газа, основанного на использовании локальных показателей Ляпунова на конечном интервале времени.

2. Основные уравнения. Когда адвектируемые частицы достаточно быстро приобретают скорость потока (инерционные эффекты пренебрежимо малы) и не оказывают существенного влияния на его свойства, адвекция называется пассивной, а сами частицы — пассивными скалярами.

Несмотря на простой вид основных уравнений, эйлеровые свойства поля скорости и лагранжевые свойства траекторий пассивных частиц связаны сложным образом. Простое детерминированное эйлеровое поле в некоторых случаях порождает практически непредсказуемые лагранжевые траектории частиц в смысле их чувствительности к малым вариациям начальных положений частиц и параметров потока [10]. В том случае, когда эйлеровое поле скорости является регулярным и имеет простую форму, это не означает отсутствия стохастичности лагранжевых траекторий жидких частиц [16].

Движение пассивной частицы описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ — скорость частицы в точке с координатами $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ в момент времени t. Поле скорости предполагается известным либо в результате решения уравнений Эйлера или Навье–Стокса, либо благодаря каким-либо кинематическим соображениям, либо в результате измерений.

Динамика трассирующих частиц описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (1) с полностью детерминированной правой частью (эйлеровое поле скорости является регулярным), фазовое пространство которой совпадает с физическим пространством трассирующих частиц. Из теории динамических систем следует, что решения таких уравнений могут быть хаотическими в смысле экспоненциальной чувствительности решения к малым изменениям начальных условий или параметров.

В случае стационарного двумерного течения любой степени сложности уравнения (1) интегрируемы, а траектории элементов жидкости совпадают с линиями тока. Для плоских несжимаемых потоков компоненты скорости находятся с помощью функции тока

$$u = -\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}. \tag{2}$$

Используя соотношения (2), уравнения (1) принимают форму уравнений Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}. \tag{3}$$

При этом функция тока $\psi(x, y)$ играет роль гамильтониана. Координаты частицы на плоскости (x, y) являются канонически сопряженными переменными, а фазовое пространство уравнений (3) представляет собой конфигурационное пространство. Двумерный перенос частиц в несжимаемой жидкости оказывается эквивалентным гамильтоновой динамике системы с полутора степенями свободы в нестационарном случае или с одной степенью свободы в стационарном случае. Трехмерные стационарные потоки не допускают записи в гамильтоновой форме.

Гамильтоновые системы являются консервативными, сохраняя при движении фазовый объем в фазовом пространстве (теорема Лиувилля). Элемент объема в фазовом пространстве рассматривается как множество начальных условий. В процессе эволюции это множество преобразуется в другой элемент фазового пространства (каждая точка следует своей фазовой траектории), объем которого остается постоянным.

Сохранение объема не подразумевает при этом сохранения формы, так как сохранение объема может достигаться двумя различными способами: элемент фазового объема переносится вдоль траектории практически без деформации или происходит экспоненциальное удлинение объема в некотором направлении с одновременным сжатием в перпендикулярном направлении (также экспоненциальным). Хотя фазовый объем сохраняется в обоих случаях, поведение системы отличается принципиальным образом. В первом случае траектории, близкие в начальный момент времени, остаются близкими в последующие моменты времени — траектории и решение устойчивы. Во втором случае малое начальное возмущение приводит к быстрому расхождению траекторий со временем — они неустойчивы.

Стационарные гамильтоновые системы с одной степенью свободы являются интегрируемыми. В случае, когда функция тока не зависит от времени, жидкие частицы движутся регулярным образом вдоль контуров постоянства функции тока. В случае функции тока, зависящей от времени, гамильтоновая система, как правило, оказывается неинтегрируемой, и появляются предпосылки для возникновения хаотического движения, приводящего к хаотической адвекции. Области интенсивного перемешивания и переноса

примеси соответствуют хаотическим областям, в то время как регулярные траектории соответствуют непроницаемым для переноса барьерам [10, 16].

3. Объекты визуализации. Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого определяется понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задается закон, описывающий изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени.

3.1. Фазовое пространство. В фазовом пространстве осями координат служат переменные, описывающие состояние системы (например, положение и скорость). Фазовой траекторией называется кривая в фазовом пространстве, описывающая эволюцию системы. Совокупность фазовых траекторий, описывающих эволюцию системы при различных начальных условиях, образует фазовый портрет системы.

Анализ фазовых траекторий и спектральных характеристик является достаточно надежным критерием для идентификации хаотического режима движения частиц. К количественным критериям, позволяющим провести сравнение различных параметров движения частиц, относятся сечения Пуанкаре и показатели Ляпунова.

3.2. Сечения Пуанкаре. Идея метода Пуанкаре (Poincaré section) состоит в снижении объема обрабатываемой информации при изучении поведения фазовых траекторий путем рассмотрения лишь дискретного ряда точек на траектории. Подход реализуется путем выбора некоторой (вообще говоря, произвольной) плоскости в фазовом пространстве и наблюдения за точками пересечения этой плоскости фазовыми траекториями. Множество точек пересечения плоскости фазовой траекторией P_i образует сечение Пуанкаре, а преобразование, связывающее последующую точку с предыдущей $P_{i+1} = T(P_i)$, называется отображением Пуанкаре.

При переходе от фазовых траекторий к сечению Пуанкаре происходит снижение размерности исследуемого множества. При этом рассматривается не система дифференциальных уравнений с непрерывным временем, а отображение с дискретным временем. В то же время, сечение Пуанкаре наследует топологические свойства породившей его динамической системы, сохраняя, в частности, фазовый объем в случае консервативной системы.

Ограничиваясь линейным анализом устойчивости, для описания отображения Пуанкаре $T(P)$ вводится матрица $M = \left\{\partial T_i/\partial P_j\right\}_{i,j=1,2}$, называемая матрицей Флоке (Floquet matrix). Эта матрица характеризует реакцию отображения T вдоль направления i на возмущение вдоль направления j. Устойчивость цикла определяется собственными значениями матрицы Флоке. Смещение траектории на следующем витке экспоненциально убывает со временем, если все собственные значения лежат внутри единичной окружности на комплексной плоскости. Потеря устойчивости происходит при пересечении модулем собственного значения единичной окружности. В том случае, когда какое-либо собственное значение становится по модулю больше единицы, смещения растут со временем и цикл становится неустойчивым.

3.3. Показатели Ляпунова. Построение сечений Пуанкаре позволяет эффективно определять области хаотического движения пассивных или инертных частиц. Однако сечение Пуанкаре не предоставляет информации об интенсивности перемешивания (внутри хаотической зоны движения частиц).

Количественной мерой расхождения (схождения) начально близких траекторий в фазовом пространстве являются показатели Ляпунова [4]. Для определения показателей Ляпунова необходимо рассмотреть эволюцию малого возмущения $\delta\boldsymbol{x}(t)$ фазовой траектории $\boldsymbol{x}(t)$. Численное интегрирование исследуемой системы уравнений позволяет построить матрицу M, связывающую вектор возмущений в момент времени $t + \delta t$ с вектором возмущений в момент времени t

$$\delta\boldsymbol{x}(t + \delta t) = M(\delta t)\delta\boldsymbol{x}(t).$$

Для n-мерной системы матрица M имеет размерность n^2 и n собственных значений. Траектория является устойчивой, если модули всех собственных чисел меньше единицы (показатели степени при экспоненциальном представлении собственных чисел отрицательны). На практике интерес представляет наиболее опасное направление, которое определяется наибольшим по величине показателем Ляпунова.

Исходя из того, что на конечных временах возмущенная траектория уходит в самом неустойчивом направлении, практическое определение наибольшего по величине показателя Ляпунова реализуется по следующей схеме (рис. 1). В точке $\boldsymbol{x}(t)$ на заданной траектории вносится возмущение $\delta\boldsymbol{x}(t)$, отстоящее на расстояние d_0 от основной траектории. Интегрируя исследуемую систему уравнений для невозмущенного и возмущенного состояний, вычисляется расстояние между траекториями $d(t)$ через промежуток времени τ. Далее возмущенная точка снова устанавливается на расстоянии d_0 от основной траектории, но так, что она остается в том направлении от точки $\boldsymbol{x}(t + \tau)$, которое было получено в результате вычисления возмущенного решения. На каждом шаге вычисляется скорость расхождения траекторий в наиболее опасном направлении. Считая, что расхождение траекторий подчиняется экспоненциальному

закону $d(t+\tau) = d_0 \exp(\lambda_1 \tau)$, и многократно повторяя процедуру, приходим к следующей формуле для вычисления первого показателя Ляпунова:

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln \frac{d_i}{d_0}.$$

Наряду с показателями Ляпунова в рассмотрение вводятся локальные показатели, которые рассчитываются на конечном интервале времени (Finite Time Lyapunov Exponent, FTLE). Такой подход используется, например, при анализе экспериментальных данных, когда в распоряжении исследователя находятся ограниченные временны́е реализации. Показатель Ляпунова на конечном промежутке времени является интегрированной величиной, характеризующей расходимость близких частиц за сравнительно большой период времени. Линии локальных максимумов показателя Ляпунова соответствуют растягивающему направлению поля скорости и являются устойчивыми многообразиями гиперболических траекторий вихрей [10].

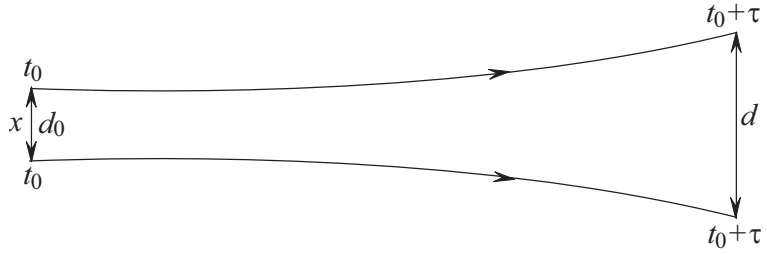


Рис. 1. Определение степени расходимости близлежащих траекторий

Расчет траекторий частиц, инжектируемых из точки $\boldsymbol{x}_0$ в момент времени t_0, и знание их положения в любой последующий момент времени t описываются набором фазовых траекторий (flow map) [17]

$$\Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}, t_0, t_1) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\big[\boldsymbol{x}(\tau), \tau\big]\, d\tau. \tag{4}$$

При этом $\Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}, t_0, t_1)$ в (4) представляет собой отображение начальной точки траектории частицы в конечную точку на интервале времени $T = |t_1 - t_0|$.

Вводится тензор деформаций Коши–Грина (Cauchy–Green deformation tensor)

$$C_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0, t_1) = \left[\frac{\partial \Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0)}{\partial \boldsymbol{x}_0}\right]' \left[\frac{\partial \Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0)}{\partial \boldsymbol{x}_0}\right]. \tag{5}$$

Тензор Коши–Грина (5) является симметричным и положительно определенным. В двумерном случае тензор Коши–Грина имеет два вещественных положительных собственных значения и два ортогональных собственных вектора. Собственные значения λ_i и собственные векторы $\boldsymbol{\xi}_i$ тензора $C_{t_0}^{t_1}$ находятся из соотношения

$$C_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{x}_0) = \lambda_i(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{x}_0) \quad (i = 1,\, 2).$$

При этом $0 < \lambda_1(\boldsymbol{x}_0) < \lambda_2(\boldsymbol{x}_0)$ и $\big|\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{x}_0)\big| = 1$. Тогда

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \Omega \boldsymbol{\xi}_1, \quad \text{где} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для простоты зависимость λ_i и $\boldsymbol{\xi}_i$ от t_0 и t_1 опускается. Для несжимаемого течения ($\nabla \boldsymbol{v} = 0$) собственные значения тензора Коши–Грина (5) удовлетворяют соотношению $\lambda_1(\boldsymbol{x}_0)\lambda_2(\boldsymbol{x}_0) = 1$ для $\forall\ \boldsymbol{x}_0 \in U$.

Контуры когерентных вихревых структур находятся как траектории автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для тензорных линий тензора деформаций Коши–Грина.

Собственные векторы тензора Коши–Грина являются чувствительными к погрешностям вычислений. В точках, в которых $\lambda_1 = \lambda_2$, тензор $C_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0)$ становится плохо обусловленным.

На практике локальный наибольший показатель Ляпунова определяется при помощи различных соотношений:

— работа [3]

$$\lambda_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0) = \frac{1}{2|t_1 - t_0|} \ln\left\{\lambda_{\max}\Big[C_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0)\Big]\right\};$$

— работа [18]

$$\lambda_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0) = \frac{1}{|t_1 - t_0|} \ln\left\{\lambda_{\max}\left[C_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0)\right]\right\}^{1/2}.$$

Под $\lambda_{\max}(M)$ понимается максимальное собственное значение матрицы M. Показатель Ляпунова рассчитывается для $t_1 > t_0$ (интегрирование вперед, forward) или для $t_1 < t_0$ (интегрирование назад, backward). Интегрирование в различных направлениях предоставляет различную информацию о поле течения [3]. Интегрирование назад (attracting LCS, negative LCS, nLCS) позволяет обнаружить сближение траекторий частиц, что соответствует центрам вихревых образований, а интегрирование вперед (repelling LCS, positive LCS, pLCS) — расхождение траекторий частиц, что позволяет найти периферийные области (границы) вихрей.

Локальные максимумы скалярного поля, определяемого функцией f, определяются условиями [19]

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{e}^2} < 0,$$

где $f(\boldsymbol{x}) = \lambda_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0)$. Под $\boldsymbol{e}$ понимается минимальный или максимальный по величине собственный вектор гессиана. В векторной форме имеем $< \nabla f, \boldsymbol{e} >= 0$ и $\boldsymbol{e}' H \boldsymbol{e} < 0$, где H — гессиан. В работе [20] “хребты” определяются похожим образом, но в качестве вектора $\boldsymbol{e}$ используется наибольший собственный вектор тензора Коши–Грина.

Различные численные методы вычисления FTLE отличаются способом нахождения отображения $\Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}, t_0, t_1)$, а также методами вычисления градиента скорости и способами его линеаризации [21].

Для упрощения численной реализации (в частности, для того, чтобы избежать численного дифференцирования) находит применение подход, предложенный в работе [21], в котором применяется кусочно-линейная аппроксимация траекторий частиц (Finite Size Lyapunov Exponent, FSLE). Показатель Ляпунова находится из соотношения

$$\lambda_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0) = \frac{1}{|t_1 - t_0|} \ln r.$$

Промежуток времени $T = |t_1 - t_0|$ представляет собой минимальный интервал времени, на котором выполняется условие

$$\left\{\lambda_{\max}\left[C_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_0, t_0)\right]\right\}^{1/2} = r.$$

При хаотических режимах адвекции возникают изломы контуров, и интерполяция таких участков непрерывными функциями приводит к появлению больши́х вычислительных погрешностей, которые возрастают во времени достаточно быстро.

Вопросы, связанные с теоретическим обоснованием методов FTLE и FSLE, обсуждаются в работе [22]. Сравнение различных подходов (FTLE и FSLE) показывает, что оба подхода приводят к сходным изображениям картины течения и в существенной степени зависят от деталей численной реализации [23–25]. При этом метод FTLE оказывается несколько более эффективным в вычислительном плане. В обоих подходах используется масштабный параметр, определяющий расстояние между соседними траекториями частиц в начальный момент времени. Влияние масштабного параметра демонстрируется в работе [25], а в работе [26] приводятся примеры использования метода показателей Ляпунова для визуализации различных течений.

3.4. Спектр показателей Ляпунова. Показатели Ляпунова динамической системы с непрерывным временем определяют степень отдаления (или сближения) различных, но близких траекторий динамической системы на бесконечности. Набор показателей Ляпунова (спектр) характеризует общие закономерности поведения системы для всевозможных начальных условий. При положительном значении показателя Ляпунова (+) расстояние между изначально близкими траекториями системы с течением времени увеличивается. В том случае, если показатель является отрицательным (−), то близкие траектории еще более сближаются. Наконец, если показатель равен нулю (0), то близкие траектории остаются на примерно одинаковом расстоянии друг от друга.

Знание показателей Ляпунова позволяет сделать заключение о том, как система развивается с течением времени. В трехмерном случае возможны следующие варианты различного поведения:

$(-,-,-)$ система стремится к неподвижной точке (к стационарному состоянию, не зависящему от времени);

$(0,-,-)$ поведение системы становится периодическим, ее траектория приближается к замкнутой кривой (такая кривая называется предельным циклом);

$(0,0,-)$ квазипериодическое поведение, при этом траектории системы находятся на поверхности двумерного тора;

$(+,0,-)$ с течением времени система приближается к странному аттрактору (примером служит система Лоренца), а поведение системы является хаотическим.

Для систем высокой размерности набор вариантов становится более обширным. В этом случае, по-прежнему, наличие положительного показателя Ляпунова (при условии отрицательности их суммы) влечет за собой хаотическое поведение. Сумма ляпуновских показателей определяет среднее вдоль траектории изменение элементарного объема в фазовом пространстве.

4. Примеры хаотической адвекции. Рассмотрим ряд примеров динамических систем, в которых лагранжевые траектории частиц не являются регулярными, а также примеры некоторых простых полей течения и расчет показателей Ляпунова на конечном интервале времени.

4.1. Течение около седловой точки. Рассмотрим двумерное поле течения около седловой точки. Движение частицы описывается системой уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

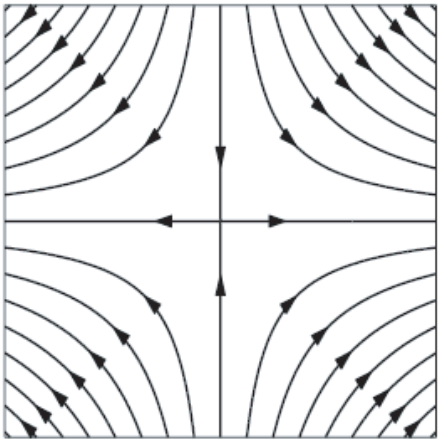


Рис. 2. Линии тока в окрестности седловой точки

Линии тока показаны на рис. 2.

Учитывая начальные условия $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ и интегрируя от 0 до T, найдем решение в виде

$$\boldsymbol{x}(t_0 + T) = \begin{pmatrix} x_0 e^{T} \\ y_0 e^{-T} \end{pmatrix}.$$

Линеаризуя, получим

$$\left(\frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}}{d\boldsymbol{x}} \right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{pmatrix} e^{T} & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}.$$

Тензор деформаций имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} e^{2T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{pmatrix}.$$

Следуя определению, найдем, что наибольший показатель Ляпунова на интервале времени T остается постоянным в пространстве и времени: $\lambda(\boldsymbol{x}, t) = 1$. Траектории жидких частиц расходятся с одинаковой скоростью и не зависят от начальных условий.

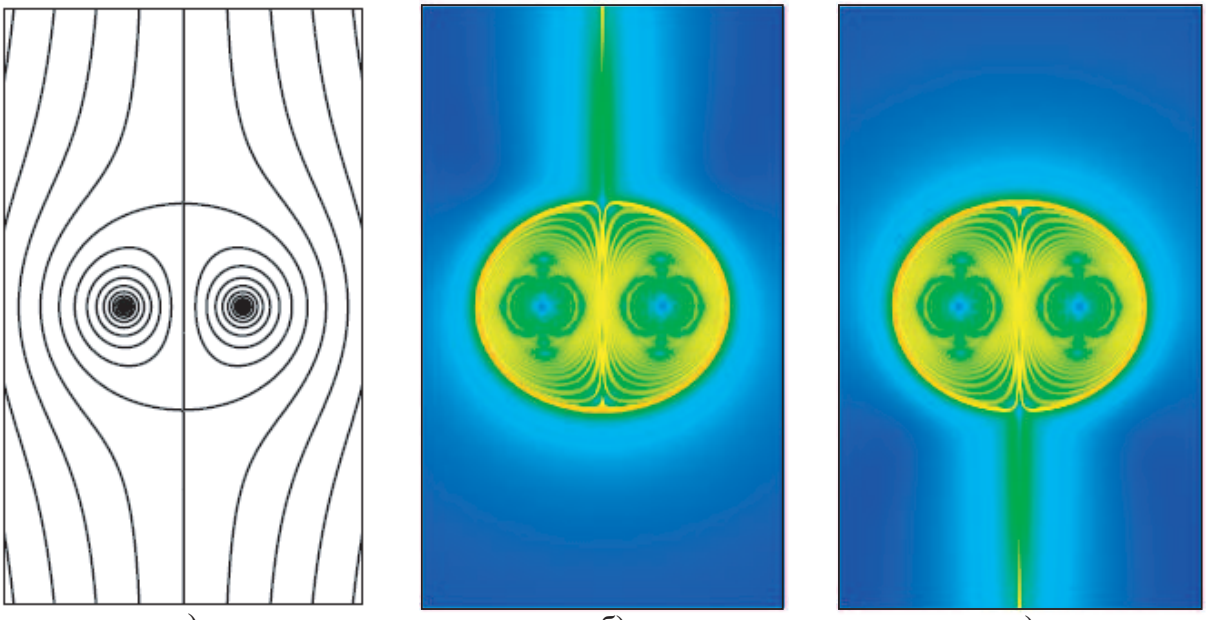
4.2. Два точечных вихря. Рассмотрим потенциальное поле течения, индуцированное взаимодействием двух точечных вихрей, имеющих равную и противоположную по знаку завихренность. Вихри располагаются в точках с координатами $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, где $a > 0$. Функция тока имеет вид

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{2a} + \ln\left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right],$$

где r_1 и r_2 — расстояние между точкой (x, y) и первым и вторым вихрем соответственно. Линии тока показаны на рис. 3а. Течение имеет две критические точки, расположенные по обе стороны от оси y.

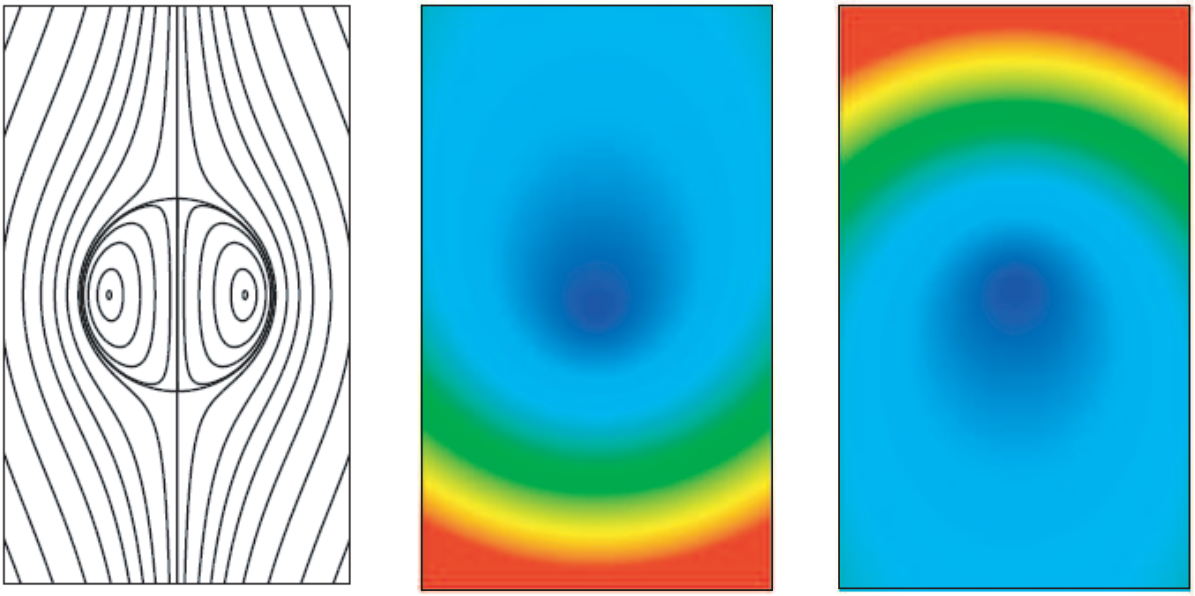
Движение частицы описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{y}{r_2^2} - \frac{y}{r_1^2} \right); \quad \dot{y} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x+a}{r_2^1} - \frac{x-a}{r_2^2} - \frac{1}{2a} \right).$$



а) б) в)

Рис. 3. Линии тока течения, индуцированного двумя точечными вихрями (а), и распределения показателя Ляпунова, полученные интегрированием вперед (б) и назад (в)



а) б) в)

Рис. 4. Линии тока в вихре Хилла (а) и распределения показателя Ляпунова, полученные интегрированием вперед (б) и назад (в)

Поле показателей Ляпунова, полученных при помощи интегрирования вперед и назад, показывают рис. 3б и рис. 3в. Поле течения за пределами вихрей является однородным (компоненты тензора деформаций равняются нулю). Наибольшая скорость расходимости траекторий соответствует границе раздела между вихревым течением внутри вихря и внешним потенциальным потоком.

4.3. Вихрь Хилла. Рассмотрим осесимметричное течение в цилиндрической системе координат (r, θ, z), линии уровня которого задаются условием (Hill's vortex)

$$r^2 \left(r^2 + z^2 - 1\right) = \text{const}\,.$$

Линии тока в плоскости симметрии течения показывает рис. 4а. Течение имеет две критические точки, расположенные по обе стороны от оси z.

Движение частицы в цилиндрической системе координат описывается следующими уравнениями:

$$\dot{r} = 2rz; \quad \dot{\theta} = 0; \quad \dot{z} = -2\big(2r^2 - 1\big) - 2z^2.$$

Поле показателей Ляпунова, полученных при помощи интегрирования вперед и назад, показывают рис. 4б и рис. 4в. Лагранжевые когерентные вихревые структуры в поле течения отсутствуют.

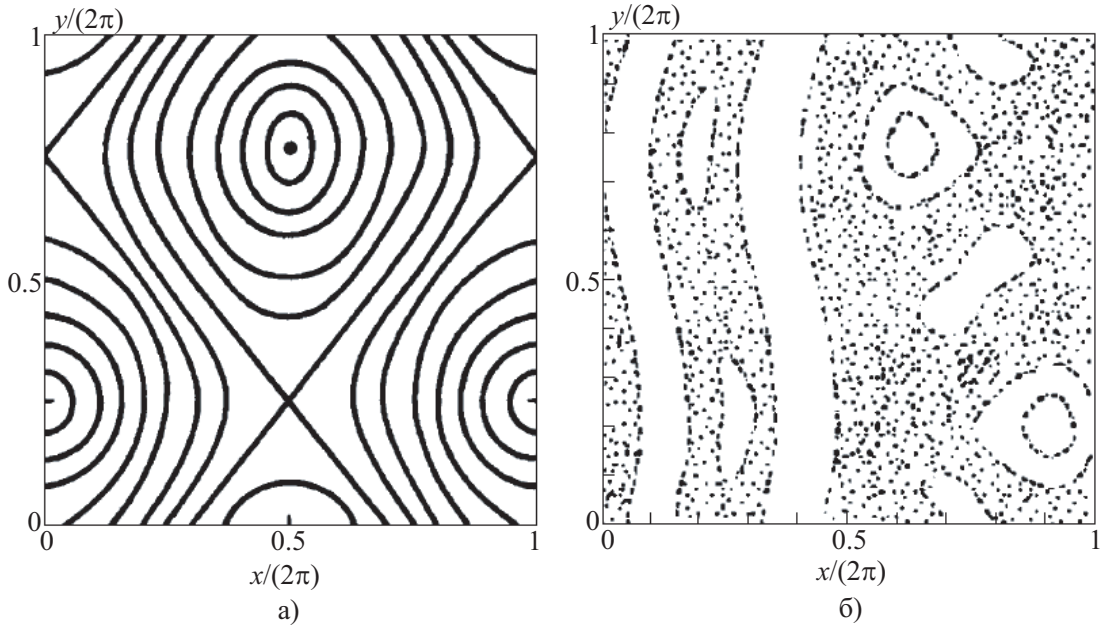


Рис. 5. Линии тока ВС-течения (а) и возникновение хаоса в окрестности сепаратрис (б)

4.4. ABC-течение. Одним из примеров систем, в которых возникают стохастические лагранжевые траектории жидких частиц, является стационарное трехмерное поле скорости, которое выражается в элементарных функциях

$$v_x = A\sin z + C\cos y; \quad v_y = B\sin x + A\cos z; \quad v_z = C\sin y + B\cos x.$$

Исследование экспоненциальной неустойчивости демонстрирует экспоненциальное расхождение близких траекторий, в том числе при одинаковых значениях коэффициентов ($A = B = C$). Лагранжевые траектории жидких частиц в поле ABC-течения, названного в честь Арнольда, Бельтрами и Чилдреса (Arnold–Beltrami–Childress), являются стохастическими [16].

В таких течениях вектор завихренности и вектор скорости всегда параллельны, а векторное произведение скорости и завихренности, являющееся в идеальном (невязком) потоке градиентом интеграла Бернулли, всюду равняется нулю ($\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0$). Это условие приводит к отсутствию ограничений на лагранжевые траектории частиц, которые двигаются не только по двумерным поверхностям (инвариантным торам). Свободное блуждание частиц по некоторой области течения является проявлением неинтегрируемости исследуемых уравнений адвекции.

В случае стационарных плоских несжимаемых течений стохастичность отсутствует и лагранжевые траектории совпадают с линиями тока, заданными функцией тока. Отсутствие стохатизации в стационарном двумерном несжимаемом течении непосредственно связано с отсутствием экспоненциального растяжения жидких частиц. Для большинства начальных условий расстояние между первоначально близкими частицами в стационарном двумерном течении несжимаемой жидкости в ограниченной области возрастает по линейному закону.

Простейший интегрируемый случай возникает при $A = 0$ (BC-течение):

$$v_x = C\cos y; \quad v_y = B\sin x.$$

Это позволяет изучать периодические вихревые структуры (ячейки) посредством функции тока (рис. 5а)

$$\psi(x, y) = C\sin y + B\cos x.$$

Такое течение имеет множество особых линий тока (сепаратрис), проходящих через седловые точки. Численное моделирование слабовозмущенного ВС-течения на основе гамильтониана

$$H(x, y, z) = \psi(x, y) + \varepsilon\,(y \sin z - x \cos z)$$

указывает на возникновение стохастической неустойчивости. Если параметр, характеризующий амплитуду возмущений $\varepsilon \ll 1$, то в окрестности сепаратрис возникают узкие стохастические слои. Хаос охватывает значительные доли пространства, когда $\varepsilon \equiv A \approx 1$ (рис. 5б).

Похожая ситуация возникает, когда функция тока двумерного течения, содержащего сепаратрисы, становится зависящей от времени. Такие двумерные модели течений получили название систем с 3/2 степенями свободы. В окрестности сепаратрис возникают области стохастичности. Интересными примерами служат также нестационарные обобщения ВС-течений, позволяющие исследовать перестройку топологии линий тока [16].

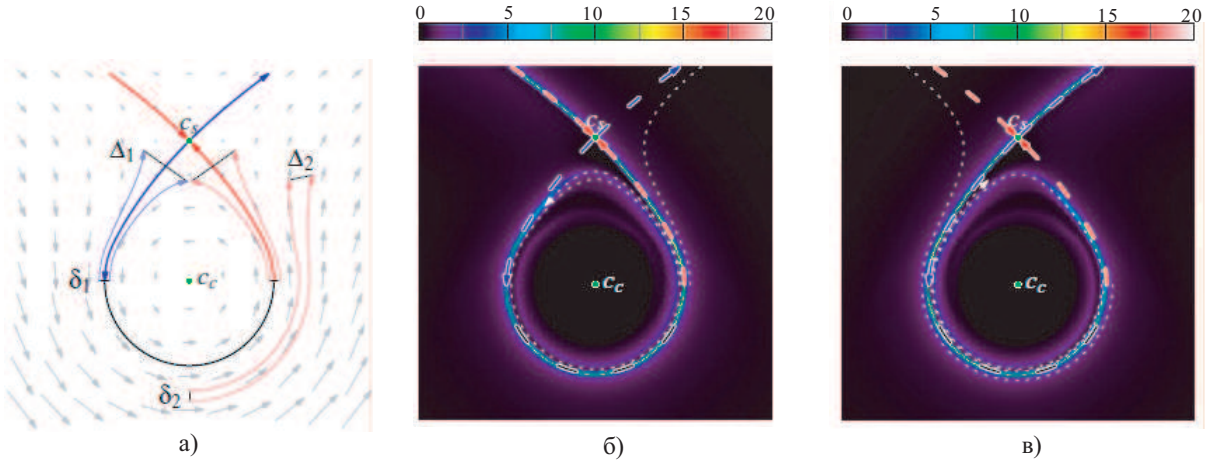


Рис. 6. Векторное поле скорости (а) и распределения показателя Ляпунова при интегрировании вперед (б) и назад (в)

4.5. Взаимодействие точечного вихря с нестационарным потоком. Механизм возникновения хаотического движения частиц пассивной примеси на примере модельной системы, состоящей из точечного вихря, взаимодействующего с двумерным периодическим потоком несжимаемой жидкости, обсуждается в работе [27].

Рассмотрим поток, состоящий из основных эйлеровых когерентных структур: нестационарного течения и вихря. Поле скорости двумерного несжимаемого потока задается функцией тока, которая для точечного вихря на фоне потока со стационарной и периодически (с частотой ω) модулированной составляющими имеет следующий безразмерный вид:

$$\psi(x, y) = \ln\bigl(x^2 + y^2\bigr)^{1/2} + \varepsilon x + \psi_1(t).$$

Первый член в правой части описывает точечный вихрь, расположенный в начале координат декартовой плоскости (x, y), а второй член — пространственно однородный меридиональный поток (стационарное течение вдоль оси y с юга на север с безразмерной скоростью ε). Под $\psi_1(t)$ понимается некоторая нестационарная функция тока, которая выбирается в виде

$$\psi_1(t) = \xi x \sin \omega t.$$

Рассмотрим случай, когда на топографический вихрь набегает однородный поток жидкости (рис. 6). Векторное поле скорости, показанное на фрагменте (а), содержит две критические точки — седловую точку c_s и критическую точку типа центр c_c. Одна из них является эллиптической, а другая — гиперболической особой точкой. Область течения разбивается на две области — вихревую с замкнутыми линиями тока и проточную с линиями тока, уходящими на бесконечность. Эти две области разделяет сепаратриса, самопересекающаяся в особой точке, с ветвями, уходящими на бесконечность. Внутри вихревой области жидкие частицы вращаются вокруг центра вихря. Вблизи центра вихря вращение жидкости близко к твердотельному. Траектории, показанные красным цветом, являются неустойчивыми, а траектории, показанные синим цветом — устойчивыми (пересечение линий pLCS и nLCS дает седловую точку). Показатель

Ляпунова рассчитывается при помощи интегрирования вперед (для $t_1 > t_0$) или назад (для $t_1 < t_0$). При интегрировании вперед начальное расстояние между соседними траекториями частиц δ_2 увеличивается до Δ_2, а при интегрировании назад — расстояние δ_1 увеличивается до Δ_1. Поле показателей Ляпунова приводится на фрагментах (б) (интегрирование вперед) и (в) (интегрирование назад). В обоих случаях период интегрирования полагается равным $T = 20$.

В отсутствие возмущения ($\xi = 0$) фазовый портрет системы состоит из набора финитных и инфинитных траекторий, разделенных петлей сепаратрисы, окружающей вихрь и проходящей через особую седловую точку с координатами $x = -1/\varepsilon$ и $y = 0$. В зависимости от начальных условий частицы перемещаются либо внутри сепаратрисной петли вдоль замкнутых линий тока, либо огибают ее слева и справа по инфинитным линиям тока. Частицы либо захватываются вихрем и движутся по периодическим орбитам внутри сепаратрисной петли, либо движутся по инфинитным траекториям в области свободного потока за пределами петли. Расщепление сепаратрисы приводит к важным последствиям, поскольку разрушается непроницаемый барьер и появляется возможность транспорта пассивной примеси между прежде непересекавшимися (в невозмущенном потоке) областями. Устойчивая ветвь сепаратрисной петли, по которой изображающая точка приближается к седлу, и неустойчивая ветвь, по которой она удаляется от седла, совпадают.

Топология фазового пространства существенно зависит от значений управляющих параметров ε и ξ, поскольку в их определения входят скорость стационарного течения, частота осцилляций нестационарного течения и интенсивность вихря, задающая частоту вращения частиц. С увеличением отношения ε/ξ возрастают размеры вихревого ядра, заполненного регулярными траекториями, и уменьшаются размеры зоны перемешивания [10]. При $\varepsilon/\xi \gg 1$ динамика системы является практически регулярной.

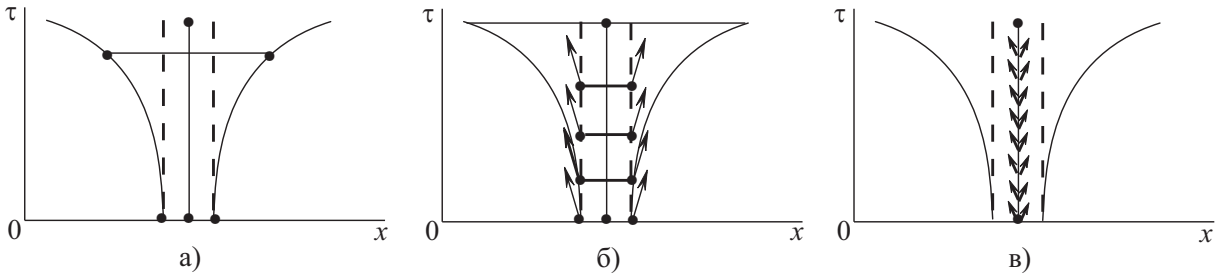


Рис. 7. Реализации различных подходов для нахождения локальных показателей Ляпунова: метод C-FTLE (а), метод R-FTLE (б), метод L-FTLE (в)

5. Численная реализация. Сравнение различных численных методов, предназначенных для нахождения локальных показателей Ляпунова, дается в работе [28] применительно к некоторым классическим нестационарным двумерным течениям. Сравниваются методы, развитые в работах [4] (classical method, C-FTLE), [29] (reseeding method, R-FTLE), [30] (localized method, L-FTLE). Идею и реализацию различных подходов поясняет рис. 7 (кружки соответствуют положению частицы).

В подходе [4] (метод C-FTLE) используется равномерное расположение частиц на заданном интервале. В качестве начальной точки траектории частицы принимается каждый узел сетки, а градиенты находятся при помощи центрированных конечно-разностных формул 2-го порядка (рис. 7а). Параметрами данного подхода, оказывающими влияние на его точность, являются шаг конечно-разностной сетки h (для простоты он принимается одинаковым в каждом из координатных направлений x, y и z), а также интервал времени τ.

Для уменьшения ошибок, связанных с численным дифференцированием, используется подход, предложенный в работе [20] (метод R-FTLE), в котором на каждом шаге применяется ренормализация полученных результатов. Для реализации подхода, помимо сеточного узла, как в методе C-FTLE, используются четыре дополнительные точки, окружающие текущий узел сетки, которые служат начальными точками траекторий частиц и используются для более точного расчета градиентов (рис. 7б). В том случае, когда расстояние между основной частицей и дополнительными частицами превышает некоторое заданное пороговое значение, начальное расстояние между текущей частицей, инжектируемой из сеточного узла, и дополнительными частицами уменьшается, и расчет траекторий этих частиц повторяется. Производится расчет градиентов и их нормализация, используя результаты на предыдущих шагах. Несмотря на повышение точности, в нестационарном случае метод R-FTLE требует интегрирования в 5 раз больше траекторий частиц по сравнению с методом C-FTLE [28]. В дополнение к параметрам h и τ, вычисления зависят от расстояния ε_1 (и способа его изменения на каждом шаге) между основной частицей, инжектируемой из

узла сетки, и четырьмя дополнительными частицами, инжектируемыми из точек, окружающих текущий узел сетки, а также от заданного порогового значения ε_2, которое служит в качестве индикатора изменения расстояния между частицами на данном шаге. При $\varepsilon_1 = h$ и $\varepsilon_2 = \infty$ методы C-FTLE и R-FTLE приводят к одинаковым результатам.

Для нахождения градиента отображения $\Phi_{t_0}^{t_1}$ вводятся четыре дополнительные точки, окружающие текущий сеточный узел (рис. 8). Координаты вспомогательных сеточных узлов находятся из соотношений

$$\boldsymbol{x}_j^r = (x_j + \delta x, y_j), \quad \boldsymbol{x}_j^l = (x_j - \delta x, y_j),$$
$$\boldsymbol{x}_j^u = (x_j, y_j + \delta y), \quad \boldsymbol{x}_j^d = (x_j, y_j - \delta y),$$

где δx и δy — шаги вспомогательной сетки. Под $\{\boldsymbol{x}_j = (x_j, y_j)\}_{j=1}^N$ понимается семейство узлов исходной сетки в области U. Градиент находится из соотношения

$$\nabla\Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_j) = \left[\frac{\Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_j^r) - \Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_j^l)}{2\delta x}\right] \left[\frac{\Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_j^u) - \Phi_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{x}_j^d)}{2\delta y}\right].$$

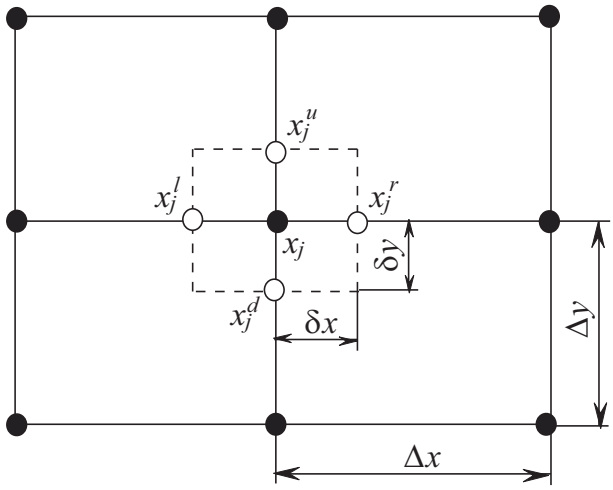


Рис. 8. Вычисление градиента. Значки • соответствуют узлам основной сетки, а значки ∘ — вспомогательным точкам, используемым для увеличения точности расчетов

Уменьшение шагов вспомогательной сетки δx и δy позволяет увеличить точность численных расчетов. С другой стороны, выбор слишком малых шагов вспомогательной сетки приводит к тому, что точки $(\boldsymbol{x}_j^r, \boldsymbol{x}_j^u, \boldsymbol{x}_j^l, \boldsymbol{x}_j^d)$, окружающие узел $\boldsymbol{x}_j$, могут оказаться по одну сторону от лагранжевой вихревой структуры (в отличие от узлов основной сетки, которые находятся по разные стороны от нее). На практике шаги вспомогательной сетки полагаются равными ($\delta x = \delta y$).

Введение дополнительных сеточных узлов для основной сетки, содержащей $N \times N$ узлов, требует интегрирования $5N \times 5N$ траекторий вместо $N \times N$ траекторий (каждый узел сетки представляет собой точку инжекции частицы).

Увеличение точности расчета градиентов достигается при помощи инжекции дополнительных частиц на каждом шаге интегрирования по времени (рис. 7в). Для реализации подхода, предложенного в работе [30] (метод L-FTLE), используется траектория частицы, инжектируемой из узла сетки, и оценка якобиана (линеаризация поля течения) на каждом шаге по времени или на каждом заданном интервале длиной d вдоль траектории частицы. Помимо вычислительных затрат метода R-FTLE, данный подход требует также нахождения якобиана на каждом шаге, что приводит к дополнительным численным ошибкам — особенно на неравномерных и неструктурированных сетках [31]. Дополнительным вычислительным параметром является расстояние d, служащее для оценки якобиана.

6. Примеры визуализации в прикладных задачах. Наиболее распространенными тестовыми задачами является течение в окрестности цилиндра с образованием вихревой дорожки Кармана и течение около сферы. В имеющейся литературе приводится большое число результатов теоретических и экспериментальных исследований задачи обтекания одиночного цилиндра кругового сечения и сферы равномерным потоком.

6.1. Течение около кругового цилиндра. Рассмотрим поперечное обтекание кругового цилиндра, расположенного в вязкой несжимаемой жидкости, находящейся при $t \leqslant 0$ в состоянии покоя. При $t > 0$ жидкость приводится в движение с постоянной скоростью U. Характерным параметром задачи является число Рейнольдса $\mathrm{Re} = RU/\nu$, где R — радиус цилиндра. Уравнения решаются в области, внешней по отношению к границе цилиндра, при отсутствии скольжения жидкости на этой границе и условии постоянства потока на бесконечности. При решении трехмерной задачи в направлении оси z выставляются периодические граничные условия. Размер вычислительной области составляет $44R$ в направлении оси x ($8R$ перед цилиндром и $36R$ позади него), $16R$ в направлении оси y и $4R$ в направлении оси z. В направлении оси z размещается 4 ячейки сетки.

В случае обтекания круглого цилиндра при $\mathrm{Re} < 10$ безотрывный поток тесно прилегает к поверхности цилиндра (доминируют вязкие силы и имеет место безотрывное обтекание). Увеличение числа Рейнольдса приводит к возникновению и развитию отрыва потока от поверхности цилиндра. В диапазоне $10 < \mathrm{Re} < 40$ за цилиндром наблюдается образование пары противоположно направленных симметричных вихрей, размеры которых увеличиваются с ростом числа Рейнольдса (эти вихри образуют ближний рециркуляционный след).

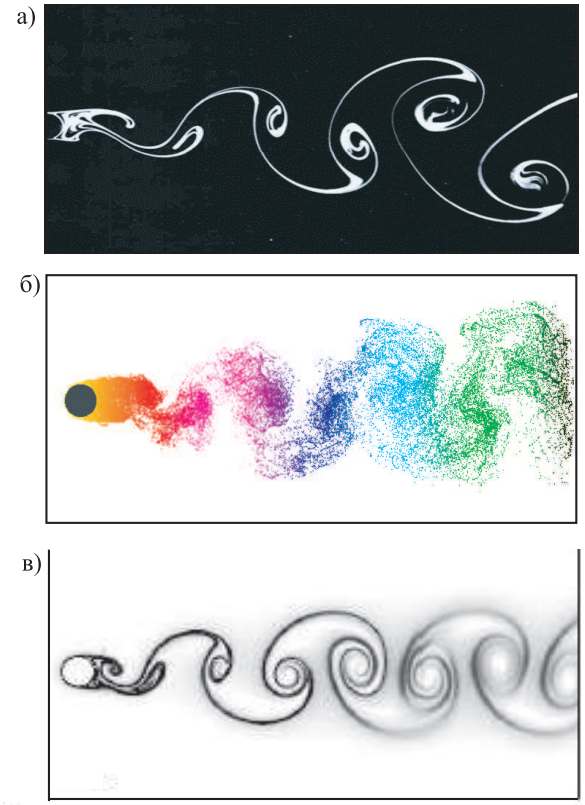


Рис. 9. Визуализация вихревой дорожки Кармана в следе за круглым цилиндром при Re = 140 на основе данных физического эксперимента [32] (а), метода меченых частиц (б) и метода показателей Ляпунова (в)

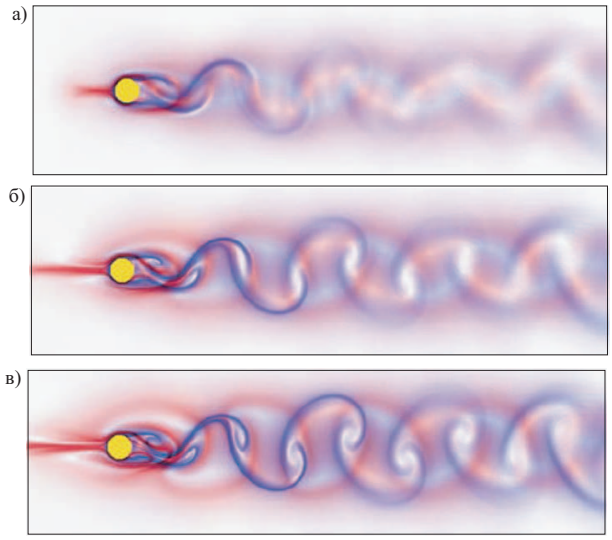


Рис. 10. Влияние порога интегрирования на визуализацию лагранжевых когерентных вихревых структур в следе за круговым цилиндром при 0.25 (а), 0.5 (б), 0.75 (в)

Когда число Рейнольдса достигает критического значения (Re ~ 50), удлинившиеся вихри ближнего следа теряют устойчивость и начинают отрываться от цилиндра попеременно с каждой стороны, развивается дорожка Кармана с периодической вихревой структурой. С этого момента обтекание цилиндра принимает пульсирующий характер, так как при каждом отрыве вихря изменяется давление потока на тело. Частота срыва вихрей определяется положением точки отрыва, которая с ростом скорости набегающего потока смещается от задней критической точки вверх по поверхности цилиндра. При Re < 150 течение в окрестности цилиндра и в следе ламинарное, а вихревая дорожка прослеживается вниз по потоку на расстоянии до $80D$, где D — диаметр цилиндра. Начиная с Re $= 150$, в вихревом следе за цилиндром происходит ламинарно-турбулентный переход, и с ростом числа Рейнольдса область следа, в которой происходит переход, перемещается вверх по потоку. Обтекание кругового цилиндра приобретает нестационарный трехмерный характер, сопровождающийся образованием в поле течения спиралевидных ориентированных по потоку вихрей. При $150 <$ Re < 300 срыв вихрей с поверхности цилиндра происходит хаотично, и определить доминирующую частоту не представляется возможным. При Re $= 300$ срыв вихрей становится регулярным и на основную частоту накладываются турбулентные возмущения, вследствие чего протяженность вихревой дорожки сокращается до нескольких диаметров цилиндра. При этом число Струхаля практически не изменяется и равняется 0.21. При Re $> 2 \times 10^5$ ламинарно-турбулентный переход происходит в пограничном слое на поверхности цилиндра, в силу чего точка отрыва пограничного слоя на цилиндре смещается к задней критической точке.

Сравнение численной и экспериментальной картины течения в следе за круглым цилиндром при Re $= 140$ показывает рис. 9. В эксперименте (фрагмент (а)) вода обтекает цилиндр диаметром 1 см со скоростью 1.4 см/с. Для визуализации движения частицы метятся белым коллоидным дымом, создаваемым электролитическим способом, и освещаются световым ножом [32]. По мере продвижения вниз по потоку на несколько диаметров ширина вихревой пелены возрастает. Визуализацию течения около круглого цилиндра при помощи частиц-маркеров показывает фрагмент (б) (частицы окрашиваются в

соответствии с величиной скорости), а визуализацию вихревой дорожки Кармана при помощи метода локальных показателей Ляпунова — фрагмент (в).

Влияние порога интегрирования на визуализацию лагранжевых когерентных структур в следе за круговым цилиндром показывает рис. 10. Красный цвет соответствует интегрированию вперед, а синий цвет — интегрированию назад (в обоих случаях изображается нормированная величина, изменяющая в интервале от 0 до 1).

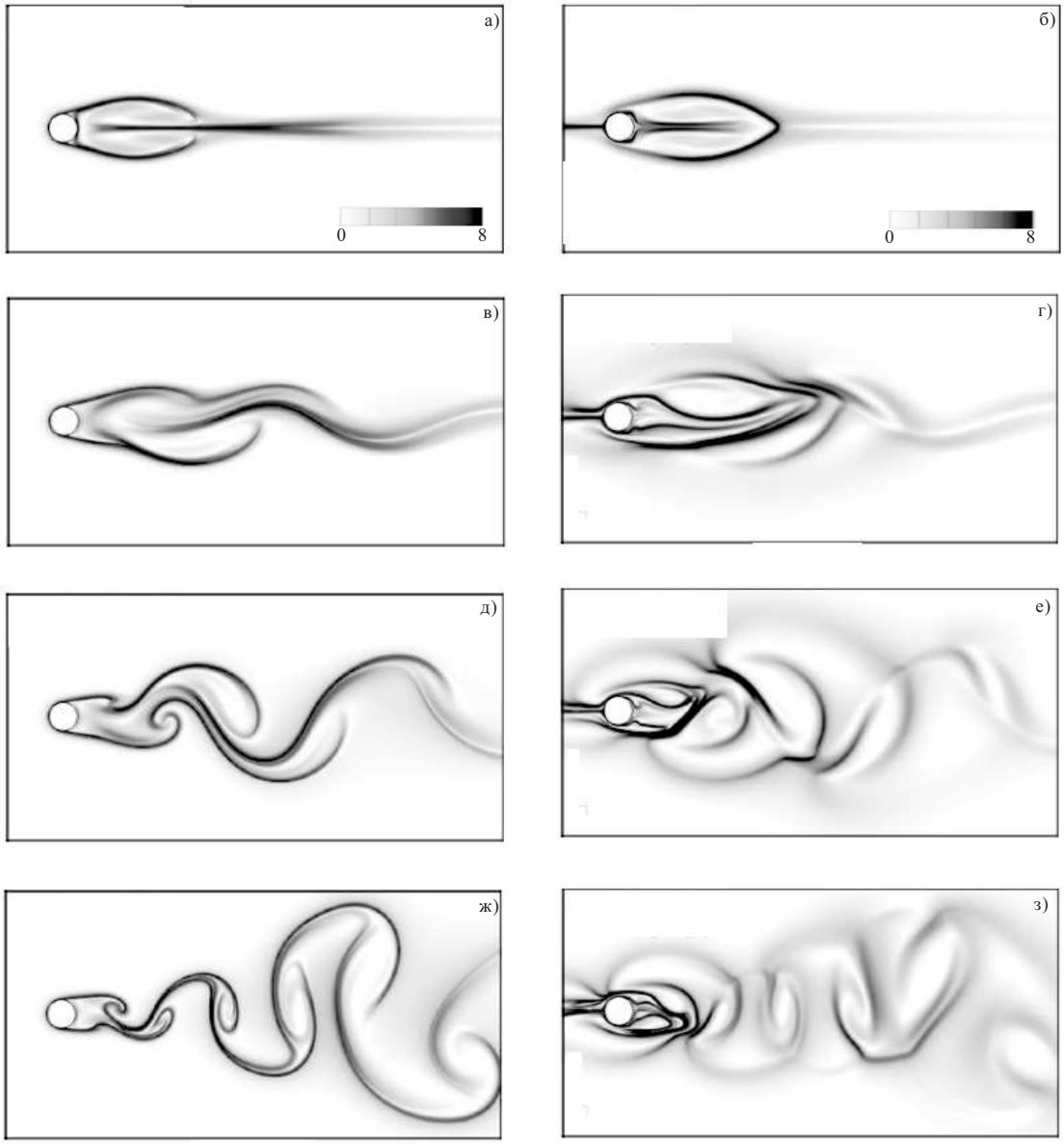


Рис. 11. Визуализация когерентных вихревых структур в следе за круговым цилиндром при помощи метода показателей Ляпунова в различные моменты времени $t = 0.3$ с (а, б), 0.6 с (в, г), 0.9 с (д, е), 1.2 с (ж, з)

Визуализацию поля течения около круглого цилиндра и структуру течения в следе (дорожка Кармана) при помощи метода показателей Ляпунова показывает рис. 11 при $\mathrm{Re} = 300$. Интегрирование проводится на промежутке времени $T = 1.5$ с. Шаг интегрирования по времени полагается равным $\Delta t = T/2400$. Разрешение по времени составляет $h = T/12$. Фрагменты (а), (в), (д) и (ж) соответствуют интегрированию назад, а фрагменты (б), (г), (е) и (з) — интегрированию вперед. Начальная фаза развития процесса обтекания цилиндра отличается ударным характером и быстрым изменением всех параметров потока. При этом режим обтекания цилиндра незначительно отличается от потенциального. Следующая фаза сопровождается формированием и постепенным развитием симметричной отрывной зоны в следе за цилиндром

(фрагменты (а) и (б)). Длина рециркуляционной зоны возрастает от нуля до нескольких диаметров цилиндра. Следствием развития неустойчивости в дальнем следе является формирование несимметричного следа (фрагменты (в) и (г)). Пульсации в следе за цилиндром возрастают, а отрывная зона сокращается (фрагменты (д) и (е)). Дальнейшее развитие картины течения характеризуется формированием вихревой дорожки Кармана (фрагменты (ж) и (з)).

6.2. Течение около сферы. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости около сферы. Сфера радиусом R располагается в начале координат. Протяженность расчетной области в продольном направлении равняется $30R$ ($10R$ перед сферой и $20R$ позади нее), а в направлении осей y и z — $12R$. Расчеты проводятся на сетке, содержащей 128^3 узлов, при числах Рейнольдса, соответствующих различным режимам течения около сферы. Делается около 250 шагов по времени. Для каждого режима течения разрешение сетки в пристеночной области подбирается исходя из значения числа Рейнольдса.

При числах Рейнольдса ниже 20 течение около сферы является ламинарным, отрыва потока от поверхности сферы не происходит, а течение около сферы остается симметричным. При $20 < \mathrm{Re} < 210$ реализуется стационарный осесимметричный режим обтекания. Отрыв потока от задней части сферы приводит к генерации осесимметричного вихревого кольца позади сферы. В интервале $210 < \mathrm{Re} < 270$ наблюдается устойчивая и несимметричная спутная струя (двойной спутный след). Течение теряет осевую симметрию, но обладает симметрией в азимутальной плоскости, содержащей вихревые структуры (стационарный плоскосимметричный режим). При $\mathrm{Re} = 270$ двойная спутная струя становится неустойчивой и со сферы начинают сходить вихревые кольца в форме так называемых шпилькообразных вихрей, которые образуют ламинарный след. При $270 < \mathrm{Re} < 400$ наблюдается нестационарный плоскосимметричный режим обтекания. В нестационарном несимметричном режиме при $400 < \mathrm{Re} < 1000$ плоская симметрия теряется, и срыв вихрей с поверхности серы носит нерегулярную природу. Когда число Рейнольдса возрастает до 800, вихревые петли быстро рассеиваются и спутный поток становится турбулентным. Турбулентный режим реализуется при $\mathrm{Re} > 1000$. При числах Рейнольдса, бóльших 1500, с обтекаемого тела сходят кольцевые вихри с осями, параллельными направлению набегающего потока.

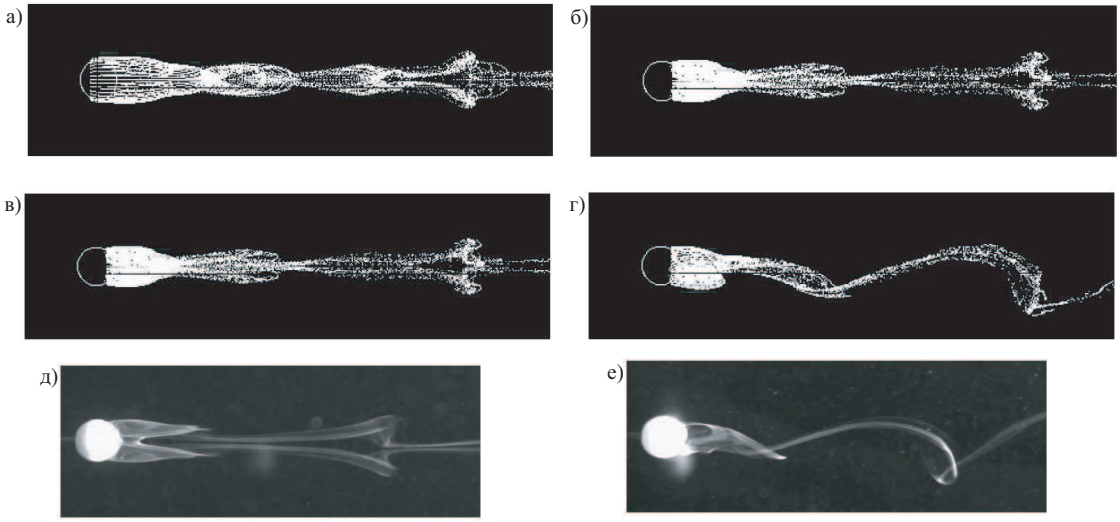


Рис. 12. Визуализация течения около сферы при помощи метода меченых частиц (а)–(г) и дымовая визуализация течения около сферы [32] (д) и (е)

Сравнение результатов численной (фрагменты (а)–(г)) и экспериментальной (фрагменты (д)–(е)) визуализации течения около сферы при числе Рейнольдса, равном $\mathrm{Re} = 280$, показывает рис. 12. Данное число Рейнольдса соответствует переходу от стационарного плоского симметричного следа к периодическому следу с плоской симметрией (вторая суперкритическая бифуркация). При этом на фрагментах (а) и (б) частицы инжектируются в пограничном слое на поверхности сферы вблизи точки отрыва, а на фрагментах (в) и (г) пассивные частицы инжектируются в рециркуляционной области. Фрагменты (а), (в) и (д) показывают структуру следа за сферой сверху, а фрагменты (б), (г) и (е) —- структуру следа сбоку.

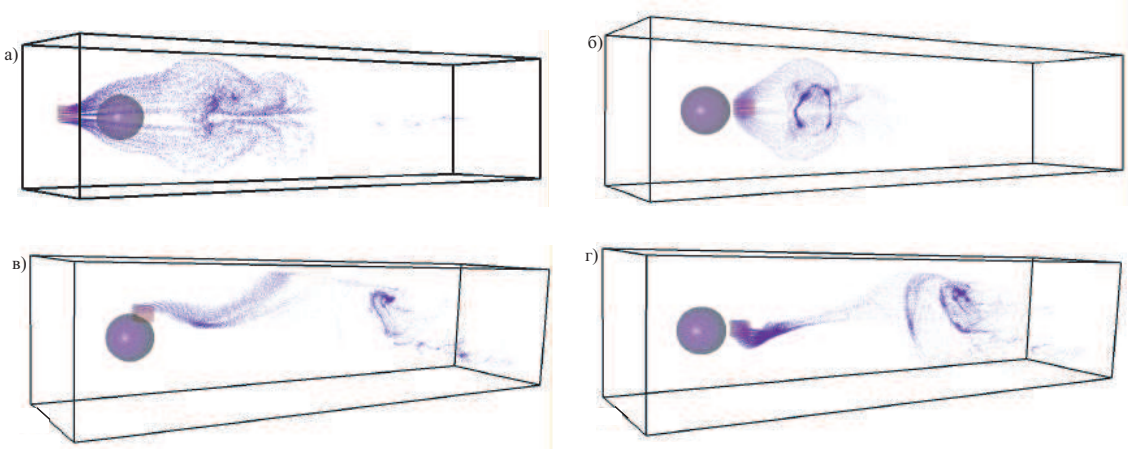


Рис. 13. Визуализация течения около сферы при помощи трассирующих частиц, инжектируемых из различных областей потока

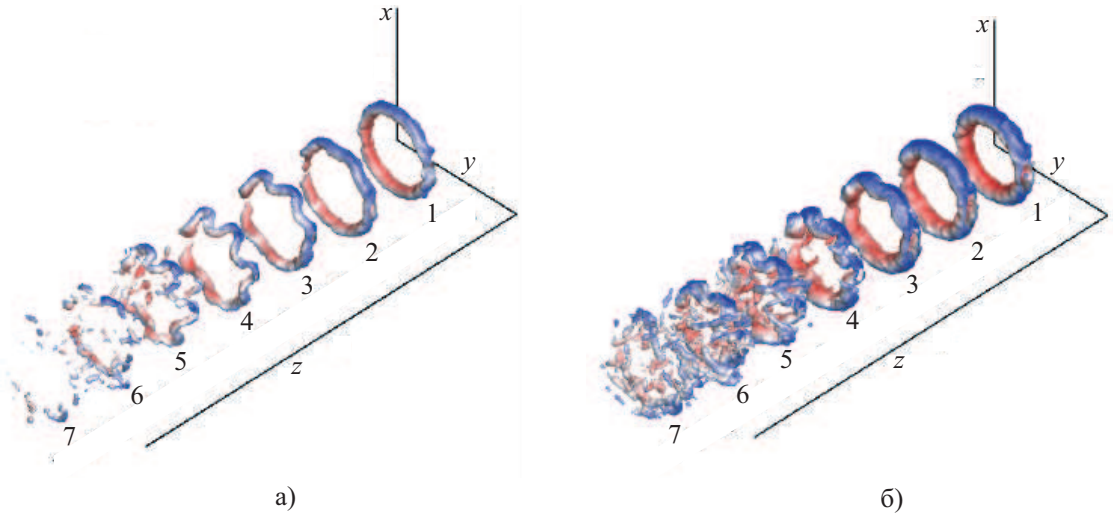


Рис. 14. Визуализация структуры вихревого кольца при $Q = 180$ (а) и $Q = 50$ (б) в моменты времени $t = 0.8$ с (1), 1.6 с (2), 2.4 с (3), 3.2 с (4), 4 с (5), 4.8 с (6), 5.6 с (7)

Картину течения около сферы, полученную при помощи метода трассирующих частиц, показывает рис. 13 при Re = 600. Для сокращения вычислительных затрат инжекция частиц производится не во входном сечении расчетной области, а из области прямоугольной формы, положение которой меняется в пространстве. Фрагменты (а) и (б) соответствуют одному и тому же моменту времени, но различаются положением области инжекции частиц. На фрагменте (а) частицы инжектируются из квадрата, расположенного вблизи входной границы расчетной области, а на фрагменте (б) — из квадрата, расположенного позади сферы в области рециркуляционного течения. Картины течения, приведенные на фрагментах (в) и (г), тоже соответствуют одному и тому же моменту времени, но различаются расположением области инжекции частиц — частицы инжектируются из областей, расположенных по разные стороны от сферы (в положительном и отрицательном направлениях оси z).

6.3. Структура вихревого кольца. Результаты трехмерного численного моделирования формирования и распространения вихревого кольца используются для визуализации его структуры в различные моменты времени.

Визуализацию вихревого кольца показывает рис. 14 при помощи критерия Q, представляющего собой инвариант тензора градиента скорости (цветовая палитра соответствует величине скорости). Радиус вихревого кольца составляет $R = 22.5$ мм, а радиус ядра — $a = 8.4$ мм. Начальная циркуляция скорости составляет $\Gamma = 0.0057$ м^2/с. Приводятся фрагменты, соответствующие различным режимам распространения вихревого кольца: ламинарный (кадры 1 и 2), переходный (кадры 3–5) и турбулентный (кадры 6 и 7). Визуализация течения проводится на интервале времени, равном 6.4 секунды, с интервалом 8 мс.

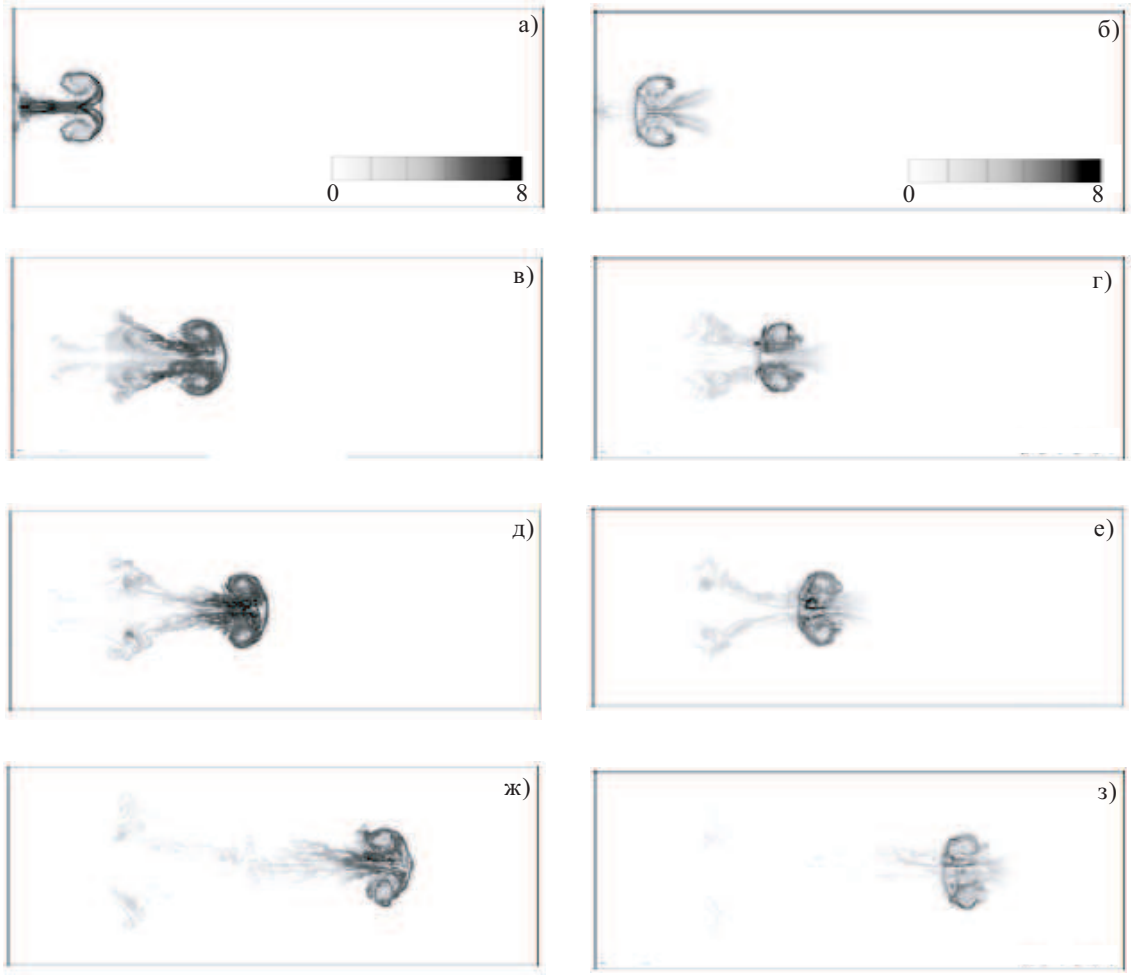


Рис. 15. Визуализация структуры вихревого кольца при помощи метода локальных показателей Ляпунова в моменты времени $t = 0.3$ с (а, б), 0.6 с (в, г), 0.9 с (д, е) и 1.2 с (ж, з)

В ламинарном режиме тор, соответствующий вихревому ядру, остается гладким (кадры 1 и 2 на фрагменте (а)). Возмущения формы вихревого кольца наблюдаются в переходном режиме (кадр 3 на фрагменте (а)), которые состоят в формировании 6 волн, амплитуда которых увеличивается по мере распространения вихревого кольца (кадры 4 и 5 на фрагменте (а)). В турбулентном режиме вихревое кольцо теряет форму тора и распадается на ряд вторичных вихрей (кадры 6 и 7 на фрагменте (а)). Для визуализации вторичных вихревых структур используется меньшее значение критерия Q (фрагмент (б)). Изменение критерия Q не приводит к качественной перестройке картины течения (в этом случае визуальная толщина вихревого ядра становится больше).

Визуализацию вихревых структур показывает рис. 15. Для визуализации используется метод показателей Ляпунова, накопленных за конечный интервал времени. Интегрирование проводится на промежутке времени $T = 1.5$ с, за который вихревое кольцо проходит примерно 10% длины вычислительной области. Для визуализации течения используется около 40000 меченых частиц. Шаг интегрирования по времени полагается равным $\Delta t = T/2400$. Разрешение по времени составляет $h = T/12$. Фрагменты (а), (в), (д) и (ж) соответствуют интегрированию назад, а фрагменты (б), (г), (е) и (з) — интегрированию вперед.

7. Заключение. Рассмотрены методы и инструменты, предназначенные для визуализации вихревых течений, возникающих в различных практических приложениях. Помимо традиционных подходов к визуализации вихревых течений, основанных на построении линий уровня различных характеристик потока (эйлеровые подходы), для повышения наглядности результирующего образа применяются фазовые траектории, сечения Пуанкаре и метод локальных показателей Ляпунова (лагранжевые подходы).

Вычисление наибольшего показателя Ляпунова позволяет оценить степень расходимости или сходимости двух близлежащих траекторий жидких частиц. Интегрирование в различных направлениях предоставляет различную информацию о поле течения. Интегрирование назад позволяет обнаружить сближе-

ние траекторий частиц, что соответствует центрам вихревых образований, а интегрирование вперед — их расхождение, что позволяет найти периферийные области вихрей.

The research leading to these results has been partially supported by the European Community's Research Infrastructure Action (grant agreement VISIONAIR 262044) under the 7th Framework Programme (FP7/2007–2013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bondarev A.E., Galaktionov V.A.* Current visualization trends in CFD problems // Applied Mathematical Sciences. 2014. **8**, N 28. 1357–1368.
2. *Волков К.Н., Емельянов В.Н., Тетерина И.В., Яковчук М.С.* Визуализация вихревых течений в вычислительной газовой динамике // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. **57**, № 8. 1374–1391.
3. *Green M.A., Rowley C.W., Haller G.* Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 2007. **572**. 111–120.
4. *Haller G.* Lagrangian coherent structures // Annual Review of Fluid Mechanics. 2015. **47**. 137–162.
5. *Huang Y., Green M.A.* Detection and tracking of vortex phenomena using Lagrangian coherent structures // Experiments in Fluids. 2015. **56**, N 7. 1–12.
6. *Jänicke H., Scheuermann G.* Measuring complexity in Lagrangian and Eulerian flow descriptions // Computer Graphics Forum. 2010. **29**, N 6. 1783–1794.
7. *Allshouse M.R., Peacock T.* Lagrangian based methods for coherent structure detection // Chaos. 2015. **25**, N 9. doi 10.1063/1.4922968.
8. *Hadjighasem A., Karrasch D., Teramoto H., Haller G.* Spectral-clustering approach to Lagrangian vortex detection // Physical Review E. 2016. **93**, N 6. doi 10.1103/PhysRevE.93.063107.
9. *Schlueter-Kuck K.L., Dabiri J.O.* Coherent structure colouring: identification of coherent structures from sparse data using graph theory // Journal of Fluid Mechanics. 2017. **811**. 468–486.
10. *Кошель К.В., Пранц С.В.* Хаотическая адвекция в океане // Успехи физических наук. 2006. **176**, № 11. 1177–1206.
11. *Yuan X., Chen B.* Illustrating surfaces in volume // Proceedings of the IEEE/EG Symposium on Visualization (VisSym'04), 19–21 May 2004, Konstanz, Germany. IEEE Computer Society. Aire-la-Ville: Eurographics Association, 2004. 9–16.
12. *Bürger K., Kondratieva P., Krüger J., Westermann R.* Importance-driven particle techniques for flow visualization // Proceedings of the IEEE Pacific Visualization Symposium (ParcificVis'08), 4–7 March 2008, Kyto, Japan. New York: IEEE Press, 2008. 71–78.
13. *Liang K., Monger P., Couchman H.* Interactive parallel visualization of large particle datasets // Parallel Computing. 2005. **31**, N 2. 243–260.
14. *Jones C., Ma K.-L.* Visualizing flow trajectories using locality-based rendering and warped curve plots // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2010. **16**, N 6. 1587–1594.
15. *Sadlo F., Bachthaler S., Dachsbacher C., Weiskopf D.* Space-time flow visualization of dynamics in 2D Lagrangian coherent structures // Computer Vision, Imaging and Computer Graphics. Theory and Application. Berlin: Springer, 2013. 145–159.
16. *Бакунин О.Г.* Стохастическая неустойчивость и турбулентный перенос. Характерные масштабы, инкременты, коэффициенты диффузии // Успехи физических наук. 2015. **185**, № 3. 271–306.
17. *Pobitzer A., Peikert R., Fuchs R., Schindler B., Kuhn A., Theisel H., Matkovic K., Hauser H.* On the way towards topology-based visualization of unsteady flow — the state of the art // EuroGraphics 2010 State of the Art Reports. Hoboken: Blackwell Publishing, 2010. 137–154.
18. *Shadden S.C., Lekien F., Marsden J.E.* Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows // Physica D. 2005. **212**, N 3–4. 271–304.
19. *Lindeberg T.* Feature detection with automatic scale selection // International Journal of Computer Vision. 1998. **30**, N 2. 79–116.
20. *Schindler B., Peikert R., Fuchs R., Theisel H.* Ridge concepts for the visualization of Lagrangian coherent structures // Topological Methods in Data Analysis and Visualization II. Berlin: Springer, 2012. 221–235.
21. *Aurell E., Boffetta G., Crisanti A., Paladin G., Vulpiani A.* Predictability in the large: an extension of the concept of Lyapunov exponent // Journal of Physics A. 1997. **30**, N 1. 1–26.
22. *Karrasch D., Haller G.* Do finite-size Lyapunov exponents detect coherent structures? // Chaos. 2013. **23**, N 4. doi 10.1063/1.4837075.
23. *Boffetta G., Lacorata G., Redaelli G., Vulpiani A.* Detecting barriers to transport: a review of different techniques // Physica D. 2001. **159**, N 1–2. 58–70.
24. *Sadlo F., Peikert R.* Efficient visualization of Lagrangian coherent structures by filtered AMR ridge extraction // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2007. **13**, N 6. 1456–1463.
25. *Peikert R., Pobitzer A., Sadlo F., Schindler B.* A comparison of finite-time and finite-size Lyapunov exponents //

Topological Methods in Data Analysis and Visualization III. Mathematics and Visualization. Berlin: Springer, 2014. 187–200.
26. *Cencini M., Vulpiani A.* Finite size Lyapunov exponent: review on applications // Journal of Physics A. 2013. **46**, N 25. doi 10.1088/1751-8113/46/25/254019.
27. *Будянский М.В., Пранц С.В.* Механизм хаотического перемешивания в элементарном детерминированном потоке // Письма в журнал технической физики. 2001. **27**, вып. 12. 51–56.
28. *Kuhn A., Rössl Ch., Weinkauf T., Theisel H.* A benchmark for evaluating FTLE computations // Proceedings of the Pacific Visualization Symposium (PacificVis), 22 February–2 March 2012, Songdo, Korea. Piscataway: IEEE Computer Society, 2012. doi 10.1109/PacificVis.2012.6183582.
29. *Nese J.M.* Quantifying local predictability in phase space // Physica D. 1989. Vol. **35**, N 1–2. 237–250.
30. *Kasten J., Petz C., Hotz I., Noack B., Hege H.-C.* Localized finite-time Lyapunov exponent for unsteady flow analysis // Vision Modeling and Visualization. Vol. 1. Magdeburg: University of Magdeburg, 2009. 265–274.
31. *Lekien F., Ross S.D.* The computation of finite-time Lyapunov exponents on unstructured meshes and for non-Euclidean manifolds // Chaos. 2010. **20**, N 1. doi 10.1063/1.3278516.
32. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию
31.05.2018

Lagrangian Coherent Vortex Structures and Their Numerical Visualization

K. N. Volkov[1], V. N. Emelyanov[2], I. E. Kapranov[3], and I. V. Teterina[4]

[1] *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: dsci@mail.ru*

[2] *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: vlademelyanov@gmail.com*

[3] *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Scientist, e-mail: mrkap@yandex.ru*

[4] *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: yaiv@mail.ru*

Received May 31, 2018

Abstract: Some issues related to the implementation and physico-mathematical support of computational experiments on the study of fluid and gas flows containing Lagrangian coherent vortex structures are considered. Methods and tools designed to visualize the vortex flows arising in various practical applications are discussed. Examples of visual representation of solutions to gas dynamics problems computed with Lagrangian approaches to the description of fluid and gas flows are given. In addition to the traditional approaches to the visualization of vortex flows based on the construction of contour curves of various flow quantities, the phase trajectories of Lagrangian particles, the Poincaré sections, and the local Lyapunov exponent method are applied.

Keywords: computational fluid dynamics, scientific visualization, vortex, Lagrangian turbulence, chaotic advection, Poincaré section, Lyapunov exponent.

References

1. A. E. Bondarev and V. A. Galaktionov, “Current Visualization Trends in CFD Problems,” Appl. Math. Sci. **8** (28), 1357–1368 (2014).

2. K. N. Volkov, V. N. Emel’yanov, I. V. Teterina, and M. S. Yakovchuk, “Visualization of Vortical Flows in Computational Fluid Dynamics,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **57** (8), 1374–1391 (2017) [Comput. Math. Math. Phys. **57** (8), 1360–1375 (2017)].

3. M. A. Green, C. W. Rowley, and G. Haller, "Detection of Lagrangian Coherent Structures in Three-Dimensional Turbulence," J. Fluid Mech. **572**, 111–120 (2007).

4. G. Haller, "Lagrangian Coherent Structures," Annu. Rev. Fluid Mech. **47**, 137–162 (2015).

5. Y. Huang and M. A. Green, "Detection and Tracking of Vortex Phenomena Using Lagrangian Coherent Structures," Exp. Fluids **56** (7), 1–12 (2015).

6. H. Jänicke and G. Scheuermann, "Measuring Complexity in Lagrangian and Eulerian Flow Descriptions," Comput. Graph. Forum **29** (6), 1783–1794 (2010).

7. M. R. Allshouse and T. Peacock, "Lagrangian Based Methods for Coherent Structure Detection," Chaos **25** (2015). doi: 10.1063/1.4922968

8. A. Hadjighasem, D. Karrasch, H. Teramoto, and G. Haller, "Spectral-Clustering Approach to Lagrangian Vortex Detection," Phys. Rev. E **93** (2016). doi 10.1103/PhysRevE.93.063107

9. K. L. Schlueter-Kuck and J. O. Dabiri, "Coherent Structure Colouring: Identification of Coherent Structures from Sparse Data Using Graph Theory," J. Fluid Mech. **811**, 468–486 (2017).

10. K. V. Koshel and S. V. Prants, "Chaotic Advection in the Ocean," Usp. Fiz. Nauk **176** (11), 1177–1206 (2006) [Phys. Usp. **49** (11), 1151–1178 (2006)].

11. X. Yuan and B. Chen, "Illustrating Surfaces in Volume," in *Proc. 6th Joint IEEE/EG Symp. on Visualization, Konstanz, Germany, May 19–21, 2004* (Eurographics Association, Aire-la-Ville, 2004), pp. 9–16.

12. K. Bürger, P. Kondratieva, J. Krüger, and R. Westermann, "Importance-Driven Particle Techniques for Flow Visualization," in *Proceedings IEEE Pacific Visualization Symposium, Kyto, Japan, March 4–7, 2008* (IEEE Press, New York, 2008), pp. 71–78.

13. K. Liang, P. Monger, and H. Couchman, "Interactive Parallel Visualization of Large Particle Datasets," Parallel Comput. **31** (2), 243–260 (2005).

14. C. Jones and K.-L. Ma, "Visualizing Flow Trajectories Using Locality-based Rendering and Warped Curve Plots," IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. **16** (6), 1587–1594 (2010).

15. F. Sadlo, S. Bachthaler, C. Dachsbacher, and D. Weiskopf, "Space-Time Flow Visualization of Dynamics in 2D Lagrangian Coherent Structures," in *Computer Vision, Imaging and Computer Graphics. Theory and Application* (Springer, Berlin, 2013), pp. 145–159.

16. O. G. Bakunin, "Stochastic Instability and Turbulent Transport. Characteristic Scales, Increments, and Diffusion Coefficients," Usp. Fiz. Nauk **185** (3), 271–306 (2015) [Phys. Usp. **58** (3), 252–285 (2015)].

17. A. Pobitzer, R. Peikert, R. Fuchs, et al., "On the Way Towards Topology-Based Visualization of Unsteady Flow — the State of the Art," in *EuroGraphics 2010 State of the Art Reports, Norrköping, Sweden, May 3–7, 2010* (Blackwell Publishing, Hoboken, 2010), pp. 137–154.

18. S. C. Shadden, F. Lekien, and J. E. Marsden, "Definition and Properties of Lagrangian Coherent Structures from Finite-Time Lyapunov Exponents in Two-Dimensional Aperiodic Flows," Physica D **212** (3–4), 271–304 (2005).

19. T. Lindeberg, "Feature Detection with Automatic Scale Selection," Int. J. Comput. Vis. **30** (2), 79–116 (1998).

20. B. Schindler, R. Peikert, R. Fuchs, and H. Theisel, "Ridge Concepts for the Visualization of Lagrangian Coherent Structures," in *Topological Methods in Data Analysis and Visualization II* (Springer, Berlin, 2012), pp. 221–235.

21. E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, et al., "Predictability in the Large: An Extension of the Concept of Lyapunov Exponent," J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1), 1–26 (1997).

22. D. Karrasch and G. Haller, "Do Finite-Size Lyapunov Exponents Detect Coherent Structures?," Chaos **23** (2013). doi 10.1063/1.4837075

23. G. Boffetta, G. Lacorata, G. Redaelli, and A. Vulpiani, "Detecting Barriers to Transport: A Review of Different Techniques," Physica D **159** (1–2), 58–70 (2001).

24. F. Sadlo and R. Peikert, "Efficient Visualization of Lagrangian Coherent Structures by Filtered AMR Ridge Extraction," IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. **13** (6), 1456–1463 (2007).

25. R. Peikert, A. Pobitzer, F. Sadlo, and B. Schindler, "A Comparison of Finite-Time and Finite-Size Lyapunov Exponents," in *Topological Methods in Data Analysis and Visualization III. Mathematics and Visualization* (Springer, Berlin, 2014), pp. 187–200.

26. M. Cencini and A. Vulpiani, "Finite Size Lyapunov Exponent: Review on Applications," J. Phys. A. Math. Theor. **46** (2013). doi 10.1088/1751-8113/46/25/254019

27. M. V. Budyansky and S. V. Prants, "A Mechanism of Chaotic Mixing in an Elementary Deterministic Flow," Pis'ma Zh. Tekh. Fiz. **27** (12), 51–56 (2001) [Tech. Phys. Lett., **27** (6), 508–510 (2001)].

28. A. Kuhn, Ch. Rössl, T. Weinkauf, and H. Theisel, "A Benchmark for Evaluating FTLE Computations," in *Proc. Pacific Visualization Symposium (PacificVis), Songdo, Korea, February 22–March 2, 2012* (IEEE Computer Society, Piscataway, 2012). doi 10.1109/PacificVis.2012.6183582

29. J. M. Nese, "Quantifying Local Predictability in Phase Space," Physica D **35** (1–2), 237–250 (1989).

30. J. Kasten, C. Petz, I. Hotz, et al., "Localized Finite-time Lyapunov Exponent for Unsteady Flow Analysis," in *Vision Modeling and Visualization* (Univ. of Magdeburg, Magdeburg, 2009), Vol. 1, pp. 265–274.

31. F. Lekien and S. D. Ross, "The Computation of Finite-Time Lyapunov Exponents on Unstructured Meshes and for Non-Euclidean Manifolds," Chaos **20** (2010). doi 10.1063/1.3278516

32. M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion* (Parabolic Press, Stanford, 1982; Mir, Moscow, 1986).