УДК 519.17:519.6 doi 10.26089/NumMet.v19r440

СГЛАЖИВАЮЩАЯ АДАПТИВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ИЗОЛИНИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Б. Н. Иванов[1]

Рассматривается процедура сглаживающей аппроксимации, которая позволяет адаптировать кусочно-линейную изолинию к ее представлению многочленами до третьего порядка. Сглаживающая аппроксимация уменьшает влияние ошибок линейной интерполяции при построении изолиний. В основе процедуры лежит метод наименьших квадратов. Выполнен анализ методов восполнения данных сплайновой кубической интерполяцией, наиболее часто используемых в практических работах. Рассматривается универсальный подход формирования границы области построения изолиний на основе наличия данных в узлах расчетной сетки.

Ключевые слова: кубический сплайн, сплайн Акимы, адаптивная интерполяция.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается адаптивный численный подход на основе метода наименьших квадратов построения полей изолиний функции двух переменных $z = f(x, y)$ в границах области $x, y \in D$. Под изолинией понимается изображение на плоскости линии $f(x, y) = C$, где C — константа. Говорят, что величина C определяет уровень проведения изолинии или значение на изолинии. Под *полем изолиний* будем понимать множество изолиний, составленных для различных значений C в интервале $\min\Big\{f(x,y)\,\big|\,x,y \in D\Big\} \leqslant C \leqslant \max\Big\{f(x,y)\,\big|\,x,y \in D\Big\}$. Предлагаемый метод реализован в рамках программного комплекса ГИС ОКЕАН [1, 2] и применяется для построения динамики полей изолиний атмосферного давления, геопотенциала, скорости ветра, температуры воздуха, количества осадков и влажности, температуры воды и высот волн в океане, других гидрометеорологических полей и производных от них. Такие поля изолиний являются, как правило, основным, а часто и единственным средством анализа состояния атмосферы и океана.

Числовые поля для построения изолиний формируются двумя потоками. Первый поток данных поступает на регулярную сеточную область. Такой поток составляют как входные данные в систему, так и данные, рассчитанные в рамках системы на регулярную сетку. Второй поток данных — это фактические наблюдения, измерения которых выполняются в узлах произвольной сетки. При построении полей изолиний по фактическим наблюдениям их данные предварительно интерполируют в узлы регулярной сетки.

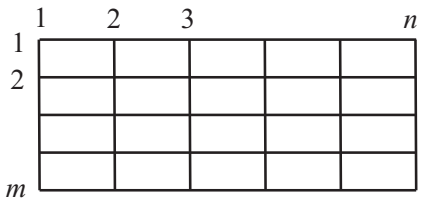

Рис. 1. Сеточная область

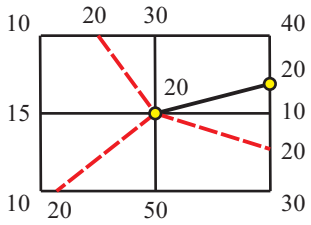

Рис. 2. Вырожденный случай

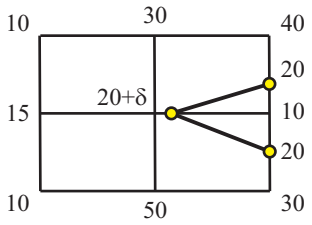

Рис. 3. Продолжение изолинии

При формировании изолиний рассматривается общий случай полей, когда допускается неполное числовое поле. Такие поля данных могут быть следствием каких-либо ошибок или сбоев, например приема/передачи данных. Иногда природа самих полей может выступать источником неполного поля. Такими полями, например, являются поле температуры воды и поле высот ветрового волнения. Острова и береговая черта являются естественными границами таких полей.

Регулярная расчетная сеточная область является двумерной и прямоугольной (рис. 1). Сеточная область состоит из клеток. У клеток выделяем вершины и ребра. Клетки будем называть соседними, если они имеют общее ребро. Значения числового поля в узлах сетки определим через z_{ij}, где $i = 1, 2, \ldots, m$

[1] Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), Школа естественных наук, ул. Суханова, 8, 690091, г. Владивосток; доцент, e-mail: ibn8826@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

и $j = 1, 2, \ldots, n$. Наличие или отсутствие данных в узлах сетки будем фиксировать элементами матрицы признаков $[b_{ij}]$, где $b_{ij} = 1$, если данные в узле (i, j) определены, и $b_{ij} = 0$, если данные отсутствуют.

Числовое поле $[z_{ij}]$ является однозначной функцией $z = f(x, y)$. При построении изолиний по числовому полю $[z_{ij}]$ выполняется его линейная интерполяция по ребрам клеток расчетной сетки. Изолинии будут ломаными кривыми, опорные точки которых являются точками их пересечения с ребрами клеток. Для изолинии возможен вырожденный случай, когда она проходит через узел (i, j) расчетной сетки (рис. 2). Это случается, когда $z_{ij} = C$, где C — значение на изолинии $f(x, y) = C$. Алгоритмически ломаная изолиния формируется последовательным включением составляющих ее отрезков. Если допустить, что очередной отрезок заканчивается в узле сетки для $z_{ij} = 20$, то следующий отрезок ломаной может расположиться в одной из трех клеток, примыкающих к данному узлу (рис. 2). Однозначность выбора клетки продолжения изолинии достигается за счет добавления к значению поля z_{ij} достаточно малого числа $\delta > 0$ (рис. 3). Такая модификация не нарушает общей картины поля изолиний, однако дает возможность утверждать, что изолинии не будут проходить через узлы расчетной сетки.

В рамках последней модификации полагаем, что любая опорная точка изолинии будет являться точкой пересечения изолинии и только одного ребра сеточной области.

2. Границы сеточной области. В этом разделе определим форму представления границы сеточной области при построении изолиний.

Имеем матрицу признаков $[b_{ij}]$ числового поля $[z_{ij}]$, где $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.

Определим вспомогательную матрицу $[t_{ij}]$, где $i = 1, 2, \ldots, m + 1$ и $j = 1, 2, \ldots, n + 1$, по которой составим границу сеточной области. Число клеток в матрице $[t_{ij}]$ равно $m \times n$. Это количество равно числу узлов в сеточной области (рис. 4), поэтому можно вложить матрицу $[b_{ij}]$ в матрицу $[t_{ij}]$ так, что узлы матрицы $[b_{ij}]$ будут центрами клеток матрицы $[t_{ij}]$.

Значения t_{ij} определяются по значениям элементов b_{ij}. Начальные значения всех элементов $t_{ij} = 1$, а по периметру матрицы $[t_{ij}]$ элементы $t_{ij} = 0$. Далее, если элемент $b_{ij} = 0$, то рассматривается клетка матрицы $[t_{ij}]$, центром которой является элемент b_{ij}. Значения элементов в вершинах этой клетки t_{ij}, $t_{i,j+1}$, $t_{i+1,j}$, $t_{i+1,j+1}$ устанавливаются равными нулю.

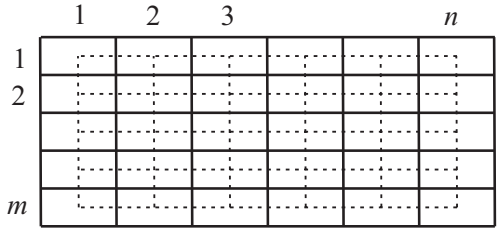

Рис. 4. Сеточная область

На рис. 5 и 6 показан пример таких матриц $[b_{ij}]$ и $[t_{ij}]$. Построим на поле значений матрицы $[t_{ij}]$ изолинии с уровнем 1/2. Они показаны на рис. 6. Опорными точками таких изолиний выступают центры клеток матрицы $[t_{ij}]$, через которые проходят изолинии. Ребра этих изолиний составляют реберный список границы области исходного числового поля $[z_{ij}]$. Отметим, что все изолинии границ будут замкнутыми, так как по периметру значения элементов матрицы $[t_{ij}]$ равны нулю.

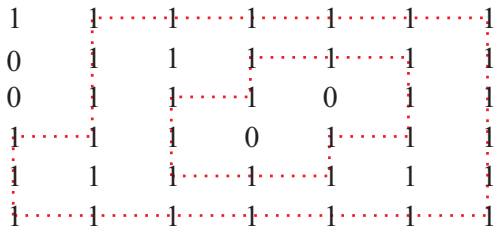

Рис. 5. Матрица признаков $[b_{ij}]$

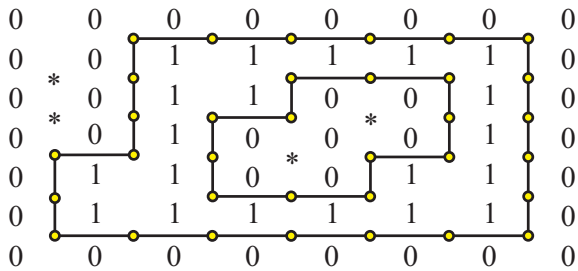

Рис. 6. Изолинии матрицы $[t_{ij}]$

Обозначим через $[r_{ij}]$ полученный реберный список границы области исходного числового поля, где индекс i обозначает номер списка (границы); индекс j обозначает номер ребра в списке; $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, k_i$.

3. Поведение изолинии в клетке. Рассмотрим поведение изолинии внутри одной клетки сеточной области при линейной интерполяции. Пусть значения в узлах клетки составляют 10, 20, 30, 40. Возможны три случая относительного расположения этих величин в узлах клетки.

Первый случай. Значения 10, 20, 30, 40 расположены так, что минимальное (10) и максимальное (40) из них находятся в противоположных вершинах (рис. 7а). Тогда по периметру (10)(20)(40) и (10)(30)(40)

значения будут упорядочены. В пределах диапазона 10–40 каждое значение встретится ровно два раза: один раз на ребрах периметра (10)(20)(40) и другой раз на ребрах периметра (10)(30)(40). Отрезок изолинии в такой клетке может занять одно из трех положений (рис. 7a).

Второй случай. Значения 10, 20, 30, 40 упорядочены по периметру (10)(20)(30)(40) (рис. 7b). Минимальное (10) и максимальное (40) значения располагаются в соседних клетках. Как и в первом случае, в пределах диапазона 10–40 каждое значение встретится ровно два раза: один раз на ребрах периметра (10)(20)(30)(40) и другой раз на ребре (10)(40). Отрезок изолинии в такой клетке может занять одно из трех положений (рис. 7b).

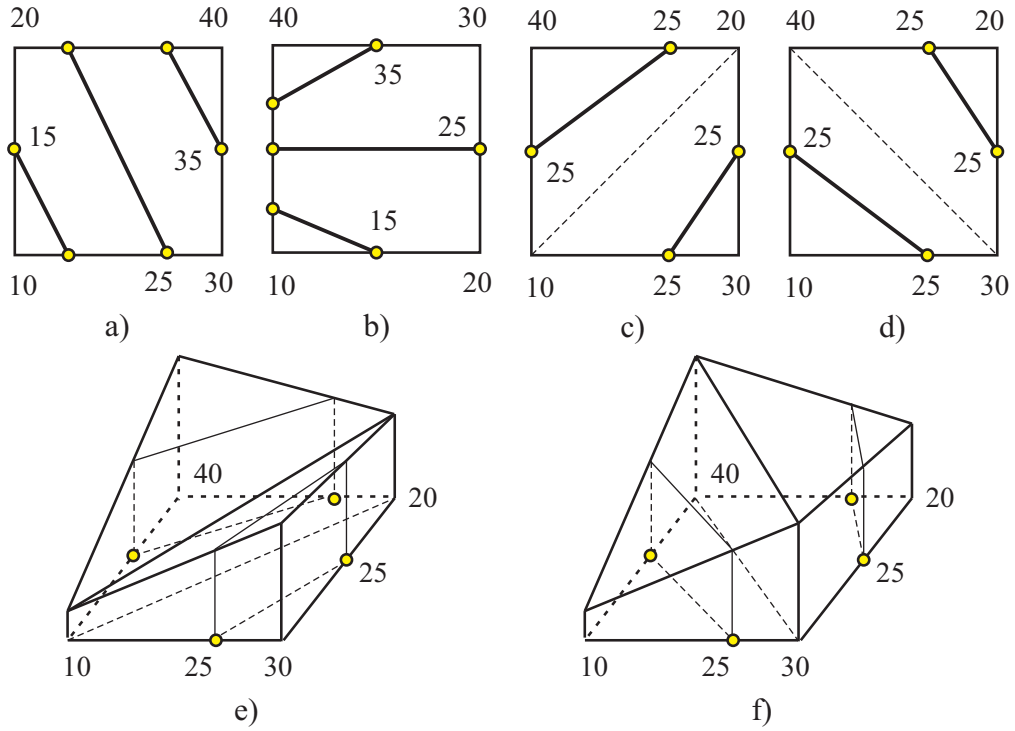

Рис. 7. Поведение изолиний в клетках сеточной области

Третий случай. Как и во втором случае, минимальное (10) и максимальное (40) значения располагаются в соседних вершинах. Однако 20 и 30 нарушают порядок сортировки по периметру (рис. 7c). В этой конфигурации минимальные (10 и 20) и максимальные (30 и 40) значения располагаются напротив друг друга. Любое значение из диапазона $(20, 30)$, например 25, встретится на каждом ребре клетки. Это означает, что данная конфигурация допускает проведение двух отрезков изолиний для равных значений в одной клетке и расположение таких отрезков изолиний при линейной интерполяции неоднозначное. Однозначность проведения изолиний решается триангуляцией клетки. Для триангуляции относительно диагонали значений 10 и 20 положение изолиний показано на рис. 7c, а на рис. 7e — линейная интерполяция в пространстве. Для триангуляции относительно диагонали значений 30 и 40 положение изолиний показано на рис. 7d, а линейная интерполяция в пространстве приводится на рис. 7f. При формировании изолиний выбирается одна из триангуляций для всех клеток сеточной области.

4. Построение ломаных изолиний. Рассмотрим отдельную клетку сеточной области и какой-либо отрезок изолинии внутри нее. Концами такого отрезка являются две опорные точки изолинии. Эти точки являются результатом пересечения изолинии с ребрами клетки. По построению (см. раздел 3), внутри одной клетки опорная точка может являться концом только одного отрезка изолинии. Следовательно, если изолиния переходит через ребро в соседнюю клетку, то степень опорной точки изолинии на этом ребре полагаем равной двум. Если же изолиния заканчивается в опорной точке на граничном ребре клетки (со стороны граничного ребра нет соседней клетки), то степень такой опорной точки считаем равной единице.

В рамках рассмотренной модели отдельная ломаная изолиния имеет траекторию без самопересечений (рис. 7). Если допустить самопересечение ломаной изолинии по какому-либо опорному узлу, то степень такого узла, как минимум, должна быть не меньше трех. Однако степень опорной точки (по построению) может быть равна либо одному, либо двум.

Из вышесказанного можно отметить, во-первых, что незамкнутые изолинии начинаются на гранич-

ных ребрах и заканчиваются тоже на граничных ребрах. Во-вторых, любая замкнутая изолиния пересекает хотя бы одно внутреннее (не граничное) горизонтальное ребро и не пересекает граничные ребра.

Последнее замечание дает основание следующему алгоритму построения всего множества изолиний числового поля $[z_{ij}]$ в границах области.

(1) Перебираем все значения C для изолиний $f(x,y) = C$ из диапазона $\min\limits_{x,y\in D} f(x,y) \leqslant C \leqslant \max\limits_{x,y\in D} f(x,y)$ с заданным шагом $\triangle C$.

(2) Для заданного значения C строим все незамкнутые изолинии. Для этого перебираем все ребра границы области в поиске ребра, на котором числовое поле $[z_{ij}]$, в рамках линейной интерполяции, равно значению C. Данная точка на граничном ребре будет опорной точкой начала незамкнутой изолинии. Далее последовательно, согласно разделу 3, выполним перемещение по клеткам сеточной области, восстанавливая опорные точки и отрезки изолинии. Перемещение по изолинии заканчивается в точке пересечения изолинии с граничным ребром.

(3) Для заданного значения C строим все замкнутые изолинии. Для этого достаточно перебрать все внутренние горизонтальные ребра в пределах границы области, на которых числовое поле $[z_{ij}]$, в рамках линейной интерполяции, равно значению C. Перебираем только те ребра, которые еще не пересекла ни одна из ранее построенных изолиний с уровнем C. Ребро сеточной области может пересечь не более одной изолинии с уровнем C. Найденное такое горизонтальное ребро и точка на нем будет опорной точкой начала замкнутой изолинии. Далее последовательно, согласно разделу 3, выполним перемещение по клеткам сеточной области, восстанавливая опорные точки и отрезки изолинии. Перемещение по изолинии закончится, как только вернемся в исходную опорную точку изолинии. Это непременно случится, так как размеры исходного поля конечные и степени всех опорных узлов замкнутых изолиний равны двум. Пример фрагмента карты поля исходных ломаных изолиний числового поля температуры воздуха на уровне 850 гПа представлен на рис. 8. Узлы расчетной сеточной области — это точки пересечения широт и долгот на поверхности Земли в стереографической проекции. Для одной изолинии показаны узлы — точки ее пересечения с ребрами координатной сетки.

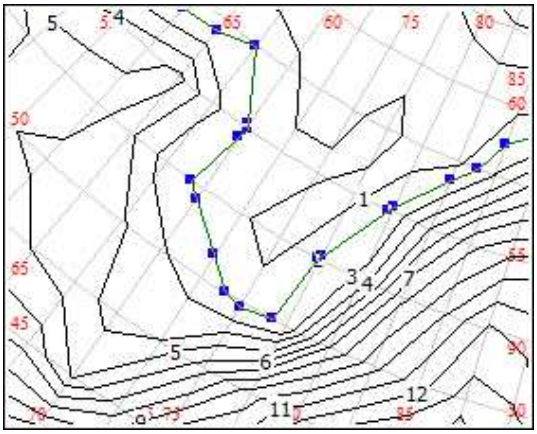

Рис. 8. Ломаные изолинии

5. Параметрическое задание изолиний. Исходный вид построенных изолиний — это кусочно-линейный, когда опорные точки изолинии последовательно соединяются отрезками (рис. 8). Их будем называть *исходными ломаными*. Для практической работы исходные ломаные подлежат дополнительной обработке. Основной задачей такой обработки изолиний является повышение качества их графического представления. Другой не менее важной задачей является повышение точности построения изолиний. Как правило, методы обработки данных применяются к однозначным функциям. Изолинии же в общем случае являются неоднозначными функциями $f(x,y) = C$. Такими являются все замкнутые изолинии.

Для однозначного представления изолинии $f(x,y) = C$ прибегают к ее параметрическому заданию $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где t — параметр кривой, $x(t)$ и $y(t)$ — однозначные функции. Именно данные функции будут подлежать обработке. Для однозначности указанных функций значения параметра t должны монотонно возрастать. Каждому такому значению t ставится в соответствие точка $\big(x(t), y(t)\big)$ на кривой $f(x,y) = C$.

В нашем случае исходная ломаная изолиния $f(x,y) = C$ задается координатами найденных опорных точек (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$. Самый простой способ определить ее параметрическое задание — это задать монотонно возрастающую последовательность для параметра $t = 0, 1, 2, \ldots, n$. Получим две последовательности опорных точек (x_k, k) и (y_k, k), $k = 0, 1, \ldots, n$, которые определяют однозначные функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Отметим, что это не самый лучший способ, когда опорные точки (x_k, y_k) на изолинии равномерно распределяются относительно значений параметра $t = 0, 1, \ldots, n$. В этом случае шаг интерполяции по t становится постоянным и не отвечает действительному расположению точек на изолинии. Разность значений параметра t для двух соседних точек должна отражать их удаленность на изолинии. Чем ближе точки, тем меньше должно быть изменение параметра t (рис. 8). Это можно сделать, если разности значений параметра t между соседними точками на изолинии будут пропорциональны длинам отрезков между ними. Рассмотрим опорные точки изолинии (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$. Длины отрезков изолинии составят

$s_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а длина всей ломаной изолинии будет равна $S = \sum\limits_{k=1}^{n} s_k$. Значения параметра t параметрической кривой в опорных точках изолинии определим по формулам: $t_0 = 0$, $t_k = \dfrac{1}{S}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} s_i\right)$, или $t_k = t_{k-1} + s_k/S$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Получили монотонно возрастающую последовательность $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, для которой разность значений между соседними точками $t_k - t_{k-1} = h_k = s_k/S$, $k = 1, 2, \ldots, n$, пропорциональна длинам соответствующих им отрезков s_k.

Найденные значения t_k определяют две последовательности (x_k, t_k) и (y_k, t_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, которые, в свою очередь, определяют две функции: соответственно $x = x(t)$ и $y = y(t)$, монотонные по параметру t. Отметим, что для замкнутых изолиний в крайних точках будут выполняться условия $x_0 = x_n$ и $y_0 = y_n$, поэтому такие функции $x(t)$ и $y(t)$ рассматриваются как периодические.

6. Интерполяция изолиний. Под интерполяцией изолинии $f(x, y) = C$ понимают способ поиска ее промежуточных величин по имеющемуся набору значений опорных точек (x_j, y_j), $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Задачей такой интерполяции является повышение точности проведения изолиний и качества их графического представления. Такие кривые должны быть гладкими. Данную задачу построения гладких кривых решают сплайновые кривые [3, с. 212], которые удовлетворяют определенным условиям гладкости.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на $[a, b]$. В нашем случае $f(x)$ — это одна из функций $x = x(t)$ или $y = y(t)$ параметрического задания изолинии (см. раздел 5), где $[a, b] = [0, 1]$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка разбиения $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, в узлах которой определены значения $f_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Кусочно-ломаную кривую, построенную по точкам (x_j, f_j), будем называть *исходной ломаной*.

Функция $S_m(x)$ называется *полиномиальным сплайном* степени m дефекта r, если $S_m(x) \in C^{(m-r)}[a, b]$ и на каждом из отрезков $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, является полиномом степени не выше m, а максимальная степень $S_m(x)$ по всем отрезкам составляет m. Класс $C^{(m-r)}[a, b]$ — это класс функций, непрерывных вместе со своими производными вплоть до порядка $m - r$ включительно. Сплайн $S_m(x)$ называется *интерполяционным* для функции $f(x)$, если выполняются условия

$$S_m(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

На практике наиболее востребованными являются сплайны невысоких степеней [4, с. 112–174]. Особенно широко применяются кубические сплайны $S_3(x)$, имеющие на $[a, b]$ непрерывную, по крайней мере, первую производную. Касательная прямая к такой кривой уже будет плавно скользить по ней. Такие сплайны являются удобным средством интерполяции функций на больших промежутках, когда область интерполяции $[a, b]$ разбивают на значительное число отрезков. На практике только на одной изолинии гидросиноптического поля на поверхности Земли число опорных точек может достигать трехсот и более. Кубическими сплайнами добиваются определенной гладкости интерполяционной кривой, а разбиение $[a, b]$ на отрезки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ обеспечивает заданную точность интерполяции.

Замечание 1. Интерполяция функции одним многочленом на всем отрезке $[a, b]$ может потребовать для достижения заданной точности значительного увеличения его степени, следствием чего является нарушение предсказуемости его поведения в промежуточных точка отрезка. □

Найдем аналитическое представление сплайна $S_3(x) \in C^{(3-2)}[a, b]$. Значения производных $m_j = S_3'(x_j)$ называются *наклонами сплайна* в точках x_j, поскольку величина $S_3'(x_j)$ — это тангенс угла *наклона* касательной к кривой $S_3(x)$ в точке x_j. Сам сплайн $S_3(x)$ на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ является многочленом третьей степени

$$S_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{1}$$

где коэффициенты a, b, c, d подлежат определению. Для этого составим четыре краевых условия

$$S_3(x_{j-1}) = f_{j-1}, \quad S_3(x_j) = f_j, \quad S_3'(x_{j-1}) = m_{j-1}, \quad S_3'(x_j) = m_j. \tag{2}$$

Кубические интерполяционные сплайны, удовлетворяющие условиям (2), называются эрмитовыми (см. [5, с. 58]). Первые два уравнения системы (2) — это условия интерполяции, последние два уравнения (2) — условия непрерывности сплайна в узлах сетки разбиения. Запишем систему (2) в матричном

виде

$$\begin{pmatrix} x_{j-1}^3 & x_{j-1}^2 & x_{j-1} & 1 \\ x_j^3 & x_j^2 & x_j & 1 \\ 3x_{j-1}^2 & 2x_{j-1} & 1 & 0 \\ 3x_j^2 & 2x_j & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ m_{j-1} \\ m_j \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{j-1}^3 & x_{j-1}^2 & x_{j-1} & 1 \\ x_j^3 & x_j^2 & x_j & 1 \\ 3x_{j-1}^2 & 2x_{j-1} & 1 & 0 \\ 3x_j^2 & 2x_j & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{j-1} \\ f_j \\ m_{j-1} \\ m_j \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Из (3) заключаем, что каждый из коэффициентов a, b, c, d является линейной комбинацией исходных данных f_{j-1}, f_j, m_{j-1}, m_j. Тогда уравнение сплайна (1) можно представить в форме

$$S_3(x) = A(x)f_{j-1} + B(x)f_j + C(x)m_{j-1} + D(x)m_j, \quad (4)$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ — многочлены третьей степени, которые содержат шестнадцать неизвестных коэффициентов. Определим их *методом неопределенных коэффициентов*. Исходные данные f_{j-1}, f_j, m_{j-1}, m_j могут принимать произвольные значения. Тогда из уравнения (4) и условий (2) заключаем, что для $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ и их производных должны выполняться шестнадцать уравнений:

$$\begin{array}{l|l|l|l} A(x_{j-1}) = 1, & A(x_j) = 0, & A'(x_{j-1}) = 0, & A'(x_j) = 0, \\ B(x_{j-1}) = 0, & B(x_j) = 1, & B'(x_{j-1}) = 0, & B'(x_j) = 0, \\ C(x_{j-1}) = 0, & C(x_j) = 0, & C'(x_{j-1}) = 1, & C'(x_j) = 0, \\ D(x_{j-1}) = 0, & D(x_j) = 0, & D'(x_{j-1}) = 0, & D'(x_j) = 1. \end{array} \quad (5)$$

Каждая серия четырех по горизонтали уравнений (5) позволяет найти соответственно $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$. Найдем многочлены $A(x)$ и $C(x)$, а многочлены $B(x)$ и $D(x)$ запишутся симметрично перестановкой индексов $j \leftrightarrow j-1$ соответственно в $A(x)$ и $C(x)$.

Поиск $A(x)$ и $B(x)$. Имеем $A(x_{j-1}) = 1$, $A(x_j) = 0$, $A'(x_{j-1}) = 0$, $A'(x_j) = 0$. Условия $A(x_j) = 0$ и $A'(x_j) = 0$ позволяют утверждать, что $A(x) = \alpha(x - x_j)^2(2x - \beta)$, где коэффициенты α и β подлежат определению. Отсюда $A'(x) = 2\alpha(x - x_j)\big((x - x_j) + (2x - \beta)\big)$. Так как $A'(x_{j-1}) = 0$, то

$$2\alpha(x_{j-1} - x_j)\big((x_{j-1} - x_j) + (2x_{j-1} - \beta)\big) = 0, \quad \beta = 2x_{j-1} - (x_j - x_{j-1}).$$

Следовательно, $A(x) = \alpha(x - x_j)^2\big(2(x - x_{j-1}) + (x_j - x_{j-1})\big)$. Имеем условие $A(x_{j-1}) = 1$, или

$$\alpha(x_{j-1} - x_j)^2\big(2(x_{j-1} - x_{j-1}) + (x_j - x_{j-1})\big) = 1.$$

Отсюда $\alpha = 1/(x_j - x_{j-1})^3$ и, значит,

$$A(x) = \frac{(x - x_j)^2\big(2(x - x_{j-1}) + (x_j - x_{j-1})\big)}{(x_j - x_{j-1})^3}, \quad B(x) = \frac{(x - x_{j-1})^2\big(2(x - x_j) + (x_{j-1} - x_j)\big)}{(x_{j-1} - x_j)^3}.$$

Поиск $C(x)$ и $D(x)$. Имеем $C(x_{j-1}) = 0$, $C(x_j) = 0$, $C'(x_{j-1}) = 1$, $C'(x_j) = 0$. Условия $C(x_{j-1}) = 0$, $C(x_j) = 0$ и $C'(x_j) = 0$ позволяют утверждать, что $C(x) = \alpha(x - x_{j-1})(x - x_j)^2$, где коэффициент α подлежит определению. Так как $C'(x_{j-1}) = 1$, то

$$\alpha\big((x_{j-1} - x_j)^2 + 2(x_{j-1} - x_{j-1})(x_{j-1} - x_j)\big) = \alpha(x_{j-1} - x_j)^2 = 1.$$

Отсюда $\alpha = 1/(x_{j-1} - x_j)^2$ и, следовательно,

$$C(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)^2}{(x_{j-1} - x_j)^2}, \quad D(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j-1})^2}{(x_j - x_{j-1})^2}.$$

Таким образом, чтобы задать кубический сплайн $S_3(x) \in C^{(3-2)}[a, b]$ на отрезке $[a, b]$ при условии (2), достаточно задать в узлах разбиения отрезка $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ значения f_j и наклоны m_j.

Теорема 1. *Интерполяционный кубический сплайн* (4), *удовлетворяющий краевым условиям* (2), *существует и единственный* [5, с. 99].

Следствие 1. Рассмотрим сплайн (4), краевые условия (2) которого на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ удовлетворяют соотношению $m_{j-1} = m_j = r_j$, где $r_j = (f_j - f_{j-1})/(x_j - x_{j-1})$. Этим же условиям удовлетворяет и прямая $y = f_j + r_j(x - x_j)$, а значит сплайн (4) на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ — это прямая.

Далее рассмотрим три подхода к определению наклонов m_j сплайна в формуле (4). Все три подхода являются базовыми и очень широко используются в практических задачах. Анализ каждого из вариантов позволит нам объективно подойти к выбору одного из них.

7. Наклоны сплайна по Лагранжу. Значения наклонов m_j вычислим таким образом, чтобы они максимально близко соответствовали производным $f'(x_j)$ исходной функции. Для вывода формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию $f(x)$ интерполирующей функцией $P(x)$, а затем полагают $f'(x) = P'(x)$. Если для интерполирующей функции $P(x)$ известна погрешность $R(x) = f(x) - P(x)$, то погрешность производной $P'(x)$ составит $r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x)$. В качестве интерполирующей функции рассмотрим многочлен Лагранжа $L_2(x)$, построенный по трем точкам x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, и его производную:

$$L_2(x) = \sum_{k=j-1}^{j+1} f_k \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}, \tag{6}$$

$$L_2'(x) = \sum_{k=j-1}^{j+1} f_k \frac{(x - x_{k-1}) + (x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}. \tag{7}$$

Оценку погрешности $R_2(x) = f(x) - L_2(x) = \dfrac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_{j-1})(x - x_j)(x - x_{j+1})$, где $x_{j-1} \leqslant \xi \leqslant x_{j+1}$, интерполяционной формулы Лагранжа (6) можно найти в работе [6, с. 535]. Следовательно, $L_2(x)$ имеет третий порядок точности относительно шага $h = \max\left\{ |x_j - x_{j-1}| : i = \overline{1,n} \right\}$, а производная $L_2'(x)$ — второй порядок. Из (7) находим наклоны сплайна $m_j = L_2'(x_j)$ для внутренних узлов отрезка $[a, b]$ и $m_0 = L_2'(x_0)$, $m_n = L_2'(x_n)$ для крайних узлов:

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} + \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ m_0 &= \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} + \frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0}, \\ m_n &= \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} + \frac{f_n - f_{n-2}}{x_n - x_{n-2}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что формулы (8) являются формулами численного дифференцирования второго порядка точности относительно шага. Для замкнутых изолиний все наклоны m_j должны вычисляться по первой из формул системы (8), так как все узлы такой изолинии внутренние. Введем обозначения для *локальных наклонов* отрезков исходной ломаной:

$$r_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}, \quad h_j = x_j - x_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Тогда формулы (8) относительно наклонов примут вид

$$m_j = \frac{h_{j+1} r_j + h_j r_{j+1}}{h_{j+1} + h_j}, \quad m_0 = r_1 + \frac{h_1(r_1 - r_2)}{h_2 + h_1}, \quad m_n = r_n + \frac{h_n(r_n - r_{n-1})}{h_n + h_{n-1}}. \tag{10}$$

Замечание 2. Кубический сплайн $S_3(x)$, для которого наклоны m_j вычисляются по формулам (8), достаточно хорошо приближает гладкие функции $f(x)$. В работе [5, с. 73] для таких функций $f(x)$ получены точные оценки погрешности интерполяции

$$\left|S_3(x) - f(x)\right| \leqslant C_0 \max\left\{ h_j^2 : j = \overline{1,n} \right\}, \quad \left|S_3'(x) - f'(x)\right| \leqslant C_1 \max\left\{ h_j : j = \overline{1,n} \right\},$$

где значения констант C_0 и C_1 определяются свойствами $f(x)$ и $S_3(x)$. □

8. Наклоны сплайна по Акиме. Метод интерполяции (сглаживания) Акимы получил довольно широкое распространение. Сам же метод впервые был опубликован в работе [7], и далее в работе [8] Акима нашел развитие отдельным его положениям. В работах [7, 8] автор пытается формализовать наиболее важные черты подхода рисования “от руки” изолиний по опорным точкам. Хорошо известно, что по заданному набору опорных точек на плоскости несложно провести гладкую кривую. В статье [8] Акима отмечает основные аспекты рисования кривых “от руки”. Во-первых, такие кривые всегда получаются гладкими. Во-вторых, важнейшей чертой рисования “от руки” является локальность рисования. Так, при

рисовании “от руки” поведение кривой между двумя опорными точками восстанавливается исходя из очень ограниченного числа набора исходных точек.

Несложно заметить, что упомянутые аспекты рисования “от руки” в полной мере формализуются сплайновыми кривыми. Ко времени появления публикаций [7, 8] сплайновая интерполяция уже была хорошо известна по работам [9–12], о чем упоминает Акима и здесь же критикует сплайновые кривые за их “ненатуральность” (цитата из [8, с. 589]), если сравнивать с кривыми, нарисованными “от руки”. В работах [7, 8] Акима также строит кубические сплайны по формуле (4). Их отличает только значения наклонов.

Рассмотрим, как формируются наклоны m_j в сплайнах Акимы. Наклоны m_j, $j = 2, 3, \ldots, n-2$, в точках x_j определяются по пяти значениям исходной функции $f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}$ по формуле

$$m_j = \begin{cases} \dfrac{|r_{j+2} - r_{j+1}| \cdot r_j + |r_j - r_{j-1}| \cdot r_{j+1}}{|r_{j+2} - r_{j+1}| + |r_j - r_{j-1}|}, \\ \dfrac{r_j + r_{j+1}}{2}, \quad \text{если} \quad r_{j+2} = r_{j+1} \quad \text{и} \quad r_j = r_{j-1}, \end{cases} \tag{11}$$

где r_j — локальные наклоны отрезков исходной ломаной (9). По формуле (11) нельзя найти крайние значения m_0, m_1, m_{n-1}, m_n. Для их вычисления не достает величин r_{-1}, r_0, r_{n+1}, r_{n+2} или f_{-2}, f_{-1}, f_{n+1}, f_{n+2}, которые предлагается доопределить по параболе. Обозначим через (y_1, t_1), (y_2, t_2), (y_3, t_3) крайние три точки соответственно либо (f_2, x_2), (f_1, x_1), (f_0, x_0), либо (f_{n-2}, x_{n-2}), (f_{n-1}, x_{n-1}), (f_n, x_n), по которым строится парабола

$$y = y_3 + g_1(t - t_3) + g_2(t - t_3)^2. \tag{12}$$

По ней находим значения y_4, y_5, которые будут соответствовать либо f_{-1}, f_{-2}, либо f_{n+1}, f_{n+2} в точках t_4, t_5. Значения координат t_4, t_5 удовлетворяют условию

$$t_5 - t_3 = t_4 - t_2 = t_3 - t_1 \quad \text{или} \quad t_5 - t_4 = t_3 - t_2, \quad t_4 - t_3 = t_2 - t_1. \tag{13}$$

Из уравнений (12) и (13) имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= y_3 + g_1(t_1 - t_3) + g_2(t_1 - t_3)^2, \quad & y_2 &= y_3 + g_1(t_2 - t_3) + g_2(t_2 - t_3)^2, \\ y_4 &= y_3 + g_1(t_4 - t_3) + g_2(t_4 - t_3)^2, \quad & y_5 &= y_3 + g_1(t_5 - t_3) + g_2(t_5 - t_3)^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Обозначим наклоны для точек параболы через $s_j = \dfrac{y_j - y_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, \quad j = 2, 3, 4, 5.$

Значения s_2, s_3 известны. Для крайних точек начала интервала (f_2, x_2), (f_1, x_1), (f_0, x_0), соответственно, (y_1, t_1), (y_2, t_2), (y_3, t_3) имеем

$$s_2 = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} = r_2, \quad s_3 = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = r_1, \quad s_4 = \frac{f_{-1} - f_0}{x_{-1} - x_0} = r_0, \quad s_5 = \frac{f_{-2} - f_{-1}}{x_{-2} - x_{-1}} = r_{-1}. \tag{15}$$

Для крайних точек конца интервала (f_{n-2}, x_{n-2}), (f_{n-1}, x_{n-1}), (f_n, x_n), соответственно, (y_1, t_1), (y_2, t_2), (y_3, t_3) имеем

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = r_{n-1}, \quad & s_3 &= \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = r_n, \\ s_4 &= \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n} = r_{n+1}, \quad & s_5 &= \frac{f_{n+2} - f_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}} = r_{n+2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Найти надо s_4, s_5, которые будут соответствовать крайним значениям либо r_{-1}, r_0 из формулы (15), либо r_{n+1}, r_{n+2} из формулы (16). Из (14) получаем

$$\begin{aligned} s_2 &= g_1 + g_2\big((t_2 - t_3) + (t_1 - t_3)\big), \quad & s_3 &= g_1 + g_2(t_2 - t_3), \\ s_5 &= g_1 + g_2\big((t_2 - t_1) + (t_3 - t_1)\big), \quad & s_4 &= g_1 + g_2(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Отсюда находим значения крайних наклонов s_4, s_5 параболы:

$$s_5 - s_4 = s_4 - s_3 = s_3 - s_2 \quad \text{или} \quad s_4 = 2s_3 - s_2 \quad \text{и} \quad s_5 = 3s_3 - 2s_2.$$

Отметим, что формула (11) вычисления наклонов сплайна m_j имеет геометрическое происхождение. На рис. 9 точками E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 обозначены узлы участка ломаной, для которой строим сплайновую кривую. Через среднюю точку E_3 проходит отрезок CD — это касательная прямая к сплайну в точке E_3. Следовательно, наклон сплайна m_3 равен тангенсу угла наклона отрезка CD к оси OX. В работе [8] показано, что значение m_3 в точке E_3 будет вычисляться по формуле (11), если координаты точек C и D будут удовлетворять отношению длин отрезков $E_2C/CA = E_4D/DB$.

Замечание 3. (Эффект продолжения прямой.) Пусть на отрезке $[x_{j-2}, x_{j-1}]$ сплайн является прямой линией, тогда по следствию 1 его наклоны совпадают: $m_{j-2} = m_{j-1} = r_{j-1}$. Требуется восстановить сплайн на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$.

Пусть $|r_{j-1} - r_j| \ll |r_{j+1} - r_{j+2}|$. Это случается, когда смежные наклоны $r_{j-1} \simeq r_j$, а $r_{j+1} \neq r_{j+2}$. Тогда по формуле Акимы (11) получим значение $m_j = r_{j-1} = r_j$ вне зависимости от значений $r_{j+1} \neq r_{j+2}$. Это означает, что прямую сплайна от точки x_{j-2} к точке x_{j-1} надо продолжить до x_j, даже если $r_j \neq r_{j+1}$. Это в какой-то степени отражает поведение рисования изолиний "от руки", когда перед продолжением изолинии заглядывают вперед (и назад) и оценивают распределение точек по исходной ломаной. Отметим, что по Лагранжу значение m_j по формуле (10) всегда определяется ровно двумя наклонами r_j и r_{j+1} — нет "заглядывания" ни вперед, ни назад, и не может быть эффекта продолжения прямой. На рис. 10–13 приводятся примеры интерполяции на этот случай по Акиме и Лагранжу для замкнутых и незамкнутых изолиний. На рис. 10–13 номером 1 обозначаются интерполяционные сплайны, а номером 2 — исходные ломаные с выделенными узлами интерполяции. Там, где кривые совпадают, поверху рисуются отрезки ломаной. Очевидно, что рассмотренный эффект продолжения прямой в визуальном плане ставит в более выгодное положение интерполяцию по Акиме, чем по Лагранжу. □

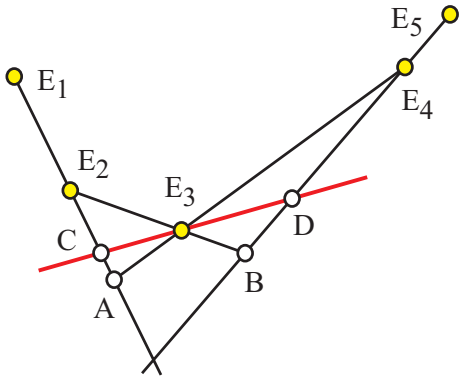

Рис. 9. Определение наклона сплайна m_j в точке E_3

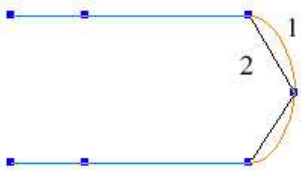

Рис. 10. Сплайн по Акиме

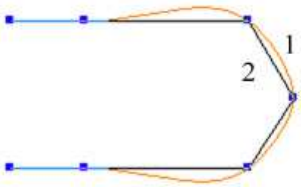

Рис. 11. Сплайн по Лагранжу

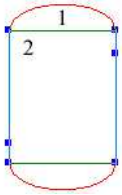

Рис. 12. По Акиме

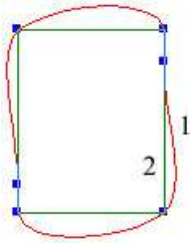

Рис. 13. По Лагранжу

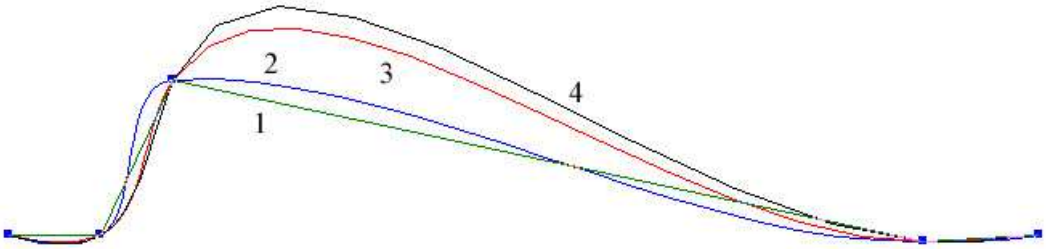

Рис. 14. Исходная ломаная (1), по Акиме (2), по Лагранжу (3), оптимальный сплайн (4)

Замечание 4. (Эффект длинных отрезков.) Случаи, когда

$$|r_{j-1} - r_j| \ll |r_{j+1} - r_{j+2}| \quad \text{или} \quad |r_{j-1} - r_j| \gg |r_{j+1} - r_{j+2}|,$$

разобраны в замечании 3. Рассмотрим случай, когда значения $|r_{j-1} - r_j|$ и $|r_{j+1} - r_{j+2}|$ одного порядка. Положим для простоты изложения $|r_{j-1} - r_j| = |r_{j+1} - r_{j+2}|$. Тогда согласно Акиме по формуле (11) наклон сплайна составит $m_j = (r_j + r_{j+1})/2$. Длины отрезков h_j исходной ломаной не участвуют в назначении наклонов m_j по Акиме.

Наклоны по Лагранжу вычисляются по формуле (10) $m_j = (h_{j+1} r_j + h_j r_{j+1})/(h_{j+1} + h_j)$. Очевидно, что значения m_j существенно зависят от длин отрезков h_j. Для случая, когда длины h_j одного порядка, можно считать $m_j = (r_j + r_{j+1})/2$. Пусть теперь $h_{j+1} \gg h_j$, тогда по Лагранжу $m_j = r_j$. В то же время при наклонах r_j одного порядка по Акиме имеем $m_j = (r_j + r_{j+1})/2$. Это значение может сильно отличаться от $m_j = r_j$. Например, если $|r_j| \simeq |r_{j+1}|$, но разного знака, то по Акиме получим $m_j = 0$. Этот случай показан на рис. 14. Сплайн по Лагранжу "красиво" огибает длинный отрезок ломаной, но очень далеко от

него отстает. Кривая оптимального сплайна (см. раздел 9) поднимается еще выше сплайна по Лагранжу. Сплайн по Акиме не такой “эффектный”, но в большей степени напоминает исходную ломаную. □

Замечание 5. В работе [13] для наклонов Акимы (11) приводится оценка погрешности интерполяции сплайна $S_3(x)$ для достаточно гладких функций: $\left|S_3(x) - f(x)\right| \leqslant C \cdot \max\left\{h_j^2 \,:\, j = \overline{1,n}\,\right\}$, где константа C определяется свойствами $f(x)$ и $S_3(x)$. □

9. Оптимальные наклоны сплайна. Под оптимальными наклонами m_j будем понимать такие их значения, которые переводят сплайн $S_3(x)$ в класс функций $C^{(3-1)}[a,b]$ непрерывных вместе со своими производными до второго порядка. Дефект такого сплайна не превышает единицы. Введем обозначения для длин интервалов $h_j = x_j - x_{j-1}$, где $j = 1, 2, \ldots, n$. Свойство, что вторая производная $S_3''(x)$ является непрерывной функцией, требует в каждом внутреннем узле x_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ отрезка $[a,b]$ выполнения равенства вторых производных слева и справа: $S_3''(x_i - 0) = S_3''(x_i + 0)$. Значение $S_3''(x_j - 0)$ находим из уравнения (4), составленного для отрезка $[x_{j-1}, x_j]$, а значение $S_3''(x_j + 0)$ находим из уравнения (4), составленного для отрезка $[x_j, x_{j+1}]$:

$$S_3''(x_j - 0) = \frac{6}{h_j^2}\, f_{j-1} - \frac{6}{h_j^2}\, f_j + \frac{2}{h_j}\, m_{j-1} + \frac{4}{h_j}\, m_j,$$
$$S_3''(x_j + 0) = -\frac{6}{h_{j+1}^2}\, f_j + \frac{6}{h_{j+1}^2}\, f_{j+1} - \frac{4}{h_{j+1}}\, m_j - \frac{2}{h_{j+1}}\, m_{j+1}.$$

Сравнивая значения $S_3''(x_j - 0) = S_3''(x_j + 0)$, получим систему из $n-1$ линейных алгебраических уравнений относительно $n+1$ неизвестных наклонов:

$$\frac{h_{j+1}}{3(h_{j+1} + h_j)}\, m_{j-1} + \frac{2}{3}\, m_j + \frac{h_j}{3(h_{j+1} + h_j)}\, m_{j+1} = \frac{h_{j+1} r_j + h_j r_{j+1}}{h_{j+1} + h_j}\,. \tag{17}$$

Отметим, что величины правой части системы уравнений (17) являются наклонами сплайна по Лагранжу (10). Если решать систему (17) методом итераций, то правая часть будет хорошим ее начальным значением. Для упрощения записи введем обозначение $\alpha_j = h_j/(h_{j+1} + h_j)$ и $1 - \alpha_j = h_{j+1}/(h_{j+1} + h_j)$, тогда система (17) примет вид

$$\frac{1 - \alpha_j}{3}\, m_{j-1} + \frac{2}{3}\, m_j + \frac{\alpha_j}{3}\, m_{j+1} = (1 - \alpha_j) r_j + \alpha_j r_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{18}$$

Для решения системы (18) дополним ее двумя условиями для крайних узлов x_0 и x_n. Краевые значения наклонов m_0 и m_n определим согласно формулам (10) по Лагранжу:

$$m_0 = r_1 + \alpha_1(r_1 - r_2), \quad m_n = r_n + (1 - \alpha_{n-1})(r_n - r_{n-1}). \tag{19}$$

Замечание 6. Краевые условия (19) выставляются для незамкнутых изолиний. Для замкнутой изолинии в крайних для нее точках (f_0, x_0) и (f_n, x_n) выполняются условия периодичности:

$$f_0 = f_n, \quad f_{n+1} = f_1 \quad \text{и} \quad h_{n+1} = h_1 = x_1 - x_0,$$
$$m_0 = m_n, \quad m_{n+1} = m_1, \quad r_{n+1} = r_1,$$
$$S_3''(x_0 - 0) = S_3''(x_n + 0).$$

При условии (19) уравнение $S_3''(x_0 - 0) = S_3''(x_n + 0)$ в форме (18) для $j = n$ запишется в виде

$$\frac{1 - \alpha_n}{3}\, m_{n-1} + \frac{2}{3}\, m_n + \frac{\alpha_n}{3}\, m_1 = (1 - \alpha_n) r_n + \alpha_n r_1, \quad \alpha_n = \frac{h_n}{h_{n+1} + h_n} = \frac{h_n}{h_1 + h_n}\,. \tag{20}$$

Таким образом, для замкнутой изолинии необходимо найти $n+1$ неизвестное: $m_0, m_1, \ldots, m_n$. Для их поиска составляем систему из $n+1$ уравнения: $n-1$ уравнение системы (18), дополняем уравнением (20) и уравнение $m_0 = m_n$. □

Вычислив все наклоны сплайна m_j, далее по формуле (4) можно восстановить сплайн на каждом из отрезков $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$. В работах [5, с. 101] и [14, с. 182] показано, что погрешность интерполяции оптимального сплайна для достаточно гладких функций имеет второй порядок точности. Следует отметить, что в задаче построения изолиний гидрометеорологических полей точность имеет первостепенную роль. Числовые гидрометеорологические поля принимаются от различных прогностических центров. Размеры сеточных полей могут меняться в широких пределах. В этих условиях варьировать каким-либо

образом шагами h_j ломаной с целью повышения точности проведения изолиний не приходится. Интерполяционная изолиния должна быть гладкой и повторять рисунок исходной ломаной.

Наклоны сплайнов m_j по Лагранжу и по Акиме дают надежные ориентиры поведения сплайновых кривых, так как значения m_j вычисляются по исходным данным. Оптимальный же сплайн формирует кривую повышенной гладкости. Гладкость кривой достигается ценой изменения наклонов m_j, вычисленных по Лагранжу. Они составляют правую часть системы уравнений (17) для вычисления наклонов оптимального сплайна. Решением системы будет вектор, отличный от правых частей m_j, вычисленных по Лагранжу.

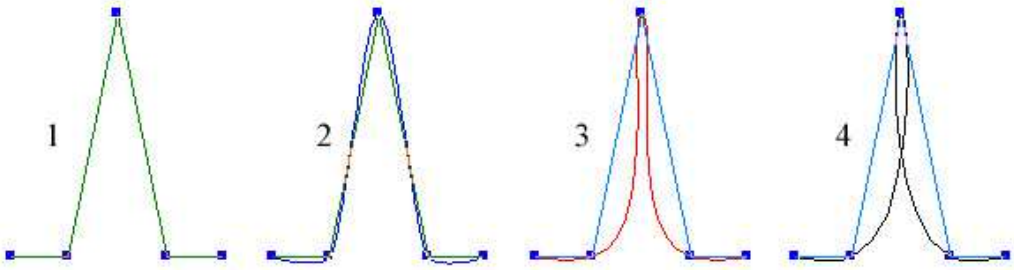

Рис. 15. Исходная ломаная (1), по Акиме (2), по Лагранжу (3), оптимальный сплайн (4)

Рассмотрим пример на рис. 15, где исходная ломаная осциллирует в средней точке. Сплайны по Акиме и по Лагранжу повторяют рисунок ломаной. Кривая по Лагранжу немного хуже — сказывается “эффект длинных отрезков”. В оптимальном же сплайне наклоны m_j по Лагранжу изменились в такой степени, что сплайновая кривая в средней точке поменяла свой вход на выход. Ее вид стал далек от исходной ломаной.

Замечание 7. Анализ интерполяции кубическими сплайнами показывает, что наиболее важным элементом в вычислении сплайновой кривой является шаг определения ее наклонов. Именно наклоны m_j задают ориентиры направления сплайновых кривых. Можно заключить, что сплайны по Лагранжу и по Акиме являются в какой-то мере равнозначными, если исключить длинные и короткие отрезки h_j исходной ломаной. Следует отметить, что в задаче построения изолиний произвольных двумерных полей нельзя избежать длинных или коротких отрезков. В этой ситуации, естественно, следует отдать предпочтение сплайновой интерполяции по Акиме. □

10. Сглаживающая адаптивная аппроксимация изолиний. Под аппроксимацией изолинии будем понимать построение приближенной ее кривой, наиболее близко проходящей около заданных опорных точек изолинии. В вычислениях будем исходить из ее параметрического представления $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (см. раздел 5). Имеем две монотонные по параметру t_k последовательности точек (x_k, t_k) и (y_k, t_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, которые и определяют опорные точки (x_k, y_k) изолинии. Далее будет рассматриваться функция $y = f(x)$, которую надо относить в равной степени к $x = x(t)$ и $y = y(t)$ параметрического задания изолиний.

При построении изолиний использовалась линейная интерполяция значений исходного числового поля, заданного в узлах регулярной сетки. Линейная интерполяция является довольно грубым приближением. Случайные ошибки в значениях функций сильно искажают интерполяционные многочлены высоких степеней, а при интерполяции многочленами низких степеней теряется полезная информация. Поэтому при наличии случайных ошибок предпочитают применять “сглаживающую” аппроксимацию такими многочленами, которые минимизируют взвешенную среднюю квадратическую ошибку аппроксимации. Общую постановку задачи можно найти в работе [15, с. 683]. Не уменьшая общности, рассмотрим в качестве аппроксимирующего многочлена $z(x)$ на отрезке $[a, b]$ линейную комбинацию четырех функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$:

$$z(x) = v_0\varphi_0(x) + v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + v_3\varphi_3(x), \tag{21}$$

где v_i — искомые коэффициенты модели. Пусть $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$, где x_i — произвольные m последовательных опорных точек на изолинии. Значения неизвестных четырех коэффициентов v_k многочлена $z(x)$ определяем такими, чтобы минимизировать среднюю квадратическую ошибку аппроксимации изолинии по m точкам на $[a, b]$:

$$\min_{v_0, v_1, v_2, v_3} \sum_{k=1}^{m} \big[f_k - z(x_k)\big]^2. \tag{22}$$

Определим вид многочленов $\varphi_k(x)$ в рамках линейной модели (21). Рассмотрим еще один аппроксимирующий многочлен $w(x) = u_0t_0(x) + u_1t_1(x) + u_2t_2(x) + u_3t_3(x)$.

Обозначим векторы-столбцы: $\varphi(x) = \big(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\big)^\top$ и $t(x) = \big(t_0(x), t_1(x), t_2(x), t_3(x)\big)^\top$. Пусть $\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)^\top$ и $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)^\top$, тогда $z(x) = \boldsymbol{v}^\top\varphi(x)$ и $w(x) = \boldsymbol{u}^\top t(x)$.

Теорема 2. *Пусть $z(x) = \boldsymbol{v}^\top\varphi(x)$ и $w(x) = \boldsymbol{u}^\top t(x)$ — два аппроксимирующих многочлена, векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ которых удовлетворяют задаче минимизации* (22). *Если многочлены $t_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ связаны линейной системой алгебраических уравнений $t(x) = A\varphi(x)$, где A — (4×4)-матрица действительных чисел и $\det A \neq 0$, то $w(x)=z(x)$.*

Доказательство. Имеем $z(x) = \boldsymbol{v}^\top\varphi(x)$ и $w(x) = \boldsymbol{u}^\top t(x) = \boldsymbol{u}^\top\big(A\varphi(x)\big) = \big(A^\top\boldsymbol{u}\big)^\top\varphi(x)$. Таким образом, $z(x)$ и $w(x)$ являются линейными комбинациями функций $\varphi_k(x)$. Тогда

$$\min_{v_0,v_1,v_2,v_3}\sum_{k=1}^{m}\big[f_k - z(x_k)\big]^2 = \min_{u_0,u_1,u_2,u_3}\sum_{k=1}^{m}\big[f_k - w(x_k)\big]^2.$$

Следовательно, оптимальные значения векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ связаны системой уравнений $\boldsymbol{v} = A^\top\boldsymbol{u}$ или $\boldsymbol{u} = \big(A^{-1}\big)^\top\boldsymbol{v}$. Отсюда

$$w(x) = \boldsymbol{u}^\top t(x) = \Big(\big(A^{-1}\big)^\top\boldsymbol{v}\Big)^\top\big(A\varphi(x)\big) = \big(\boldsymbol{v}^\top A^{-1}\big)\big(A\varphi(x)\big) = \boldsymbol{v}^\top\big(A^{-1}A\big)\varphi(x) = \boldsymbol{v}^\top\varphi(x) = z(x).$$

□

В рамках модели (21) в качестве $\varphi_k(x)$ будем использовать функции 1, x, x^2, x^3. Выбор четырех слагаемых для $z(x)$ не случаен. В таком виде $z(x)$ является многочленом третьей степени. В этом случае степень $z(x)$ будет согласована с кубической степенью сплайнов, используемых при интерполяции изолиний (см. раздел 6).

Замечание 8. С учетом теоремы 2 набор 1, x, x^2, x^3 покрывает большой класс функций $\varphi_k(x)$ в формуле (22). В качестве примера рассмотрим многочлены Чебышёва первого рода [16, с. 11]:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Благодаря своим свойствам эти многочлены часто рекомендуются к использованию вместо стандартных многочленов $1, x, x^2, \ldots$. Наборы функций $T_k(x)$ и x^k связаны невырожденной системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \\ T_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что использование набора многочленов $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ или 1, x, x^2, x^3 в задаче минимизации (22) является равнозначным. Без сомнения, в массовых вычислениях набор функций 1, x, x^2, x^3 является более эффективным относительно времени вычислений. □

Аппроксимация по формуле (22) возможна, если точек в наборе не меньше четырех. Выбор числа точек в наборе m в большей степени определяется физической природой исходного поля и удаленностью опорных точек. Важно, чтобы значения в точках набора были зависимыми. В нашем случае рассматриваемый метод применяется для построения изолиний различных гидрометеорологических полей. Исходные поля задаются в узлах регулярной сеточной области. Полагаем, что данные в соседних клетках сеточной области являются зависимыми. Если изолиния проходит через клетку, то она связывает две с ней соседние клетки (рис. 16). Поэтому данные в узлах любых трех последовательных отрезков изолинии полагаем зависимыми. На каждом из таких отрезков могут дополнительно размещаться до двух узлов (см. замечание 9). В этих условиях можно считать, что любые восемь последовательных узлов на изолинии являются зависимыми. С учетом сказанного будем считать, что m не больше восьми.

Замечание 9. С целью повысить робастность вычислений по методу наименьших квадратов (22) предлагается на длинных отрезках изолинии дополнительно размещать от одной до двух точек. Необходимость в дополнительных точках связана с эффектом длинных ребер (см. замечание 4). Длинные отрезки являются следствием значительных размеров клеток 150×150 миль расчетной сетки (рис. 8). Это устоявшаяся сеточная область приема/передачи данных гидрометеорологических полей. В настоящее время в практическую работу широко вводится обмен данными на сетках с клетками 30×30 миль и 60×60 миль. □

По найденному аппроксимирующему многочлену $z(x)$ из формулы (21) выполняем пересчет координат использованных точек при вычислении $z(x)$. Новые координаты точек (x, z) укладываем на кривой многочлена $z(x)$ *равномерно* по отрезку $[a, b]$.

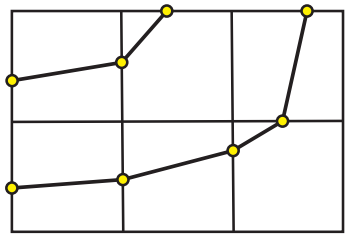

Рис. 16. Зависимость узлов

Адаптивная аппроксимация. Процедура сглаживающей адаптивной аппроксимации изолиний состоит в следующем. Значение m рассматривается в виде суммы двух целых чисел $m = s + r$, где $s \geqslant 0$, $r > 0$. Величины s и r определяются в качестве параметров процедуры сглаживания. По изолинии последовательно перебираются наборы из m точек каждый раз со сдвигом на r новых узлов. Тогда значение параметра s будет показывать количество узлов в пересечении текущего набора из m точек с предыдущим таким же набором.

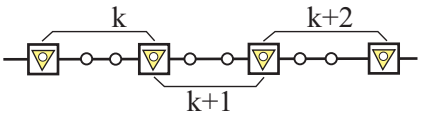

Рис. 17. Модель $\pi = (1, 1, 3)$

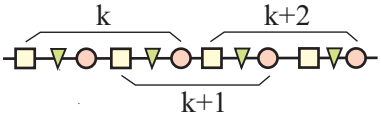

Рис. 18. Модель $\pi = (2, 3, 3)$

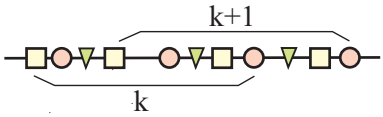

Рис. 19. Модель $\pi = (3, 5, 3)$

Для каждого набора из $m = s + r$ точек последовательно выполняется поиск аппроксимирующего многочлена $z(x)$ решением задачи минимизации (22), а затем пересчет по нему опорных точек текущего набора. Пересчету подлежат r новых точек набора и d узлов из пресечения ($0 \leqslant d \leqslant s$), примыкающих к новым r узлам. Таким образом, параметрами сглаживания выступает тройка целых чисел $\pi = (d, s, r)$. На рис. 17–19 приводятся примеры указанных параметров процедуры адаптивного сглаживания, соответствующие тройкам $\pi = (1, 1, 3)$, $\pi = (2, 3, 3)$ и $\pi = (3, 5, 3)$. Начала узлов таких наборов слева направо обозначаются квадратами, а концы — кругами увеличенного диаметра. Узел начала пересчета обозначается треугольником. На рис. 17 параметр $s = 1$, тогда узлы конца предыдущего набора и начало следующего будут совпадать (квадраты и круги накладываются). Поскольку $d = s = 1$, то квадрат и треугольник каждого набора будут налагаться.

Обозначим m значений текущего набора точек через $g_{j+1}, g_{j+2}, \ldots, g_{j+m}$, тогда следующим набором из m точек будут величины $\underbrace{g_{j+r+1}, g_{j+r+2}, \ldots, g_{j+r+(m-r)}}_{s=m-r}, \underbrace{f_{j+m+1}, f_{j+m+2}, \ldots, f_{j+m+r}}_{r}$. Обозначенные наборы из m точек последовательно по изолинии пересекаются друг с другом, а следовательно, влияние результатов аппроксимации будет распространяться от начала изолинии к концу. Это можно интерпретировать как согласованный или адаптивный пересчет значений опорных точек по всей изолинии. Чтобы распространить влияние от конца изолинии к началу, необходимо повторно выполнить *сглаживающую аппроксимацию* наборов точек в обратном направлении. Данную процедуру можно повторять многократно, что с каждым разом приводит к более “гладкому” перераспределению опорных точек по изолинии.

Процедура *сглаживающей аппроксимации* становится объективно необходимой, когда на отрезках исходной кусочно-ломаной изолинии пытаются разместить дополнительные точки. На таких отрезках линейное поведение изолинии будет закрепляться при интерполяции сплайнами (см. разделы 7 и 8). Сглаживающая же аппроксимация будет выравнивать точки изолинии по кубической кривой с учетом ее выпуклости или вогнутости. На рис. 20 показан пример фрагмента карты исходных ломаных изолиний поля температуры воздуха на уровне 850 гПа, а на рис. 21 — тот же фрагмент карты изолиний, но уже после выполнения процедуры сглаживающей аппроксимации. При сглаживании два раза применялась модель $\pi = (2, 3, 3)$ (рис. 18) в прямом направлении по изолиниям и в обратном.

Второй важный случай необходимости применения *сглаживающей аппроксимации* относится к построению изолиний для гидрометеорологических полей, заданных на сеточной области с размерами клеток 30×30 миль и 60×60 миль. На мелкой сетке при линейной интерполяции всегда наблюдается биение изолиний. Сглаживающая аппроксимация позволяет существенно уменьшить такое биение, выравнивает изолинии. Восполнение же данных сплайновой интерполяцией лишь будет повторять биение в гладком варианте. Такое биение изолиний можно наблюдать и на рис. 20, где сеточная область не такая мелкая. После сглаженной интерполяции (рис. 21) биения изолиний исчезают.

Сложность сглаживающей аппроксимации. Решение задачи минимизации (22) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений четвертого порядка. Сложность решения такой системы является константной. Если число точек на изолинии равно n (размерность задачи), то сложность процедуры сглаживающей аппроксимации для изолинии будет линейной $O(n)$.

11. Заключение. Результатом работы является разработанная практическая процедура сглажива-

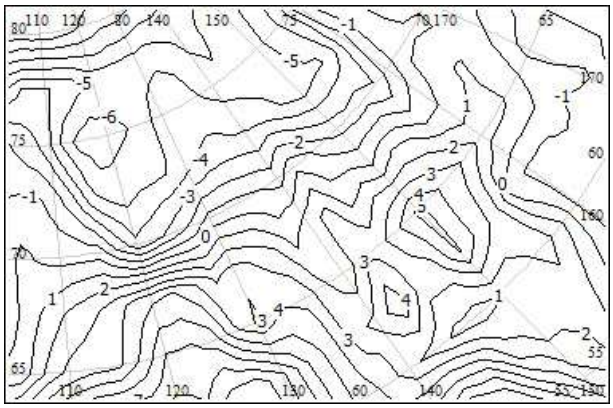

Рис. 20. Исходные ломаные

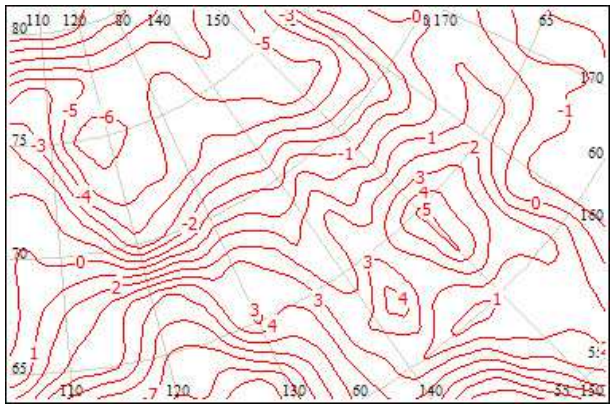

Рис. 21. Сглаживающая аппроксимация

ющей аппроксимации, которая позволяет адаптировать кусочно-линейную изолинию к ее представлению многочленами до третьей степени. Данная процедура позволяет уменьшить влияние ошибок линейной интерполяции при построении изолиний.

Выполнен анализ методов восполнения данных сплайновой интерполяции. Анализу подлежат методы, наиболее часто используемые в практических работах. Показаны слабые и сильные стороны методов, приведены примеры восполнения данных для каждого из рассмотренных случаев.

Важным результатом работы является предложение по формированию границ области построения изолиний. Рассмотренная процедура является в некотором роде универсальной. Границы формируются безотносительно каких-либо физических границ области вычислений. Границы формируются по наличию данных в узлах сеточной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов Б.Н.* Структуры вложенности поля изолиний в задаче градиентного заполнения // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**. 30–40.
2. *Иванов Б.Н.* Решение задачи расчета оптимальных маршрутов судов в рамках геоинформационной системы “ОКЕАН” // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 226–234.
3. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
4. *Баяковский Ю.М., Галактионов В.А., Михайлова Т.Н.* Графор. Графическое расширение фортрана. М.: Наука, 1985.
5. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
6. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.
7. *Akima H.* A method of smooth curve fitting. ESSA Tech. Rep. ERL 101-ITS 73. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1969.
8. *Akima H.* A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures // J. Assoc. Comput. Mach. 1970. **17**, N 4. 589–602.
9. *Schoenberg I.J.* Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. **4**. 45–99.
10. *Schoenberg I.J.* Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. **4**. 112–141.
11. *Hildebrand F.B.* Introduction to numerical analysis. New York: McGraw-Hill, 1956.
12. *Greville T.N.E.* Spline functions, interpolation, and numerical quadrature // Mathematical Methods for Digital Computers. New York: Wiley, 1967. 156–168.
13. *Bica A.M., Degeratu M., Demian L., Paul E.* Optimal alternative to the Akima’s method of smooth interpolation applied in diabetology // J. Surveys in Mathematics and its Applications. 2006. **1**. 41–49.
14. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978.
16. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию
03.09.2018

Adaptive Smoothing Approximation in the Construction Problem for Hydrometeorological Fields

D. N. Ivanov [1]

[1] *Far Eastern Federal University, School of Natural Sciences; ulitsa Sukhanova 8, Vladivostok, 690090, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: ibn8826@mail.ru*

Received September 3, 2018

Abstract: A smoothing approximation procedure that allows one to adapt a piecewise linear isoline to its representation by polynomials up to the third order is considered. The smoothing approximation reduces the effect of linear interpolation errors in isoline plotting. The procedure is based on the least-squares method. The data replenishment methods of spline cubic interpolation, most commonly used in practical work, are analyzed. A universal approach for the formation of boundaries of isoline areas on the basis of data availability at the computational grid nodes is discussed.

Keywords: cubic spline, Akima spline, adaptive interpolation.

References

1. B. N. Ivanov, "Enclosure Structures of Equal Level Line Fields in the Gradient Filling Problem," Vychisl. Metody Programm. **7**, 30–40 (2006).

2. B. N. Ivanov, "Solution of the Optimal Ship Route Problem in the Framework of the OKEAN Geoinformation System," Vychisl. Metody Programm. **13**, 226–234 (2012).

3. K. I. Babenko, *Foundations of Numerical Analysis* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].

4. Yu. M. Bayakovskii, V. A. Galaktionov, and T. N. Mikhailova, *GRAFOR: Graphical Extension of FORTRAN* (Nauka, Moscow, 1985) [in Russian].

5. Yu. S. Zav'yalov, B. I. Kvasov, and V. L. Miroshnichenko, *Methods of Spline Functions* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].

6. B. P. Demidovich and I. A. Maron, *Computational Mathematics* (Nauka, Moscow, 1966; Mir, Moscow, 1973).

7. H. Akima, *A Method of Smooth Curve Fitting*, ESSA Tech. Rep. ERL 101-ITS 73 (U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1969).

8. H. Akima, "A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures," J. Assoc. Comput. Mach. **17** (4), 589–602 (1970).

9. I. J. Schoenberg, "Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions. Part A. On the Problem of Smoothing or Graduation. A First Class of Analytic Approximation Formulae," Quart. Appl. Math. **4**, 45–99 (1946).

10. I. J. Schoenberg, "Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions. Part B. On the Problem of Osculatory Interpolation. A Second Class of Analytic Approximation Formulae," Quart. Appl. Math. **4**, 112–141 (1946).

11. F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1956).

12. T. N. E. Greville, "Spline Functions, Interpolation and Numerical Quadrature," in *Mathematical Methods for Digital Computers* (Wiley, New York, 1967), pp. 156–168.

13. A. M. Bica, M. Degeratu, L. Demian, and E. Paul, "Optimal Alternative to the Akima's Method of Smooth Interpolation Applied in Diabetology," Surv. Math. Appl. **1**, 41–49 (2006).

14. G. I. Marchuk, *Methods of Numerical Mathematics* (Nauka, Moscow, 1989; Springer, New York, 1982).

15. G. A. Korn, and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1968; Nauka, Moscow, 1978).

16. S. Paszkowski, *Numerical Applications of Chebyshev Polynomials and Series* (Naukowe, Warszawa, 1975; Nauka, Moscow, 1983).