УДК 517.958 doi 10.26089/NumMet.v19r429

О НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВКАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА И О МЕТОДАХ ИХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Н. Л. Гольдман[1]

Исследованы две постановки в классах Гельдера нелинейных задач для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени. Одна постановка представляет собой систему, состоящую из краевой задачи с граничными условиями первого рода и из уравнения, задающего закон изменения по времени искомого коэффициента. В другой постановке требуется, кроме того, определить и граничную функцию в одном из краевых условий по дополнительной информации об этом коэффициенте, заданной в конечный момент времени. Для этих постановок обосновано построение приближенных решений на основе метода Ротэ и метода квазирешений.

Ключевые слова: параболическое уравнение, первая краевая задача, классы Гельдера, метод Ротэ, обратная задача, финальное наблюдение, оценки устойчивости, квазирешение.

1. Введение. Данная работа продолжает исследование нелинейных задач с неизвестным коэффициентом при производной по времени в параболическом уравнении, начатое в [1]. Это исследование связано с математическим моделированием физико-химических процессов, в которых происходят изменения внутренних характеристик материалов. Основное внимание в статье уделено постановкам таких задач в классах Гельдера в случае граничных условий первого рода.

Одна из рассмотренных постановок является нелинейной системой, которая включает в себя краевую задачу первого рода, а также уравнение, описывающее изменение по времени искомого коэффициента. Сложность такой системы и ее существенное отличие от обычных постановок краевых задач в классах Гельдера вызывают значительные трудности при доказательстве условий существования и единственности ее решения. Исследование этих условий проведено с использованием метода Ротэ и априорных оценок в сеточно-непрерывных классах Гельдера. Наличие таких оценок позволяет установить сходимость решений нелинейной дифференциально-разностной системы, аппроксимирующей исходную систему, к ее гладкому решению и оценить погрешность метода Ротэ.

Кроме этой постановки, в работе исследована нелинейная параболическая задача, которая является обратной по отношению к первой постановке. Она состоит в определении граничной функции на одной из границ области по заданному финальному условию для искомого коэффициента. Существенное отличие такой постановки от обычных постановок некорректных граничных обратных задач для параболических уравнений с финальным наблюдением заключается в необходимости отыскания кроме граничной функции еще и коэффициента уравнения при производной по времени, который является решением нелинейной системы.

Исследование этой обратной задачи сводится в статье к изучению ее операторного представления в функциональных пространствах, выбор которых проведен с учетом точных дифференциальных зависимостей, установленных с помощью метода Ротэ для соответствующей прямой постановки. Решение этого операторного уравнения эквивалентно задаче минимизации функционала невязки на выбранном множестве граничных функций. Установленные свойства непрерывности этого функционала невязки позволяют применить для регуляризации некорректной задачи минимизации метод построения квазирешений на множестве граничных функций, компактном в соответствующем классе Гельдера. Получены оценки устойчивости для приближенных решений исследуемой обратной задачи.

Используемые в статье функциональные пространства определяются стандартным образом, как и в [2]. В частности, следуя [2], класс Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ $(0<\lambda<1)$ определяется как пространство функций $u(x,t)$, непрерывных в замкнутой области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ вместе со своими производными u_{xx}, u_t, которые удовлетворяют условию Гельдера по x и t с показателями λ и $\lambda/2$ соответственно.

Для удобства изложения будет использовано также обозначение:

---

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: goldman@srcc.msu.ru

$H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ — пространство функций, непрерывных при $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ производные по x и u и удовлетворяющих условию Гельдера по t с показателем $\lambda/2$.

Кроме того, в связи с применением метода Ротэ используются аналоги классов Гельдера для сеточных функций $\widehat{u} = (u_0, \dots, u_n, \dots, u_N)$, заданных в узлах t_n сетки $\overline{\omega}_\tau \in [0,T]$ с шагом $\tau = TN^{-1}$, и также для сеточно-непрерывных функций $\widehat{u}(x) = \big(u_0(x), \dots, u_n(x), \dots, u_N(x)\big)$, заданных в области $\overline{Q}_\tau = \{0 \leqslant x \leqslant l, t_n \in \overline{\omega}_\tau\}$.

Как и в [3, 4], эти аналоги определяются следующим образом.

$H_\tau^{1+\lambda/2}(\overline{\omega}_\tau)$ — аналог пространства $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ (см. [2]) для функций $\widehat{u}$, имеющих конечную норму

$$\big|\widehat{u}\big|_{\overline{\omega}_\tau}^{1+\lambda/2} = \max_{0\leqslant n\leqslant N} |u_n| + \max_{1\leqslant n\leqslant N} |u_{n\bar{t}}| + \big\langle \widehat{u}_{\bar{t}} \big\rangle_{\overline{\omega}_\tau}^{\lambda/2},$$
$$u_{n\bar{t}} = (u_n - u_{n-1})\tau^{-1}, \quad n = \overline{1,N}, \quad \big\langle \widehat{u}_{\bar{t}} \big\rangle_{\overline{\omega}_\tau}^{\lambda/2} = \max_{1\leqslant n<n'\leqslant N} \big\{ |u_{n\bar{t}} - u_{n'\bar{t}}|\, |t_n - t_{n'}|^{-\lambda/2} \big\}.$$

$H_\tau^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — аналог пространства $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$ (см. [2]) для функций $\widehat{u}(x)$, непрерывных по x при $(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\big|\widehat{u}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} = \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|u_n(x)\big| + \big\langle \widehat{u}(x) \big\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda} + \big\langle \widehat{u}(x) \big\rangle_{t,\overline{Q}_\tau}^{\lambda/2},$$
$$\big\langle \widehat{u}(x) \big\rangle_{x,\overline{Q}_\tau}^{\lambda} = \sup_{(x,t_n),(x',t_n)\in\overline{Q}_\tau} \Big\{ \big|u_n(x) - u_n(x')\big|\, |x - x'|^{-\lambda} \Big\},$$
$$\big\langle \widehat{u}(x) \big\rangle_{t,\overline{Q}_\tau}^{\lambda/2} = \sup_{(x,t_n),(x,t'_n)\in\overline{Q}_\tau} \Big\{ \big|u_n(x) - u_{n'}(x)\big|\, \big|t_n - t_{n'}\big|^{-\lambda/2} \Big\}.$$

$H_\tau^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{Q}_\tau)$ — аналог пространства $H^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{Q})$ (см. [2]) для функций $\widehat{u}(x)$, непрерывных по x вместе со своими производными по x при $(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\big|\widehat{u}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2} = \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|u_n(x)\big| + \big|\widehat{u}_x(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} + \big\langle \widehat{u}(x) \big\rangle_{t,\overline{Q}_\tau}^{(1+\lambda)/2}.$$

$H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ — аналог пространства $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ для функций $\widehat{u}(x)$, непрерывных по x вместе со своими производными $\widehat{u}_{xx}(x)$ и $\widehat{u}_{\bar{t}}(x)$ при $(x,t_n) \in \overline{Q}_\tau$ и обладающих конечной нормой

$$\big|\widehat{u}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{2+\lambda,1+\lambda/2} = \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|u_n(x)\big| + \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|u_{nx}(x)\big| + \big|\widehat{u}_{xx}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2} + \big|\widehat{u}_{\bar{t}}(x)\big|_{\overline{Q}_\tau}^{\lambda,\lambda/2},$$
$$\widehat{u}_{xx}(x) = \big(u_{0xx}(x), \dots, u_{nxx}(x), \dots, u_{Nxx}(x)\big), \quad \widehat{u}_{\bar{t}}(x) = \big(u_{1\bar{t}}(x), \dots, u_{n\bar{t}}(x), \dots, u_{N\bar{t}}(x)\big),$$
$$u_{n\bar{t}}(x) = \big(u_n(x) - u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, \quad n = \overline{1,N}.$$

2. Постановка нелинейной задачи для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени. В области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ требуется найти решение $\big\{u(x,t), \rho(x,t)\big\}$ системы, задаваемой условиями

$$c(x,t,u)\rho(x,t)u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$
$$u(x,t)\big|_{x=0} = w(t), \quad u(x,t)\big|_{x=l} = v(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$
$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$
$$\rho_t(x,t) = \gamma(x,t,u), \quad (x,t) \in Q, \quad \rho(x,t)\big|_{t=0} = \rho^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

в которых равномерно эллиптический оператор Lu имеет вид

$$Lu \equiv \big(a(x,t,u)u_x\big)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)u,$$

a, b, c, d, f, а также w, v, φ, γ и ρ^0 — известные функции своих аргументов, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $\rho^0 \geqslant \rho^0_{\min} > 0$, $a_{\min}$, $c_{\min}$, $\rho^0_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

В зависимости от функции $\gamma(x,t,u)$, знакопостоянной при $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ (где $M_0 \geqslant \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|$, M_0 — постоянная из принципа максимума для краевой задачи (1)–(3)), требование параболичности уравнения (1) приводит к ограничениям на искомое решение

$$0 < \rho^0_{\min} < \rho(x,t) \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l} \rho^0(x) + T \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} \gamma(x,t,u) \quad \text{при} \quad \gamma(x,t,u) > 0, \tag{5}$$

$$0 < \rho^0_{\min} - T \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} |\gamma(x,t,u)| \leqslant \rho(x,t) \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l} \rho^0(x) \quad \text{при } \gamma(x,t,u) \leqslant 0. \tag{6}$$

Если $\gamma(x,t,u) \leqslant 0$ в области $\overline{D}$, то условие (6) накладывает ограничение на отрезок времени $[0,T]$, на котором ищется решение системы (1)–(4): $0 < T < \rho^0_{\min}\left(\max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}} \big|\gamma(x,t,u)\big|\right)^{-1}$.

Условия однозначной разрешимости задачи (1)–(4) в классе гладких функций устанавливает теорема 1.

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) *при* $(x,t) \in \overline{Q}$ *и любых* u, $|u| < \infty$, *все входные данные в соотношениях* (1)–(3) *являются ограниченными функциями в областях своего определения, причем коэффициент* $a(x,t,u)$ *ограничен вместе со своими производными по* x *и* u, *выполнены условия* $0 < a_{\min} \leqslant a \leqslant a_{\max}$, $0 < c_{\min} \leqslant c \leqslant c_{\max}$;

2) *при* $(x,t,u) \in \overline{D} = Q\times [-M_0, M_0]$ ($M_0 > 0$ *— постоянная из оценки принципа максимума) функции* $a(x,t,u)$, $a_x(x,t,u)$, $a_u(x,t,u)$, $b(x,t,u)$ *и* $d(x,t,u)$ *непрерывны в смысле Гельдера по* x *и* t *с показателями* λ, $\lambda/2$ *и имеют ограниченные производные по* u; *кроме того, функции* $c(x,t,u)$ *и* $f(x,t)$ *принадлежат, соответственно,* $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ *и* $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$;

3) *функции* $w(t)$ *и* $v(t)$ *принадлежат* $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, *функции* $\varphi(x)$ *и* $\rho^0(x)$ *принадлежат, соответственно,* $H^{2+\lambda}[0,l]$ *и* $C^1[0,l]$, $0 < \rho^0_{\min} \leqslant \rho^0(x) \leqslant \rho^0_{\max}$, $\rho^0_{\min}, \rho^0_{\max} = \text{const} > 0$; *выполнены условия согласования*

$$c(x,0,\varphi)\rho^0(x)w_t - L\varphi\big|_{x=0,t=0} = f(x,0)\big|_{x=0}, \quad c(x,0,\varphi)\rho^0(x)v_t - L\varphi\big|_{x=l,t=0} = f(x,0)\big|_{x=l};$$

4) *функция* $\gamma(x,t,u)$ *в условии* (4) *знакопостоянна при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *и принадлежит* $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$.

Тогда нелинейная система (1)–(4) *имеет единственное решение* $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$, *обладающее свойствами*

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad \big|u(x,t)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}} \leqslant M, \quad M = \text{const} > 0,$$
$$\rho(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_t(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$$

и удовлетворяющее ограничениям (5), (6) *в зависимости от знака функции* $\gamma(x,t,u)$.

Доказательство. Воспользуемся методом прямых Ротэ, разбивая область $\overline{Q}$ на слои прямыми $t = t_n$ (t_n — узлы равномерной сетки $\overline{\omega}_\tau \in [0,T]$ с шагом $\tau = TN^{-1}$) и заменяя систему (1)–(4) дифференциально-разностной системой определения $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ — приближенных значений функций $u(x,t)$ и $\rho(x,t)$ в области $\overline{Q}_\tau = \{0 \leqslant x \leqslant l, t_n \in \overline{\omega}_\tau\}$:

$$c_n\rho_n u_{n\bar{t}} - (a_n u_{nx})_x + b_n u_{nx} + d_n u_n = f_n, \quad (x,t_n) \in Q_\tau = \{0 < x < l\}\times\omega_\tau, \tag{7}$$
$$u_n\big|_{x=0} = w_n, \quad u_n\big|_{x=l} = v_n, \quad 0 < t_n \leqslant T, \tag{8}$$
$$u_0(x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{9}$$
$$\rho_{n\bar{t}} = \gamma_{n-1}, \quad (x,t_n) \in Q_\tau, \quad \rho_n\big|_{n=0} = \rho^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{10}$$

где a_n, b_n, c_n, d_n — значения соответствующих коэффициентов в точке (x,t_n,u_n),

$$f_n = f(x,t_n), \quad w_n = w(t_n), \quad v_n = v(t_n), \quad \gamma_{n-1} = \gamma(x,t_{n-1},u_{n-1}),$$
$$u_{n\bar{t}} = \big(u_n(x) - u_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}, \quad u_{nx} = du_n(x)/dx, \quad \rho_{n\bar{t}} = \big(\rho_n(x) - \rho_{n-1}(x)\big)\tau^{-1}.$$

Доказательство разрешимости исходной задачи (1)–(4) методом Ротэ включает в себя несколько основных этапов.

Этап 1. Исследование дифференциально-разностной краевой задачи (7)–(9) в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ в предположении, что $\rho_n(x)$ — известная функция. Получение соответствующих априорных оценок для $u_n(x)$, не зависящих от x, τ, n.

Этап 2. Доказательство существования и единственности решения $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ всей дифференциально-разностной системы (7)–(10) на основе результатов этапа 1.

Этап 3. Предельный переход при $n \to \infty$ в условиях (7)–(10) на основе полученных априорных оценок компактности семейств $\big\{u_n(x), \rho_n(x)\big\}$. Завершение доказательства разрешимости нелинейной системы (1)–(4) в классе гладких функций. Оценка погрешности метода Ротэ.

Переходя к этим этапам, будем более подробно останавливаться лишь на тех моментах, которые связаны со спецификой данной задачи (1)–(4). При рассмотрении же моментов, которые являются общими для метода прямых при исследовании нелинейных параболических задач, ограничимся ссылками на известные результаты.

Следующая лемма устанавливает однозначную разрешимость в $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$ дифференциально-разностной краевой задачи (7)–(9) в предположении, что коэффициент $\rho_n(x)$ в уравнении (7) — известная функция, ограниченная в области $\overline{Q}_\tau$, имеющая непрерывную производную $\rho_{nx}(x)$ и удовлетворяющая условию Гельдера по t с показателем $\lambda/2$ при $(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau$, $0<\rho_{\min}\leqslant\rho_n(x)\leqslant\rho_{\max}$, $\rho_{\min}$, $\rho_{\max}=\mathrm{const}>0$.

Лемма 1. *При выполнении входными данными условий* 1)–3) *теоремы* 1 *дифференциально-разностная краевая задача* (7)–(9) *с коэффициентом* $\rho_n(x)$*, обладающим указанными свойствами, имеет единственное решение* $u_n(x)$ *в области* $\overline{Q}_\tau$ *при любом достаточно малом* τ *и для него справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_n(x)\big|\leqslant M_0,\qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|u_{nx}(x)\big|\leqslant M_1,\\ \big|\widehat{u}(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}\leqslant M_2,\quad \big|\widehat{u}_x(x)\big|^{\lambda,\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}\leqslant M_3,\quad \big|\widehat{u}(x)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{\overline{Q}_\tau}\leqslant M_4,\end{gathered}\tag{11}$$

в которых $M_i>0$ $(i=\overline{0,4})$ *— постоянные, не зависящие от* x, τ, n.

Утверждение леммы 1 основано на теореме 4.3.3 [3, 4] о существовании и единственности решения дифференциально-разностной краевой задачи с граничными условиями первого рода в сеточно-непрерывном классе Гельдера $H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau)$. Применительно к рассматриваемой задаче (7)–(9) постоянная M_0 из оценки принципа максимума имеет вид

$$\begin{gathered}M_0=\big\{c^{-1}_{\min}\rho^{-1}_{\min}f_{\max}T+\max(w_{\max},v_{\max},\varphi_{\max})\big\}\exp(K_1T),\\ K_1\geqslant(1+\varepsilon)d_{\max}c^{-1}_{\min}\rho^{-1}_{\min},\quad \varepsilon>0 \text{ — любое},\quad \tau\leqslant\tau_0=\varepsilon K_1^{-1}.\end{gathered}\tag{12}$$

При решении системы (7)–(10) сеточно-непрерывные функции $\rho_n(x)$ заранее не известны и ищутся совместно с $u_n(x)$, что требует дополнительных рассуждений при доказательстве существования решения $\big\{u_n(x),\rho_n(x)\big\}$. Имеет место

Лемма 2. *Пусть входные данные системы* (1)–(4) *удовлетворяют требованиям теоремы* 1. *Тогда в области* $\overline{Q}_\tau$ *при любом* $\tau\leqslant\tau_0$ $(\tau_0>0$ *— постоянная из оценки* (12)) *дифференциально-разностная система* (7)–(10) *имеет единственное решение* $\{u_n(x),\rho_n(x)\}$*, обладающее свойствами*

$$\begin{gathered}u_n(x)\in H_\tau^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_\tau),\quad \big|\widehat{u}(x)\big|^{2+\lambda,1+\lambda/2}_{Q_\tau}\leqslant M_4,\\ 0<\rho^0_{\min}<\rho_n(x)\leqslant\rho_{\max},\quad \rho_{\max}=\rho^0_{\max}+T\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\gamma(x,t,u)\quad \textit{при}\quad \gamma(x,t,u)>0,\\ 0<\rho^0_{\min}-T\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma(x,t,u)\big|\leqslant\rho_n(x)\leqslant\rho^0_{\max}\quad \textit{при}\quad \gamma(x,t,u)\leqslant 0,\end{gathered}\tag{13}$$

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\rho_{nx}(x)\big|+\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\rho_{n\bar t}(x)\big|+\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau}\big|\rho_{nx\bar t}(x)\big|+\big\langle\widehat{\rho}_{\bar t}(x)\big\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau}\leqslant M_5,\tag{14}$$

где $M_5>0$ *— постоянная, не зависящая от* x, τ, n *и определяемая, в частности, величинами* $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}\big|\rho^0_x(x)\big|$, $\max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_x(x,t,u)\big|$, $\max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big|$, *а также величинами* M_1 *и* M_2.

Доказательство леммы 2. Исходя из начального момента времени $t_0=0$, предположим, что вплоть до момента $t=t_{n-1}$ решения $\big\{u_j(x),\rho_j(x)\big\}$ $(j=\overline{1,n-1})$ уже найдены и соответствующие оценки для них уже установлены. Требования теоремы 1 относительно функций $\gamma(x,t,u)$ и $\rho^0(x)$ позволяют заключить из соотношения (10), что при $0\leqslant x\leqslant l$, $t=t_n$

$$\begin{gathered}\big|\rho_{n\bar t}(x)\big|\leqslant\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma(x,t,u)\big|,\quad \big|\rho_{nx\bar t}(x)\big|\leqslant\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_x(x,t,u)\big|+\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\big|\gamma_u(x,t,u)\big|\,u_{n-1x}(x),\\ \big\langle\widehat{\rho}_{\bar t}(x)\big\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau}\leqslant\big\langle\widehat{\gamma}(x,t_{n-1},u_{n-1})\big\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{D}_\tau}+\max_{(x,t,u)\in\overline{D}_\tau}\big|\gamma_u(x,t_{n-1},u_{n-1})\big|\,\big\langle\widehat{u}_{n-1}(x)\big\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau}.\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\left|\rho_{nx\overline{t}}(x)\right| &\leqslant \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_x(x,t,u)\right| + \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_u(x,t,u)\right| M_1,\\ \left\langle\widehat{\rho_{\overline{t}}}(x)\right\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau} &\leqslant \langle\gamma\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{D}} + \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_u(x,t,u)\right| M_2.\end{aligned}$$

Кроме того, из (10) следует, что

$$\rho_n(x) = \rho_{n-1}(x) + \tau\gamma(x,t_{n-1},u_{n-1}) = \rho^0(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\tau\gamma(x,t_j,u_j), \tag{15}$$

т.е. в зависимости от знака функции $\gamma(x,t,u)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}0 < \rho^0_{\min} < \rho_n(x) \leqslant \rho^0_{\max} + t_{n-1}\gamma_{\max} \quad &\text{при} \quad \gamma(x,t,u) > 0, \quad (x,t,u)\in\overline{D},\\ 0 < \rho^0_{\min} - t_{n-1}\gamma_{\max} \leqslant \rho_n(x) \leqslant \rho^0_{\max} \quad &\text{при} \quad \gamma(x,t,u) \leqslant 0, \quad (x,t,u)\in\overline{D},\end{aligned}$$

где $\gamma_{\max} = \max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma(x,t,u)\right|$. Отсюда очевидным образом устанавливаются искомые оценки (13) для $\rho_n(x)$. Заметим далее, что в силу (15) имеет место представление

$$\rho_{nx}(x) = \rho^0_x(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\tau\left\{\gamma_x(x,t_j,u_j) + \gamma_u(x,t_j,u_j)\,u_{jx}(x)\right\},$$

из которого следует оценка

$$\left|\rho_{nx}(x)\right| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l}\left|\rho^0_x(x)\right| + t_{n-1}\left\{\max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_x(x,t,u)\right| + \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_u(x,t,u)\right| M_1\right\}.$$

Таким образом, при $t = t_n$ получены оценки для $\left|\rho_{nx}(x)\right|$, $\left|\rho_{n\overline{t}}(x)\right|$, $\left|\rho_{nx\overline{t}}(x)\right|$ и $\left\langle\widehat{\rho_{\overline{t}}}(x)\right\rangle^{\lambda/2}_{t,\overline{Q}_\tau}$.

Это вместе с предположением, что соответствующие оценки в предыдущие моменты времени уже установлены, позволяет доказать оценку (14).

Следовательно, сеточно-непрерывная функция $\rho_n(x)$, найденная из условия (10) по известным $\rho_{n-1}(x)$ и $u_{n-1}(x)$, удовлетворяет требованиям, при которых в силу леммы 1 дифференциально-разностная краевая задача (7)–(9) имеет единственное решение $u_n(x)$ в классе $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}_\tau(\overline{Q}_\tau)$ и для него справедливы оценки (11). Лемма 2 доказана.

Равномерные оценки (11), (13) и (14) означают компактность семейства $\left\{u_n(x),\rho_n(x)\right\}$ в соответствующих пространствах. Это позволяет, проводя обычные рассуждения при совершении предельного перехода при $\tau_j\to 0$ (т.е. при $n_j\to\infty$) в условиях (7)–(10), установить существование решения $\left\{u(x,t),\rho(x,t)\right\}$ исходной задачи (1)–(4), такого, что $u(x,t)\in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$, $\rho(x,t)\in C(\overline{Q})$, $\rho_t(x,t)\in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$. Кроме того, оценки (13) позволяют установить, что $\rho(x,t)$ удовлетворяет неравенствам (5) и (6) в зависимости от знака функции $\gamma(x,t,u)$. Наконец, требования гладкости функций $\gamma(x,t,u)$ и $\rho^0(x)$ в условии (4) позволяют доказать, что решение $\rho(x,t)$ обладает непрерывной в $\overline{Q}$ производной $\rho_x(x,t)$. Действительно, из (4) следует, что при $0\leqslant t\leqslant T$

$$\begin{aligned}\rho(x,t) &= \int_0^t \gamma\big(x,\tau,u(x,\tau)\big)\,d\tau + \rho^0(x),\\ \rho_x(x,t) &= \int_0^t \Big\{\gamma_x\big(x,\tau,u(x,\tau)\big) + \gamma_u\big(x,\tau,u(x,\tau)\big)u_x(x,\tau)\Big\}\,d\tau + \rho^0_x(x).\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, непрерывность $\rho_x(x,t)$ в $\overline{Q}$ является следствием непрерывности $u_x(x,t)$ в $\overline{Q}$ и принадлежности функций $\gamma(x,t,u)$ и $\rho^0(x)$ классам $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$ и $C^1[0,l]$, соответственно.

Тем самым доказательство разрешимости нелинейной задачи (1)–(4) завершено. Покажем теперь, что решение $\left\{u(x,t),\rho(x,t)\right\}$ единственно в классе гладких функций, таких, что

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}|u,u_x,u_{xx},u_t| < \infty, \qquad \sup_{(x,t)\in\overline{Q}}|\rho,\rho_x,\rho_t| < \infty.$$

Предположим, что при $t \in [0, t^0]$, $0 \leqslant t^0 < T$, единственность решения $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ уже доказана. Докажем, что тогда единственность имеет место и для $t \in [t^0, t^0 + \Delta t]$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина, что позволяет за конечное число шагов исчерпать весь отрезок $[0, T]$. Допустим противное, т.е. что при $t \in [t^0, t^0 + \Delta t]$ существуют два решения системы (1)–(4) $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ и $\{\overline{u}(x,t), \overline{\rho}(x,t)\}$. Выражения для $\rho(x,t)$ и $\overline{\rho}(x,t)$ при $t \in [t^0, t^0 + \Delta t]$ имеют вид (см. (16))

$$\rho(x,t) = \int\limits_{t^0}^{t} \gamma\big(x, \tau, u(x,\tau)\big)\, d\tau + \rho\big(x, t^0\big), \quad \overline{\rho}(x,t) = \int\limits_{t^0}^{t} \gamma\big(x, \tau, \overline{u}(x,\tau)\big)\, d\tau + \overline{\rho}\big(x, t^0\big).$$

Так как по предположению $\rho\big(x, t^0\big) = \overline{\rho}\big(x, t^0\big)$, то для разностей

$$\eta(x,t) = u(x,t) - \overline{u}(x,t), \quad \zeta(x,t) = \rho(x,t) - \overline{\rho}(x,t)$$

в области $\overline{Q}_{t^0} = \{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\}$ следует оценка

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big| \leqslant \Delta t \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} \big|\gamma_u(x,t,u)\big| \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big|. \tag{17}$$

Кроме того, для $\eta(x,t)$ и $\zeta(x,t)$ в силу (1)–(3) имеют место соотношения

$$c(x,t,u)\rho(x,t)\eta_t - \big(a(x,t,u)\eta_x\big)_x + \mathcal{A}_0\eta_x + \mathcal{A}_1\eta = c\big(x,t,\overline{u}\big)\overline{u}_t\zeta(x,t), \quad (x,t) \in Q_{t^0},$$
$$\eta\big|_{x=0} = 0, \quad \eta\big|_{x=l} = 0, \quad t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t, \quad \eta\big(x, t^0\big) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

в которых коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ зависят соответствующим образом от производных a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u и d_u в точке $\big(x, t, \sigma u + (1-\sigma)\overline{u}\big)$ $(0 < \sigma < 1)$, а также от $\rho(x,t)$, $u(x,t)$ и производных $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ и $u_t(x,t)$.

Все входные данные этой линейной краевой задачи равномерно ограничены в области $\overline{Q}_{t^0}$ как функции (x,t). Это позволяет применить принцип максимума и получить оценку

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big| \leqslant K_2 \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big|, \quad K_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда и из (17) следует, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big| \leqslant \Delta t\, K_2 \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} \big|\gamma_u(x,t,u)\big| \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big|.$$

Выбирая затем величину $\Delta t > 0$ из условия $\Delta t\, K_2 \max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}} \big|\gamma_u(x,t,u)\big| \leqslant 1 - \mu$, $0 < \mu < 1$, приходим к соотношению

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big| \leqslant (1-\mu) \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big|,$$

т.е. $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\eta(x,t)\big| = 0$. Но это означает в силу (17), что и $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \big|\zeta(x,t)\big| = 0$. Таким образом, предположение о неединственности решения нелинейной задачи (1)–(4) при $t \in [t^0, t^0 + \Delta t]$ приводит к противоречию.

Повторяя подобные рассуждения для отрезков $t \in [t^1, t^2]$ $(t^1 = t^0 + \Delta t,\ t^2 = t^1 + \Delta t)$, $t \in [t^2, t^3]$ и т.д., вплоть до конечного момента времени T, установим единственность решения $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ на всем отрезке $[0, T]$. Теорема 1 доказана.

Чтобы завершить обоснование постановки задачи (1)–(4) в классе гладких функций, получим оценку погрешности метода прямых Ротэ как способа приближенного решения этой нелинейной задачи. Рассмотрим разности

$$\omega_n(x) = u_n(x) - u(x, t_n), \quad \xi_n(x) = \rho_n(x) - \rho(x, t_n),$$

где $\{u(x,t_n), \rho(x,t_n)\}$ — решение исходной системы (1)–(4) в момент времени $t = t_n$, $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ — решение ее дифференциально-разностного аналога (7)–(10). Имеет место

Теорема 2. *Пусть входные данные удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда для погрешности метода прямых Ротэ при любом достаточно малом шаге сетки τ справедлива оценка*

$$\max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|\omega_n(x)\big| \leqslant K_3(\Psi + \psi), \qquad \max_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \big|\xi_n(x)\big| \leqslant K_4(\Psi + \psi), \tag{18}$$

где $\Psi = \max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \Psi_n(x)$, $\psi = \max\limits_{(x,t_n)\in\overline{Q}_\tau} \psi_n(x)$, $\Psi_n(x)$ *— погрешность аппроксимации дифференциально-разностной краевой задачи* (7)–(9), $\psi_n(x)$ *— погрешность аппроксимации уравнения* (10), $K_3 > 0$ *и* $K_4 > 0$ *— постоянные, не зависящие от* x, t, τ, n.

Доказательство теоремы 2 опускаем, так как оно повторяет с соответствующими модификациями доказательство единственности, приведенное выше. Отметим только, что оценки (18) устанавливаются последовательно для конечных отрезков времени $[0, t_{n_0}]$, $[t_{n_0}, t_{n_1}]$, $[t_{n_1}, t_{n_2}]$ и т.д., вплоть до момента $t_N = T$. Наличие таких оценок позволяет рассматривать изложенную схему метода Ротэ как конструктивный способ приближенного решения нелинейной задачи (1)–(4) с неизвестным коэффициентом при производной по времени. Решение этой задачи можно получить как предел решения $\{u_n(x), \rho_n(x)\}$ дифференциально-разностной системы (7)–(10) при стремлении шага сетки τ к нулю по некоторой подпоследовательности шагов τ_j.

3. Определение граничной функции для задачи (1)–(4) с заданным финальным условием для коэффициента $\rho(x,t)$**.**

3.1. Если в условиях (1)–(4) граничный режим $v(t)$ при $x = l$ неизвестен, но задана дополнительная информация о коэффициенте $\rho(x,t)$ в конечный момент времени

$$\rho(x,T) = g(x), \quad g(x) > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{19}$$

то возникает задача, которая является обратной по отношению к постановке (1)–(4). Требуется найти функции $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ в области $\overline{Q}$ и граничную функцию $v(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие соотношениям (1)–(4) и финальному условию (19), в котором $g(x) > 0$ — известная функция.

Как установлено в теореме 1, при выполнении ее требований нелинейная задача (1)–(4) имеет единственное решение $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ в соответствующих классах гладкости при любой граничной функции $v(t)$, принадлежащей $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ и удовлетворяющей условию согласования при $t = 0$:

$$c(x,0,\varphi)\rho^0(x)v_t - L\varphi\big|_{x=l,t=0} = f(x,0)\big|_{x=l}. \tag{20}$$

Исходя из этого, под решением рассматриваемой обратной задачи понимается совокупность функций $\{u(x,t), \rho(x,t), v(t)\}$, принадлежащих классам

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad \rho(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_x(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \rho_t(x,t) \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad v(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]$$

и удовлетворяющих соотношениям (1)–(4), (19) и (20) в обычном смысле.

Существенное отличие данной постановки от обычных постановок граничных обратных задач для параболических уравнений с финальным условием состоит в необходимости отыскания кроме граничной функции еще и коэффициента уравнения при производной по времени в системе (1)–(4). Исследование осложняется также некорректностью обратных задач, что требует применения регуляризирующих методов. Однако в случае рассматриваемой обратной задачи возникает необходимость обоснования таких методов, так как область применения некоторых из них включает только линейный случай.

3.2. Одним из эффективных способов устойчивого приближенного решения некорректных задач является вариационный метод квазирешений [5]. Изложим основные принципы его применения для построения устойчивых приближений в классах гладких функций для обратной задачи (1)–(4), (19).

Представим эту обратную задачу в виде операторного уравнения

$$Av = g, \quad v \in V \subset L_2[0,T], \quad g \in G \subset L_2[0,l], \tag{21}$$

где $A : V \to G$ — нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $v \in V$ решение системы (1)–(4) $\rho(x,t)\big|_{t=T}$ в конечный момент времени $t = T$. Точным решением операторного уравнения (21) является такой элемент $v^0 \in V$, для которого $\rho(x,t)\big|_{t=T}$ совпадает с заданным элементом $g \in G$.

Возможность определения оператора A для любого $v \in V$ и принадлежность $AV \subset G$ обеспечиваются соответствующим выбором множеств V и G на основе теоремы 1:

$$\begin{aligned} &V = \left\{v(t) \in W_2^2[0,T], \quad c(x,0,\varphi)\rho^0(x)v_t - L\varphi\big|_{x=l,t=0} = f(x,0)\big|_{x=l}\right\}, \quad V \subset H^{1+\lambda/2}[0,T], \\ &G = \left\{w(x) \in C^1[0,l], w(x) > 0, x \in \ [0,l]\right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Вариационный подход к постановке обратной задачи (1)–(4), (19) основан на том, что решение операторного уравнения (21) эквивалентно минимизации в V функционала:

$$\inf_{v\in V} J_g(v), \quad J_g(v) = \|Av - g\|_{L_2[0,l]}.$$

Для регуляризации этой некорректной вариационной задачи воспользуемся методом квазирешений на системе расширяющихся компактных в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0<\lambda<1)$ множеств V_R, где

$$V_R = \{v \in V,\ \|v\|_{W_2^2[0,T]} \leqslant R\}, \quad R = \text{const} > 0.$$

Квазирешением уравнения (21) на компакте V_R назовем множество

$$V_R^* = \left\{ v_R \in V_R,\ J_g(v_R) = \inf_{v \in V_R} J_g(v) \right\}. \tag{23}$$

При любом фиксированном $R>0$ задача минимизации функционала $J_g(v)$ на V_R поставлена корректно, а именно множество V_R^* не пусто и для любой минимизирующей последовательности $\{v^n\} \subset V_R$ имеет место соотношение

$$\inf_{v_R \in V_R^*} \left| v^n - v_R \right|_{[0,T]}^{1+\lambda/2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Справедливость этого утверждения следует из теоремы Вейерштрасса в силу компактности в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0<\lambda<1)$ множества V_R [6] и следующего свойства функционала $J_g(v)$.

Теорема 3. *При выполнении входными данными требований теоремы 1 функционал $J_g(v)$ является непрерывным в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0<\lambda<1)$ на множестве V_R и слабо непрерывным в $W_2^2[0,T]$ на множествах V_R и V.*

Доказательство. Пусть $\{v^n(t)\} \subset V_R$ — произвольная последовательность, сходящаяся в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ к некоторой функции $v(t) \in V_R$:

$$\left| v^n - v \right|_{[0,T]}^{1+\lambda/2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Введем обозначения

$$\Delta v(t) = v^n(t) - v(t), \quad \Delta u(x,t) = u^n(x,t) - u(x,t), \quad \Delta\rho(x,t) = \rho^n(x,t) - \rho(x,t),$$

где $\{u^n(x,t), \rho^n(x,t)\}$ и $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$ — решения нелинейной задачи (1)–(4), соответствующие граничным функциям $v^n(t)$ и $v(t)$. Очевидно, что

$$\left| J_g(v^n) - J_g(v) \right| = \left| \left\|\rho^n(x,T) - g(x)\right\|_{L_2[0,l]} - \left\|\rho(x,T) - g(x)\right\|_{L_2[0,l]} \right| \leqslant \left\|\Delta\rho(x,T)\right\|_{L_2[0,l]}. \tag{25}$$

Покажем, что в области $\overline{Q}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} &\max_{(x,t)\in\overline{Q}} \left|\Delta u(x,t)\right| \leqslant K_5 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left|\Delta v(t)\right|, \quad K_5 = \text{const} > 0, \\ &\max\nolimits_{(x,t)\in\overline{Q}} \left|\Delta\rho(x,t)\right| \leqslant K_6 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left|\Delta v(t)\right|, \quad K_6 = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Предположим, что при $t \in [0,t^0]$, $0 \leqslant t^0 < T$, эти оценки уже установлены, т.е.

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0} \left|\Delta u(x,t)\right| \leqslant K_5 \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} \left|\Delta v(t)\right|, \quad \max_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0} \left|\Delta\rho(x,t)\right| \leqslant K_6 \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} \left|\Delta v(t)\right|. \tag{27}$$

Докажем, что аналогичные оценки имеют место и при $t \in [t^0, t^0+\Delta t]$, где $\Delta t > 0$ — достаточно малая, но фиксированная величина. В области $\overline{Q}_{t^0} = \{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + \Delta t\}$ для $\Delta u(x,t)$ и $\Delta\rho(x,t)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &c(x,t,u)\rho(x,t)\Delta u_t - \big(a(x,t,u)\Delta u_x\big)_x + \mathcal{B}_0 \Delta u_x + \mathcal{B}_1 \Delta u = c\big(x,t,u^n\big)u_t^n \Delta\rho(x,t), \quad (x,t) \in Q_{t^0}, \\ &\Delta u\big|_{x=0} = 0, \quad \Delta u\big|_{x=l} = \Delta v(t), \quad t^0 < t \leqslant t^0 + \Delta t, \\ &\Delta\rho(x,t) = \int_{t^0}^{t} \gamma_u(x,\tau,u)\Delta u(x,\tau)\,d\tau + \Delta\rho\big(x,t^0\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{aligned} \tag{28}$$

в которых коэффициенты $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$ равномерно ограничены в области $\overline{Q}_{t^0}$ как функции (x,t) в силу справедливости оценок теоремы 1 для $\{u^n(x,t), \rho^n(x,t)\}$ и $\{u(x,t), \rho(x,t)\}$. На основании оценки принципа максимума (12) заключаем, что при $K_7, K_8 = \text{const} > 0$

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\Delta u(x,t)\right| \leqslant K_7 \Delta t \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\Delta\rho(x,t)\right| + K_8 \max\left(\max_{0\leqslant t\leqslant t^0} \left|\Delta v(t)\right|, \max_{0\leqslant x\leqslant l} \left|\Delta u\big(x,t^0\big)\right| \right). \tag{29}$$

Кроме того, из (28) следует, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\Delta\rho(x,t)\right| \leqslant \max_{(x,t,u)\in\overline{D}} \left|\gamma_u(x,t,u)\right| \Delta t \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\Delta u(x,t)\right| + \max_{0\leqslant x\leqslant l} \left|\Delta\rho\bigl(x,t^0\bigr)\right|.$$

Учитывая оценки (29) и (27) и выбирая величину Δt из условия $(\Delta t)^2\, K_7 \max\limits_{(x,t,u)\in\overline{D}} \left|\gamma_u(x,t,u)\right| < 1$, устанавливаем справедливость оценки

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\Delta\rho(x,t)\right| \leqslant K_6 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left|\Delta v(t)\right|.$$

Но тогда из (29) следует справедливость оценки и для $\Delta u(x,t)$:

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}} \left|\Delta u(x,t)\right| \leqslant K_5 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left|\Delta v(t)\right|.$$

Проводя подобные рассуждения последовательно для $t \in \left[t^1, t^1 + \Delta t\right]$ $(t^1 = t^0 + \Delta t)$, $t \in \left[t^2, t^2 + \Delta t\right]$ $(t^2 = t^1 + \Delta t)$ и т.д., устанавливаем оценки (26) на всем отрезке $[0,T]$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Это позволяет заключить из (25), что

$$\left|J_g\bigl(v^n\bigr) - J_g(v)\right| \leqslant K_9 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left|\Delta v(t)\right|, \quad K_9 = \mathrm{const} > 0,$$

т.е. в силу (24) имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} J_g\bigl(v^n\bigr) = J_g(v)$, доказывающее первое утверждение теоремы 3.

Для доказательства второго утверждения заметим, что для любой последовательности $\bigl\{v^n\bigr\} \subset V$ (или V_R), слабо сходящейся в $W_2^2[0,T]$ к некоторой точке $v \in V$ (V_R), справедливы неравенства [7]

$$\bigl\|v^n\bigr\|_{W_2^2[0,T]} \leqslant K_{10}, \quad \|v\|_{W_2^2[0,T]} \leqslant K_{10}, \quad K_{10} = \mathrm{const} > 0.$$

Так как оператор вложения из $W_2^2[0,T]$ в $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ вполне непрерывен [6], то отсюда и из единственности слабого предела заключаем, что для последовательности $\bigl\{v^n(t)\bigr\}$ справедливо (24). Повторяя затем предыдущие рассуждения, приходим к утверждению $\lim\limits_{n\to\infty} J_g\bigl(v^n\bigr) = J_g(v)$, доказывающему слабую непрерывность функционала $J_g(v)$ в $W_2^2[0,T]$ при $v \in V$ (V_R).

3.3. Построение устойчивых приближений в классах гладких функций для обратной задачи (1)–(4), (19) на основе метода квазирешений проведем в предположении, что при данной правой части g операторное уравнение (21) имеет точное решение $v^0 \in V$. Такое предположение, естественное для обратных задач идентификации граничных режимов, означает, что $g \in AV$, где $AV \subset G$ — образ множества V в G (см. (22)).

Заметим, что точное решение может быть неединственным. Обозначим через V^0 множество точных решений v^0:

$$V^0 = \left\{v^0 \in V,\ \ J_g\bigl(v^0\bigr) = \inf_{v\in V} J_g(v) = 0\right\}.$$

В силу слабой непрерывности функционала $J_g(v)$ в $W_2^2[0,T]$ при $v \in V$ (теорема 3) и слабой замкнутости множества V в $W_2^2[0,T]$ множество V^0 тоже слабо замкнуто в $W_2^2[0,T]$. Следовательно, существуют элементы $v^0_{\min}$, обладающие минимальной в $W_2^2[0,T]$ нормой:

$$V^0_{\min} = \left\{v^0_{\min} \in V^0,\ \ \bigl\|v^0_{\min}\bigr\|_{W_2^2[0,T]} = R^0\right\} \neq \emptyset, \quad R^0 = \inf_{v^0\in V^0} \bigl\|v^0\bigr\|_{W_2^2[0,T]}. \tag{30}$$

Если на некотором компакте V_R для функционала $J_g(v)$ имеет место равенство $\inf\limits_{v\in V_R} J_g(v) = 0$, это означает, что $V_R \cap V^0 \neq \emptyset$ и квазирешение V_R^* (см. (23)) совпадает с $V_R \cap V^0$. Таким образом, решение обратной задачи (1)–(4), (19) сведено к задаче минимизации функционала $J_g(v)$ на компакте V_R, корректной в смысле А.Н. Тихонова в силу теоремы 3.

Если же на некотором компакте V_R $\inf\limits_{v\in V_R} J_g(v) > 0$, это означает, что $V_R \cap V^0 = \emptyset$. Рассмотрим квазирешения V_R^* на системе расширяющихся компактов V_R при $0 < R < R^0$ и покажем, что любой элемент $v_R \in V_R^*$ сходится в $W_2^2[0,T]$ к какому-либо элементу множества $V^0_{\min}$ при $R \to R^0$. Это утверждение, используя понятия β-сходимости множеств [9, 10], формулирует

Теорема 4. *Пусть входные данные удовлетворяют требованиям теоремы* 1. *Тогда квазирешение* V_R^*, *определенное для любого* R, $0 < R < R^0$, β-*сходится при* $R \to R^0$ *к множеству* $V_{\min}^0$ *точных решений с минимальной нормой:*

$$V_R^* \xrightarrow{\beta} V_{\min}^0 \quad \bigl(W_2^2[0,T]\bigr). \tag{31}$$

При этом при $R \to R^0$

$$U_R^* \xrightarrow{\beta} U_{\min}^0 \left(C(\overline{Q})\right), \quad \Re_R^* \xrightarrow{\beta} \Re_{\min}^0 \left(C(\overline{Q})\right), \tag{32}$$

где $\{U_R^*, \Re_R^*\}$ *и* $\{U_{\min}^0, \Re_{\min}^0\}$ — *множества решений нелинейной задачи* (1)–(4), *получаемые при пробегании элементами* v_R *и* $v_{\min}^0$ *соответственно множеств* V_R^* *и* $V_{\min}^0$.

Пусть, кроме того, при $(x,t,u) \in \overline{D}$ *коэффициенты уравнения* (1) *и функция* $\gamma(x,t,u)$ *в условии* (4) *имеют производные по* u, *непрерывные в смысле Гельдера по* x *и* t *с показателями* λ, $\lambda/2$, *производная* $\gamma_{uu}(x,t,u)$ *ограничена. Тогда при* $R \to R^0$ *имеет место сходимость*

$$U_R^* \xrightarrow{\beta} U_{\min}^0 \left(H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})\right), \quad \Re_R^* \xrightarrow{\beta} \Re_{\min}^0 \left(H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})\right). \tag{33}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что квазирешение V_R^* при $R = R^0$ совпадает с $V_{\min}^0$. Действительно, с одной стороны, для всех $v_{R^0} \in V_{R^0}^*$ имеет место $\|v_{R^0}\|_{W_2^2[0,T]} \leqslant R^0$. С другой стороны, из определения R^0 (см. (30)) и из вложения $V_{R^0}^* \subseteq V^0$ следует невозможность неравенства $\|v_{R^0}\|_{W_2^2[0,T]} < R^0$. Таким образом, для всех $v_{R^0} \in V_{R^0}^*$ имеет место равенство $\|v_{R^0}\|_{W_2^2[0,T]} = R^0$, т.е. $V_{R^0}^*$ совпадает с $V_{\min}^0$. Исходя из определения β-сходимости множеств для доказательства (31) надо показать, что при $R \to R^0$

$$\sup_{v_R \in V_R^*} \inf_{v_{R^0} \in V_{R^0}^*} \|v_R - v_{R^0}\|_{W_2^2[0,T]} \to 0. \tag{34}$$

Заметим, что функция $J_g^*(R) = \inf\limits_{v \in V_R} J_g(v)$ является в силу [11] непрерывной монотонно невозрастающей функцией R при $0 < R \leqslant R^0$, т.е. $J_g^*(R) \to J_g^*\bigl(R^0\bigr)$ при $R \to R^0$.

Следовательно, последовательность $\{v_R\} \subset V_R$, где v_R — любой элемент из V_R^*, является минимизирующей для функционала $J_g(v)$ на множестве V_{R^0}. Но тогда вследствие корректности задачи минимизации функционала $J_g(v)$ на компакте V_{R^0} вытекает, что

$$\inf_{v_{R^0} \in V_{R^0}^*} |v_R - v_{R^0}|_{[0,T]}^{1+\lambda/2} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to R^0.$$

Отсюда в силу произвольности элемента $v_R \in V_R^*$ следует, что

$$\sup_{v_R \in V_R^*} \inf_{v_{R^0} \in V_{R^0}^*} |v_R - v_{R^0}|_{[0,T]}^{1+\lambda/2} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to R^0,$$

т.е. $V_R^* \xrightarrow{\beta} V_{\min}^0 \left(H^{1+\lambda/2}[0,T]\right)$, так как $V_{R^0}^*$ совпадает с $V_{\min}^0$.

Для доказательства более сильного утверждения (31) заметим, что V_{R^0} — слабо компактное в $W_2^2[0,T]$ множество, так как оно в силу своего определения — выпуклое замкнутое и ограниченное в $W_2^2[0,T]$. Следовательно, из минимизирующей последовательности $\{v_R\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{R_n}\} \subseteq \{v_R\}$, слабо сходящуюся в $W_2^2[0,T]$ к некоторому элементу v_{R^0} множества $V_{R^0}^* \subset V_{R^0}$ (см. теорему 3 о слабой непрерывности функционала $J_g(v)$ в $W_2^2[0,T]$ на V_{R^0}). Но эта подпоследовательность сходится к v_{R^0} и сильно в $W_2^2[0,T]$. Действительно, из слабой полунепрерывности нормы элемента $v_{R^0} \in V_{R^0}^*$ в гильбертовом пространстве $W_2^2[0,T]$ и из принадлежности его границе множества V_{R^0} ($\|v_{R^0}\|_{W_2^2[0,T]} = R^0$) вытекает, что

$$R^0 = \|v_{R^0}\|_{W_2^2[0,T]} \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|v_{R_n}\|_{W_2^2[0,T]} \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \|v_{R_n}\|_{W_2^2[0,T]} \leqslant R^0.$$

Таким образом, $\|v_{R_n}\|_{W_2^2[0,T]} \to \|v_{R^0}\|_{W_2^2[0,T]}$ при $n \to \infty$, и, следовательно, $v_{R_n} \to v_{R^0}$ сильно в $W_2^2[0,T]$ [7]. Отсюда в силу произвольности $v_R \in V_R^*$ приходим к заключению о справедливости утверждения (34), которое означает β-сходимость множества V_R^* к $V_{\min}^0$ в $W_2^2[0,T]$.

Доказательство утверждения (32) о β-сходимости U_R^* и $\Re_R^*$ в $C(\overline{Q})$ является тогда очевидным следствием теорем вложения [6] и оценок (26) при $\Delta u(x,t) = u_R(x,t) - u_{\min}^0(x,t)$, $\Delta\rho(x,t) = \rho_R(x,t) - \rho_{\min}^0(x,t)$, где $\{u_R(x,t), \rho_R(x,t)\}$ и $\{u_{\min}^0(x,t), \rho_{\min}^0(x,t)\}$ — решения нелинейной задачи (1)–(4), соответствующие граничным функциям $v_R(t) \in V_R^*$ и $v_{\min}^0(t) \in V_{\min}^0$, $\Delta v(t) = v_R(t) - v_{\min}^0(t)$.

Для доказательства β-сходимости U_R^* и $\Re_R^*$ в классах Гельдера (33) необходимо кроме оценок (26) получить соответствующие оценки устойчивости для решений задачи (1)–(4) вида

$$\left|\Delta u(x,t)\right|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_{11}\left|\Delta v(t)\right|_{[0,T]}^{1+\lambda/2}, \quad \left|\Delta\rho(x,t)\right|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant K_{12}\left|\Delta v(t)\right|_{[0,T]}^{1+\lambda/2}, \quad K_{11}, K_{12} = \mathrm{const} > 0. \tag{35}$$

Вывод таких оценок (как и ранее вывод оценок (26)) проводится последовательно для интервалов $\left[t^0, t^0+\Delta t\right]$, $\left[t^1, t^1+\Delta t\right]$ $(t^1 = t^0+\Delta t)$, и т.д., исходя из предположения, что при $t \in \left[0, t^0\right]$, $0 \leqslant t^0 < T$, уже установлено, что

$$\left|\Delta u(x,t)\right|_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_{11}\left|\Delta v(t)\right|_{[0,t^0]}^{1+\lambda/2}, \quad \left|\Delta\rho(x,t)\right|_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant K_{12}\left|\Delta v(t)\right|_{[0,t^0]}^{1+\lambda/2}. \tag{36}$$

В области $\overline{Q}_{t^0} = \left\{0 \leqslant x \leqslant l, t^0 \leqslant t \leqslant t^0+\Delta t\right\}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &c(x,t,u_R)\rho_R(x,t)\Delta u_t - \big(a(x,t,u_R)\Delta u_x\big)_x + \mathcal{D}_0\Delta u_x + \mathcal{D}_1\Delta u = c\big(x,t,u^0_{\min}\big)\big(u^0_{\min}\big)_t\Delta\rho(x,t), \quad (x,t)\in Q_{t^0},\\ &\Delta u\big|_{x=0} = 0, \quad \Delta u\big|_{x=l} = \Delta v(t), \quad t^0 < t \leqslant t^0+\Delta t, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\Delta\rho(x,t) = \int\limits_{t^0}^{t} \gamma_u(x,\tau,u_R)\Delta u(x,\tau)\,d\tau + \Delta\rho\big(x,t^0\big), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{38}$$

в которых коэффициенты $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{D}_1$ зависят соответствующим образом от производных a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u и d_u в точке $\big(x,t,\sigma u_R + (1-\sigma)u^0_{\min}\big)$ $(0<\sigma<1)$, а также от $\rho_R(x,t)$, $u_R(x,t)$ и производных $u_{Rx}(x,t)$, $u_{Rxx}(x,t)$ и $u_{Rt}(x,t)$. Оценки в классах Гельдера теоремы 1 для $u_R(x,t)$ и $\rho_R(x,t)$ и требования к входным данным теоремы 4 позволяют заключить, что все коэффициенты уравнения (37) удовлетворяют условию Гельдера как функции (x,t) с показателями λ, $\lambda/2$. Следовательно, для $\Delta u(x,t)$ как для решения такой линейной краевой задачи справедлива оценка [2] в области $\overline{Q}_{t^0}$

$$\left|\Delta u(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_{13}\left(\left|\Delta\rho(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2} + \left|\Delta v(t)\right|_{[t^0,t^0+\Delta t]}^{1+\lambda/2} + \left|\Delta u\big(x,t^0\big)\right|_{[0,l]}^{2+\lambda}\right), \quad K_{13} = \mathrm{const} > 0. \tag{39}$$

Чтобы оценить $\left|\Delta\rho(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2}$ в (39), заметим, что по определению нормы в классе Гельдера $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_{t^0})$

$$\left|\Delta\rho(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2} = \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\left|\Delta\rho(x,t)\right| + \big\langle\rho(x,t)\big\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} + \big\langle\rho(x,t)\big\rangle_{t,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda/2}.$$

Из соотношения (38) следует, что

$$\begin{aligned} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\left|\Delta\rho(x,t)\right| &\leqslant \Delta t \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_u(x,t,u)\right| \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\left|\Delta u(x,t)\right| + \max_{0\leqslant x\leqslant l}\left|\Delta\rho\big(x,t^0\big)\right|,\\ \big\langle\rho(x,t)\big\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} &\leqslant \Delta t\Big\{\langle\gamma_u\rangle_{x,\overline{D}}^{\lambda} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\left|\Delta u(x,t)\right| + \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_u(x,t,u)\right|\big\langle u(x,t)\big\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} +\\ &\quad + \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_{uu}(x,t,u)\right|\big\langle u_R(x,t)\big\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\left|\Delta u(x,t)\right|\Big\} + \Big\langle\rho\big(x,t^0\big)\Big\rangle_{x,\ [0,l]}^{\lambda},\\ \big\langle\rho(x,t)\big\rangle_{t,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda/2} &\leqslant \Delta t^{1-\lambda/2} \max_{(x,t,u)\in\overline{D}}\left|\gamma_u(x,t,u)\right| \max_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\left|\Delta u(x,t)\right|. \end{aligned}$$

Так как $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_{t^0}}\left|\Delta u(x,t)\right| < \left|\Delta u(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{2+\lambda,1+\lambda/2}$, $\big\langle u(x,t)\big\rangle_{x,\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda} < \left|\Delta u(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{2+\lambda,1+\lambda/2}$, то полученные оценки для $\left|\Delta\rho(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2}$ позволяют заключить из (39), что при достаточно малом, но фиксированном Δt имеет место неравенство

$$\left|\Delta u(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K_{14}\left(\left|\Delta v(t)\right|_{[t^0,t^0+\Delta t]}^{1+\lambda/2} + \left|\Delta u\big(x,t^0\big)\right|_{[0,l]}^{2+\lambda} + \left|\Delta\rho(x,t)\right|_{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant t^0}^{\lambda,\lambda/2}\right), \quad K_{14} = \mathrm{const} > 0.$$

По предположению, при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant t^0$ оценки (36) уже установлены. Следовательно, полученное неравенство означает выполнение аналогичных оценок и в области $\overline{Q}_{t^0}$, в том числе и для $\left|\Delta\rho(x,t)\right|_{\overline{Q}_{t^0}}^{\lambda,\lambda/2}$.

Повторение подобных рассуждений для последующих интервалов времени позволяет установить оценки (35) для $\left|\Delta u(x,t)\right|_{\overline{Q}}^{2+\lambda,1+\lambda/2}$ и $\left|\Delta\rho(x,t)\right|_{\overline{Q}}^{\lambda,\lambda/2}$ уже во всей области.

Доказательство утверждения (33) является затем очевидным следствием оценок (35) и теорем вложения [6]. Теорема 4 доказана.

Как следствие этой теоремы любой элемент из множества квазирешений V_R^* при $0 < R < R^0$ и соответствующее ему решение задачи (1)–(4) являются приближениями в соответствующих пространствах Гельдера к одному из решений $\left\{u^0_{\min}(x,t), \rho^0_{\min}(x,t), v^0_{\min}(t)\right\}$ обратной задачи (1)–(4), (19).

Если множество точных решений V^0 состоит из единственного элемента v^0, то утверждения теоремы 4 означают α-сходимость соответствующих множеств при $R \to R^0$,

$$V_R^* \xrightarrow{\alpha} v^0 \ \left(W_2^2[0,T]\right), \quad U_R^* \xrightarrow{\alpha} u^0 \ \left(H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})\right), \quad \Re_R^* \xrightarrow{\beta} \rho^0 \ \left(H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})\right),$$

где $\left\{u^0(x,t), \rho^0(x,t), v^0(t)\right\}$ — точное решение обратной задачи (1)–(4), (19).

Таким образом, обоснован метод построения приближенных решений, устойчивых в классах Гельдера, который позволяет определить граничный режим в нелинейной задаче (1)–(4) по заданному финальному условию (19) для коэффициента параболического уравнения.

4. Заключение. Основные результаты исследования состоят в следующем.

Доказаны условия однозначной разрешимости в классах гладких функций для нелинейной системы, которая включает в себя первую краевую задачу для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени, а также уравнение, описывающее изменение по времени этого коэффициента. На основе априорных оценок метода прямых Ротэ в сеточно-непрерывных классах Гельдера установлены точные дифференциальные зависимости между входными данными и решением исследуемой нелинейной задачи. Дана оценка погрешности метода Ротэ как способа получения ее приближенного решения.

Рассмотрена обратная задача определения граничной функции для системы (1)–(4) по дополнительной информации об искомом коэффициенте, заданной в конечный момент времени. Обосновано операторное представление этой обратной задачи с выбором "естественных" функциональных пространств, установленных при исследовании системы (1)–(4).

Обоснован регуляризирующий метод приближенного решения рассматриваемой некорректной обратной задачи, в основе которого сведение ее операторного представления к вариационной задаче минимизации функционала невязки и построение квазирешений на системе расширяющихся компактов. Получены оценки устойчивости данного метода в выбранной топологии (классы Гельдера).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдман Н.Л.* Нелинейная задача для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени и ее приложения в математических моделях физико-химических процессов // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 247–266.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. *Gol'dman N.L.* Inverse Stefan problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
4. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
5. *Иванов В.К.* О решении операторных уравнений, не удовлетворяющих условиям корректности // Труды МИАН СССР. 1971. **112**. 232–240.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
8. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. **151**, № 3. 501–504.
9. *Лисковец О.А.* Некорректные задачи и устойчивость квазирешений // Сибирский математический журнал. 1969. **10**, № 2. 373–385.
10. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Математический сборник. 1963. **61**, № 2. 211–223.
11. *Будак Б.М., Виньоли А., Гапоненко Ю.Л.* Об одном способе регуляризации для непрерывного выпуклого функционала // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1969. **9**, № 5. 1046–1056.

Поступила в редакцию
11.06.2018

On Some Statements of Nonlinear Parabolic Problems with Boundary Conditions of the First Kind and on Methods of Their Approximate Solution

N. L. Gol'dman[1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: goldman@srcc.msu.ru*

Received June 11, 2018

Abstract: We study two statements of nonlinear problems in Hölder spaces for a parabolic equation with an unknown coefficient at the time derivative and with boundary conditions of the first kind. One statement is a system containing a boundary value problem and an equation for the time dependence of the sought coefficient. In the other statement, in addition it is necessary to determine a boundary function in one of the boundary conditions by using an additional information on this coefficient at a final time. For these statements we justify a construction of approximate solutions on the basis of the Rothe method and the method of quasisolutions.

Keywords: parabolic equations, boundary value problem of the first kind, Hölder spaces, Rothe method, inverse problems, final observation, stability estimates, quasisolutions.

References

1. N. L. Gol'dman, "A Nonlinear Problem for a Parabolic Equation with an Unknown Coefficient at the Time Derivative and Its Applications in Mathematical Models of Physico-Chemical Processes," Vychisl. Metody Programm. **18**, 247–266 (2017).

2. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967; SIAM, Providence, 1968).

3. N. L. Gol'dman, *Inverse Stefan Problems* (Kluwer, Dordrecht, 1997).

4. N. L. Gol'dman, *Inverse Stefan Problems. Theory and Methods of Solution* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1999) [in Russian].

5. V. K. Ivanov, "The Solution of Operator Equations That Are Not Well-Posed," Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Akad. Nauk SSSR **112**, 232–240 (1971) [Proc. Steklov Inst. Math. **112**, 241–250 (1971)].

6. S. M. Nikol'skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems* (Nauka, Moscow, 1969; Springer, New York, 1975).

7. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1977; Pergamon, New York, 1982).

8. A. N. Tikhonov, "Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method," Dokl. Akad. Nauk SSSR **151** (3), 501–504 (1963) [Sov. Math. Dokl. **5** (4), 1035–1038 (1963)].

9. O. A. Liskovets, "Incorrectly Posed Problems and Stability of Quasisolutions," Sib. Mat. Zh. **10** (2), 373–385 (1969) [Sib. Math. J. **10** (2), 266–274 (1969)].

10. V. K. Ivanov, "On Ill-Posed Problems," Mat. Sb. **61** (2), 211–223 (1963).

11. B. M. Budak, A. Vin'oli, and Yu. L. Gaponenko, "A Regularization Method for a Continuous Convex Functional," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **9** (5), 1046–1056 (1969) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **9** (5), 82–95 (1969)].