

УДК 519.6

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. В. Колос¹, М. В. Колос²

Рассмотрена задача восстановления сигналов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями гиперболического типа при наличии цветных шумов в измерениях. Как известно, задача линейной фильтрации в этом случае, вообще говоря, некорректна. Предложен метод нахождения приближенного решения задачи, основанный на идее регуляризации А. Н. Тихонова и сведении задачи линейной фильтрации в системах с операторными коэффициентами к задаче линейной фильтрации в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Доказана сходимость алгоритма решения задачи.

Ключевые слова: восстановление сигналов, уравнения гиперболического типа, метод регуляризации, линейная фильтрация.

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E_n задана замкнутая ограниченная область P с границей $\partial P = \Gamma$, в каждой точке которой существует единственная нормаль \mathbf{n}_0 ; $C^2(P)$ — множество дважды дифференцируемых в классическом смысле функций $u(x)$ на P ; $C_1^2(P)$ — множество функций $u(x) \in C^2(P)$, для которых выполняется условие

$$u(x)|_{x \in \Gamma} = 0. \tag{1}$$

Введем обозначения: $L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в смысле Лебега на P ; $(\cdot, \cdot)_{0P}$, $\|\cdot\|_{0P}$ — скалярное произведение и норма в $L_2(P)$; $W_2^1(P)$ — положительное соболевское пространство;

$$(u, v)_{1P} = \int_P \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u(x)v(x) \right) dP$$

— скалярное произведение в $W_2^1(P)$; $\|u\|_{1P} = \sqrt{(u, u)_{1P}}$ — норма в $W_2^1(P)$.

Справедливо неравенство $\|u\|_{0P} \leq k \|u\|_{1P} \quad \forall u \in W_2^1(P)$, $k = \text{const} > 0$. Рассмотрим на P линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Nu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + a_0(x)u(x), \tag{2}$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x) \in C(P)$; $C(P)$ — пространство непрерывных функций на P ; $a_0(x) \geq c_0$ для всех $x \in P$; $c_0 = \inf_x \{a_0(x) \mid x \in P\} > 0$.

Предполагаем, что справедливо также неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad x \in P, \tag{3}$$

где λ — положительная константа, ξ_i — произвольные вещественные числа ($i = 1, \dots, n$).

Соотношения (1)–(3) задают в пространстве $L_2(P)$ замкнутый линейный оператор \mathcal{B} , такой, что $\mathcal{B}u = Nu$ для всех $u \in C_1^2(P)$. Оператор \mathcal{B} имеет плотную в $L_2(P)$ область определения $D(\mathcal{B})$, является симметрическим и положительно-определенным, т.е. справедливы соотношения

$$(\mathcal{B}u, v)_{0P} = (u, \mathcal{B}v)_{0P} \quad \forall u, v \in D(\mathcal{B}), \quad (\mathcal{B}u, u)_{0P} \geq c \|u\|_{0P}^2 \quad \forall u \in D(\mathcal{B}), \quad c = \text{const} > 0. \tag{4}$$

¹ Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, 58, 109180, Москва; e-mail: rektorat@uraio.edu

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Введем обозначение $(u, v)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}u, v)_{0P}$ для всех $u, v \in D(\mathcal{B})$. Пополним $D(\mathcal{B})$ по этому скалярному произведению. Полученное пространство обозначим через $H_{\mathcal{B}}$. Примем это пространство за положительное $H_{\mathcal{B}} = H_{\mathcal{B}}^+$ и построим по $H_{\mathcal{B}}^+$ и $L_2(P)$ негативное пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Пусть $f(x) \in L_2(P)$. Тогда выражение $(f, u)_{0P}$, $u \in H_{\mathcal{B}}^+$ определяет непрерывный функционал $l_f(u)$ на $H_{\mathcal{B}}^+$ (непрерывность следует из (4)) и

$$|(f, u)_{0P}| = |l_f(u)| \leq \|f\|_{0P} \|u\|_{0P} \leq c \|f\|_{0P} \|u\|_+, \quad f \in L_2(P), \quad u \in H_{\mathcal{B}}^+ \quad (H_{\mathcal{B}}^+ \subset L_2(P)),$$

где $\|\cdot\|_+$ — норма в $H_{\mathcal{B}}^+$. Пополним $L_2(P)$ по норме

$$\|f\|_- = \sup_u \left(\frac{|(f, u)_{0P}|}{\|u\|_+}, \quad f \in L_2(P), \quad u \in H_{\mathcal{B}}^+, \quad \|u\|_+ \neq 0 \right).$$

Полученное пополнение задает пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Оператор \mathcal{B} непрерывно действует из $H_{\mathcal{B}}^+$ в $H_{\mathcal{B}}^-$.

Пусть $[0, t]$ — некоторый отрезок и переменная $\tau \in [0, t]$. Определим область $Q = P \times [0, t]$. Пусть $L_2(Q)$ — пространство функций $u(\tau, x)$ на Q , отображающих сегмент $[0, t]$ в пространство E_n и таких, что $\int_0^t \|u(\tau)\|_{0P}^2 d\tau = \|u\|_{0Q}^2 < \infty$, где $\|\cdot\|_{0Q}$ — норма в $L_2(Q)$.

Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор $\mathcal{L}_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u$, $u \in D(\mathcal{L}_1)$, где $D(\mathcal{L}_1)$ — множество функций $u(\tau, x)$, заданных в области Q , дважды непрерывно дифференцируемых по $\tau \in [0, t]$. По переменной $x \in P$ функции $u(\tau, x) \in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad u(\tau, x)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения: $W_{20}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\|u\|_{10Q} = \left(\int_Q \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + u \mathcal{B}u \right] dQ \right)^{1/2}; \quad (6)$$

$\|\cdot\|_{10Q}$, $(\cdot, \cdot)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в положительном пространстве $W_{20}^1(Q)$; $W_{20}^{-1}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|v\|_{-10Q} = \sup_u \left[\frac{|(u, v)_{0Q}|}{\|u\|_{10Q}}, \quad v \in L_2(Q), \quad u \in W_{20}^1(Q), \quad \|u\|_{10Q} \neq 0 \right].$$

Обозначим через $D(\mathcal{L}_1^*)$ множество функций $u(\tau, x)$, имеющих хотя бы две производных в классическом смысле по τ , а по x функции $u(\tau, x) \in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)|_{\tau=t} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} = 0, \quad u(\tau, x)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (7)$$

Пусть $W_{2t}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1^*)$ по норме (6), а $W_{2t}^{-1}(Q)$ — негативное пространство для $W_{2t}^1(Q)$; \mathcal{L}_1^* — сопряженный оператор к \mathcal{L}_1 ; $\mathcal{L}_1^* u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u$, $u \in D(\mathcal{L}_1^*)$.

Расширим операторы \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_1^* на все пространство $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать \mathcal{L} и \mathcal{L}^* .

Через (Ω, \mathcal{F}, P) обозначим вероятностное пространство, на котором определены все встречающиеся в дальнейшем случайные величины и функции, а M — оператор математического ожидания; T — знак транспонирования.

Постановка задачи. Пусть полезный q -мерный векторный сигнал $u(\tau, x)$ формируется системой

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u(\tau, x) = v(\tau, x); \quad (8)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = u_1(x), \quad u(\tau, x)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (9)$$

где $v(\tau, x)$ — белый гауссовский шум с известными статистиками, реализации $v(\tau, x) \in W_{2t}^{-1}(Q)$; $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — гауссовские случайные функции с нулевым математическим средним и известными ковариационными операторами.

Измерения проводятся на интервале $[0, t]$ и связаны с $u(\tau, x)$ соотношением

$$r(\tau, x_1) = \mathcal{S}u + \xi(\tau), \quad r(\tau, x_1) \in W_{2t}^{-1}(G),$$

где \mathcal{S} — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства состояний $L_2(Q)$ в пространство измерений $L_2(G)$; $G = \Lambda \times [0, t]$; Λ — множество, в которое оператор \mathcal{S} переводит область P ($\Lambda \subset E_n$); $\xi(\tau)$ — шум измерений (например, вырожденный белый гауссовский шум). Равенства в уравнении наблюдений и (8) понимаются в смысле негативного пространства, решение (8), (9) — в обобщенном смысле [3, 5].

Требуется по измерениям $\{r(\tau, x_1), 0 \leq \tau \leq t\}$ определить последовательность оценок $\hat{u}_\alpha(\tau, x)$ процесса $u(\tau, x)$ в точке $\tau = t$, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M[(z, \mathcal{A}_\alpha r - u)_q^2] = m(t), \quad \mathcal{A}_\alpha r = \hat{u}_\alpha(\tau, x), \tag{10}$$

где \mathcal{A}_α — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства наблюдений $W_{2t}^{-1}(G)$ в пространство состояний $L_2(Q)$; z — произвольный вектор из E_q ;

$$m(t) = \inf_{\mathcal{A}} M[(z, \mathcal{A}r - u)_q^2]; \tag{11}$$

нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам \mathcal{A} , действующим из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$. Пространство таких операторов обозначим через $F(G, Q)$.

Решение линейной задачи фильтрации для систем с распределенными параметрами эквивалентно решению операторного уравнения Винера-Хопфа

$$\mathcal{A}_0 \mathcal{R}_r = \mathcal{R}_{ur}, \tag{12}$$

где \mathcal{A}_0 — линейный оператор, удовлетворяющий критерию (11); \mathcal{R}_r — корреляционный оператор случайного процесса $r(\tau, x_1)$; \mathcal{R}_{ur} — взаимокорреляционный оператор случайных процессов $u(\tau, x)$ и $r(\tau, x_1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Последовательность операторов $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha > 0}$, $\mathcal{A}_\alpha \in F(G, Q)$, которая удовлетворяет критерию (10), находится из операторного уравнения*

$$\mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_r + \alpha \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{R}_{ur}, \tag{13}$$

где α — параметр регуляризации, $\alpha > 0$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $\varphi(\mathcal{A}) = M[(z, \mathcal{A}r - u)_q^2]$, где $\mathcal{A} \in F(G, Q)$, $z \in E_q$. Этот функционал можно записать несколько иначе, а именно

$$\varphi(\mathcal{A}) = (z, \mathcal{A} \mathcal{R}_r \mathcal{A}^* z)_q - 2(z, \mathcal{A} \mathcal{R}_{ru} z)_q + (z, \mathcal{R}_u z)_q, \tag{14}$$

где \mathcal{A}^* — оператор, связанный с оператором \mathcal{A} соотношением $\mathcal{A}^* r = (\mathcal{A}r)^T$; \mathcal{R}_u — корреляционный оператор случайного процесса $u(\tau, x)$; $\mathcal{R}_{ur} = \mathcal{R}_{ru}^*$.

Из последнего выражения для $\varphi(\mathcal{A})$ видно, что минимизировать следует первые два слагаемых.

Введем обозначения $\rho(\mathcal{A}) = (z, \mathcal{A} \mathcal{R}_r \mathcal{A}^* z)_q - 2(z, \mathcal{A} \mathcal{R}_{ru} z)_q$. Отметим, что

$$\inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = -(z, \mathcal{A}_0 \mathcal{R}_{ru} z)_q, \tag{15}$$

где \mathcal{A}_0 удовлетворяет соотношению $\mathcal{A} \mathcal{R}_r = \mathcal{R}_{ur}$. Решение этого уравнения в общем случае некорректно [1–3].

Уравнение (13) имеет единственное решение и доставляет минимум функционалу

$$\varphi_\alpha(\mathcal{A}) = (z, \mathcal{R}_u z)_q + \rho(\mathcal{A}) + \alpha(z, \mathcal{A} \mathcal{A}^* z)_q.$$

Выражение, которое необходимо минимизировать, имеет вид

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}) + \alpha(z, \mathcal{A} \mathcal{A}^* z)_q. \tag{16}$$

Обозначим $\Delta = \mathcal{A} - \mathcal{A}_\alpha$, \mathcal{A}_α — решение (13), и запишем выражение (16), используя это обозначение. После несложных преобразований находим $\rho_\alpha(\mathcal{A}) - \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) = \alpha(z, \Delta\Delta^*z)_q + (z, \Delta\mathcal{R}_r\Delta^*z)_q$. Поскольку $(z, \Delta\mathcal{R}_r\Delta^*z)_q \geq 0$, то справедливо неравенство

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}) \geq \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) + \alpha(z, \mathcal{A}\mathcal{A}^*z)_q \geq \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha). \quad (17)$$

Нижняя грань $\rho_\alpha(\mathcal{A})$ равна

$$\inf_{\mathcal{A}} \{\rho_\alpha(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = -(z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q. \quad (18)$$

Пусть теперь $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$-(z, \mathcal{R}_u z)_q \leq -(z, \mathcal{A}_{\alpha_2} \mathcal{R}_{ru} z)_q \leq -(z, \mathcal{A}_{\alpha_1} \mathcal{R}_{ru} z)_q,$$

которое следует из (18) и неравенства $(z, \mathcal{R}_u z)_q \geq |(z, \mathcal{A}_0 \mathcal{R}_{ru} z)_q|$, так как

$$\inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = (z, \mathcal{R}_u z)_q - (z, \mathcal{A}_0 \mathcal{R}_{ru} z)_q \geq 0.$$

Таким образом, последовательность операторов $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$ задает ограниченную снизу последовательность $\{(z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q\}_{\alpha>0}$ при $\alpha \rightarrow 0$. Эта последовательность монотонно убывает, а значит, существует предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q$.

Так как $\rho(\mathcal{A}) \leq \rho_\alpha(\mathcal{A})$ для $\alpha > 0$ и всех $\mathcal{A} \in F(G, Q)$, то

$$\inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} \leq \inf_{\mathcal{A}} \{\rho_\alpha(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\},$$

а следовательно

$$\inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} \leq -\lim_{\alpha \rightarrow 0} (z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q. \quad (19)$$

Справедливо также неравенство

$$\inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} \geq -\lim_{\alpha \rightarrow 0} (z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q, \quad (20)$$

которое вытекает из соотношения $\rho(\mathcal{A}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho_\alpha(\mathcal{A}) \geq -\lim_{\alpha \rightarrow 0} (z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q$, так как

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}) \geq \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) = \inf_{\mathcal{A}} \{\rho_\alpha(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\}.$$

Из неравенств (18) и (20) следует, что $\inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} (z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q$. В свою очередь, справедливо соотношение

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) - \alpha(z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\alpha^* z)_q = \rho(\mathcal{A}_\alpha) \leq \inf_{\mathcal{A}} \{\rho_\alpha(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} (z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q,$$

но $\rho(\mathcal{A}_\alpha) \geq \inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} (z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q$. Таким образом, находим, что

$$\inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} (z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q \leq \rho(\mathcal{A}_\alpha) \leq \inf_{\mathcal{A}} \{\rho_\alpha(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = -(z, \mathcal{A}_\alpha \mathcal{R}_{ru} z)_q.$$

Переходя к пределу в правой части неравенства по α при $\alpha \rightarrow 0$, получаем, что

$$\inf_{\mathcal{A}} \{\rho(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in F(G, Q)\} = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(\mathcal{A}_\alpha). \quad (21)$$

Следовательно, последовательность решений $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$ операторного уравнения (13) является решением задачи фильтрации [8–11].

Приближенное решение задачи линейной фильтрации. Пусть $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — ортогональная система гладких функций в пространстве $L_2(P)$, такая, что $\rho_i(x)|_{x \in \Gamma} = 0$, и пусть $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — ортогональная система в $L_2(\Lambda)$.

Прежде чем приступить к изложению приближенного метода решения задачи, отметим некоторые свойства рассматриваемых функций и операторов.

Если вектор-функция $u(\tau, x) \in W_{2t}^{-1}(Q)$, то $u(\tau, x)$ можно представить в виде $u(\tau, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(\tau) \rho_i(x)$, $\vartheta_i(\tau) \in W_{2t}^{-1}[0, t]$. Действительно, применим к функции $u(\tau, x)$ изометрический оператор j_t^* , который переводит пространство $W_{2t}^{-1}[0, t]$ в $L_2[0, t]$ (подробней об операторе j_t^* и обратном к нему D_t^* см. в [3–5]), и получим $j_t^* u(\tau, x) = \psi(\tau, x) \in L_2(Q)$ и $\psi(\tau, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(\tau) \rho_i(x)$, $\beta_i(\tau) \in L_2[0, t]$. Используя оператор D_t^* , обратный к j_t^* , находим

$$u(\tau, x) = \sum_{i=1}^{\infty} D_t^* \beta_i(\tau) \rho_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(\tau) \rho_i(x), \tag{22}$$

где $\vartheta_i(\tau) = D_t^* \beta_i(\tau)$.

Пусть $\vartheta(\tau) = \{\vartheta_1(\tau), \vartheta_2(\tau), \dots, \vartheta_k(\tau), \dots\}$ и $\rho(x) = \{\rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_k(x), \dots\}$ — бесконечные векторы. Тогда функцию $u(\tau, x) \in W_{2t}^{-1}(Q)$ можно представить в виде $u(\tau, x) = \vartheta^T(\tau) \rho(x)$.

Аналогично, функцию $g(\tau, x) \in W_{2t}^{-1}(G)$ можно записать в виде $g(\tau, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(\tau) \lambda_i(x) = \gamma^T(\tau) \lambda(x)$, где $\lambda(x) = \{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots\}$ и $\gamma(\tau) = \{\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau), \dots\}$ являются бесконечными векторами с координатами из $L_2(\Lambda)$ и $W_2^{-1}[0, t]$ соответственно, а $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — ортогональная система функций в $L_2(\Lambda)$.

Лемма 1. *Для того чтобы оператор \mathcal{A} , действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$ и определяемый выражением*

$$\mathcal{A}g \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(\tau) \rho_i(x), \tag{23}$$

был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\vartheta(\tau)$ имел вид

$$\vartheta(\tau) = \int_0^{\tau} H(\tau, s) \gamma(s) ds, \tag{24}$$

где $H(\tau, s)$ — бесконечная матрица с элементами $h_{ij}(\tau, s)$, принадлежащими по аргументу s положительному пространству $W_2^1[0, t]$.

Доказательство. Сначала остановимся на необходимости. Пусть оператор \mathcal{A} — непрерывный. Тогда для каждого $i = 1, 2, \dots$ выражение $\vartheta_i(\tau) = (\mathcal{A}g, \rho_i)_{0P}$ является линейным непрерывным функционалом над $W_{2t}^{-1}(Q)$ (в силу непрерывности оператора \mathcal{A} и скалярного произведения в $L_2(P)$).

Согласно обобщенной теореме Рисса о виде линейного непрерывного функционала в оснащённом гильбертовом пространстве [3], всякий линейный функционал в W_2^{-1} имеет вид $\Phi(u) = \langle u, v \rangle$, где v — некоторый элемент из W_2^1 , однозначно определяемый элементом u ; при этом $\|\Phi\| = \|v\|_1$. Тогда

$$\vartheta_i(\tau) = (\mathcal{A}g, \rho_i)_{0P} = \langle g, h_i \rangle, \tag{25}$$

где $h_i(\tau, x) \in W_{2t}^1(G)$ и определяется единственным образом.

Элемент $h_i(\tau, x)$ можно представить в виде $h_i(\tau, x) = \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij}(\tau) \lambda_j(x)$, $h_{ij}(\tau) \in W_2^1[0, t]$, $\{\lambda_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональная система функций в $L_2(\Lambda)$. Выражение (25), с учетом полученного выше соотношения и (22), запишется следующим образом: $h_i(\tau, x) = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(\tau) \lambda_j(x), \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}(\tau) \lambda_k(x) \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \gamma_j(\tau), h_{ij}(\tau) \rangle$.

Достаточность очевидна.

Как известно, если оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве имеет матричное представление, то он ограничен [3, 4], т.е. выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik} x_k \right|^2 \leq N^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \tag{26}$$

для любых x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющих неравенству $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$; N — постоянная, зависящая от оператора \mathcal{A} .

Это представление понадобится при доказательстве теоремы сходимости. Перейдем к решению задачи фильтрации. Приближенное значение состояния системы (8), (9) будем искать в виде конечной суммы

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^k \vartheta_i(\tau) \rho_i(x), \quad (27)$$

где $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в $L_2(P)$, $\rho_i(x)|_{x \in \Gamma} = 0$, а $\vartheta_i(\tau)$ находятся из соотношений

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u_k(\tau, x)}{\partial \tau^2}, \rho_j \right)_{0P} + (\mathcal{B}u, \rho_j)_{0P} = (v, \rho_j)_{0P}, \\ u_k(0, x) = \sum_{i=1}^k \vartheta_i(0) \rho_i(x) = u_0(x), \\ \left. \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \sum_{i=1}^k \left. \frac{d\vartheta_i(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \rho_i(x) = u_1(x). \end{cases} \quad (28)$$

Подставляя соотношение (27) в (28), получаем уравнения для определения $\vartheta_j(\tau)$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vartheta_j(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{i=1}^k \vartheta_i(\tau) (\mathcal{B}\rho_i, \rho_j)_{0P} = (v, \rho_j)_{0P}, \\ \vartheta_j(0) = (u_0(x), \rho_j)_{0P}, \\ \left. \frac{d\vartheta_j(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = (u_1(x), \rho_j)_{0P}, \\ j = 1, 2, \dots, k. \end{cases} \quad (29)$$

Задача (29) является обобщенной задачей Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k .

Наблюдения для приближенной задачи построим следующим образом:

$$(r(\tau), \lambda_i)_{0\Lambda} = (\mathcal{S}u, \lambda_i)_{0\Lambda} + (\xi, \lambda_i)_{0\Lambda}, \quad (30)$$

где $(\cdot, \cdot)_{0\Lambda}$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\Lambda)$.

Будем считать, что наблюдается процесс $\{r_m(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$, связанный с $\vartheta(\tau)$ соотношением

$$r_m^i(\tau) = (r(\tau), \lambda_i)_{0\Lambda} = \sum_{j=1}^k \vartheta_j(\tau) (\mathcal{S}\rho_j, \lambda_i)_{0\Lambda} + (\xi, \lambda_i)_{0\Lambda}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m < \infty. \quad (31)$$

Введем обозначения. Пусть $\vartheta(\tau)$ — k -мерный вектор с элементами $\{\vartheta_i(\tau)\}_{i=1}^k$, F_k — матрица размерности $k \times k$, $F_k^{ij} = (\mathcal{B}\rho_i, \rho_j)_{0P}$, Gv — матрица размера $1 \times k$, $(Gv)_i = (v, \rho_i)_{0P}$, ϑ_0 — случайный вектор с координатами $\vartheta_{0j} = (u_0(x), \rho_j)_{0P}$, ϑ_{10} — вектор с координатами $\vartheta_{10j} = (u_1(x), \rho_j)_{0P}$, C_k — матрица $k \times m$, $C_k^{lj} = (\mathcal{S}\rho_j, \lambda_l)_{0\Lambda}$, $r_m(\tau)$ — вектор наблюдений, $r_m^l(\tau) = (r(\tau), \lambda_l)_{0\Lambda}$, $w(\tau)$ — шум, $w_l = (\xi, \lambda_l)_{0\Lambda}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $l = 1, 2, \dots, m$.

С учетом введенных обозначений приближенную задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать в следующем виде: векторный случайный процесс $\vartheta(\tau)$ моделируется системой

$$\frac{d^2 \vartheta(\tau)}{d\tau^2} = F_k \vartheta(\tau) + Gv(\tau), \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \left. \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \vartheta_{10}, \quad (32)$$

где Gv — белый шум.

Наблюдается процесс $\{r_m(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$, связанный с $\vartheta(\tau)$ соотношением

$$r_m(\tau) = C_k \vartheta(\tau) + w(\tau). \quad (33)$$

Требуется найти последовательность оценок $\{\widehat{\vartheta}_\alpha(\tau)\}_{\alpha>0}$ процесса $\vartheta(\tau)$ в момент $\tau = t$, такую, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M \left[(z, \vartheta(t) - \widehat{\vartheta}_\alpha)_k^2 \right] = m(t), \quad m(t) = \inf_{\mathcal{H}} \left\{ M \left[(z, \vartheta(t) - \mathcal{H}r_m(t))_k^2 \right] \right\}, \quad (34)$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам \mathcal{H} , действующим из пространства наблюдений в пространство состояний, \mathcal{H} — определяется соотношением $\mathcal{H}r_m = \int_0^t h(t, \tau)r_m(\tau) d\tau$, z — произвольный вектор из E_k .

Имеют место следующие статистики:

$$\begin{aligned} M[\vartheta_0] &= 0, & M[\vartheta_0\vartheta_0^T] &= P_0, & P_0^{ij} &= (\mathcal{U}_0\rho_i, \rho_j)_{0P}, & i, j &= 1, 2, \dots, k, \\ M[\vartheta_{10}] &= 0, & M[\vartheta_{10}\vartheta_{10}^T] &= P_{10}, & P_{10}^{ij} &= (\mathcal{U}_1\rho_i, \rho_j)_{0P}, & i, j &= 1, 2, \dots, k, \\ M[Gv(\tau)] &= 0, & M[Gv(\tau)(Gv(\sigma))^T] &= Q(\tau)\delta(\tau - \sigma), & Q_{ij}(\tau) &= (\mathcal{V}\rho_i, \rho_j)_{0P}, \\ M[w(\tau)] &= 0, & M[w(\tau)w^T(\sigma)] &= R(\tau)\delta(\tau - \sigma), & R_{sl}(\tau) &= (\mathcal{W}\lambda_s, \lambda_l)_{0L}, \end{aligned}$$

$s, l = 1, 2, \dots, m$, $R(\tau)$ — матрица порядка m , $R(\tau) \geq 0$, \mathcal{U}_0 — ковариационный оператор процесса $u_0(x)$, \mathcal{U}_1 — ковариационный оператор процесса $u_1(x)$, \mathcal{V} — ковариационный оператор процесса $v(\tau, x)$, \mathcal{W} — ковариационный оператор процесса $\xi(\tau, x)$.

Матрица $R(\tau)$ может быть вырожденной. Поэтому для решения задачи фильтрации (32)–(34) необходимо использовать алгоритм, аналогичный полученному в [3, 5].

Покажем, что построенное по задаче (32)–(34) при $k \rightarrow \infty$ приближенное решение задачи линейной оптимальной фильтрации (8)–(11) $\widehat{u}_k^\alpha(\tau, x) = \sum_{i=1}^k \widehat{\vartheta}_i^\alpha(\tau)\rho_i(x)$ сходится в соответствующей норме к точному решению. Для этого докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. Для почти всех t справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} M \left[\|u_k(t, x) - u(t, x)\|_{0P}^2 \right] = 0$, где $u_k(t, x)$ имеет вид (27), а $u(\tau, x)$ — решение уравнения (8), (9) в точке $\tau = t$.

Доказательство. Согласно теореме 5 [6], имеет место соотношение

$$s_k(t, \omega) = \int_0^t |u_k(\tau) - u(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (35)$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, откуда $M[s_k(t, \omega)] = M \left[\int_0^t |u_k(\tau) - u(\tau)|^2 d\tau \right] \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Запишем уравнение Винера–Хопфа для задачи (32)–(34):

$$M[\vartheta(t)r_m^T(\sigma)] = \int_0^t h_{mk}(t, \tau)M[r_m(\tau)r_m^T(\sigma)] d\tau. \quad (36)$$

Регуляризованное уравнение имеет вид

$$M[\vartheta(t)r_m^T(\sigma)] = \int_0^t h_{mk}^\alpha(t, \tau)M[r_m(\tau)r_m^T(\sigma)] d\tau + \alpha h_{mk}^\alpha(t, \sigma). \quad (37)$$

Уравнение (37) можно записать с помощью бесконечных матриц; такое представление понадобится при доказательстве сходимости.

Используя ковариационную матрицу $M[\vartheta(t)r_m^T(\sigma)]$, построим бесконечную матрицу $K_{km}(t, \sigma)$ следующим образом:

$$K_{km}(t, \sigma) = \begin{bmatrix} M[\vartheta(t)r_m^T(\sigma)] & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Эта матрица задает над $W_{2t}^{-1}(G)$ линейный оператор, действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$. Действительно,

для любого $g \in W_{2t}^{-1}(G)$ справедливо соотношение $g = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(\tau)\lambda_j(x)$. Пусть $\hat{h}(t) = \int_0^t K_{km}(t, \tau)\hat{y}(\tau) d\tau$,

где $\hat{y}(\tau)$ — вектор с координатами $y_i(\tau)$. Тогда, согласно лемме 1, функция $h(t, x) = h(g) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(t)\rho_j(x)$

($h_j(t)$ — координаты вектора $\hat{h}(t)$) задает линейный непрерывный оператор, действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$. Таким образом, матрица $K_{km}(t, \tau)$ определяет оператор над $W_{2t}^{-1}(G)$. Обозначим этот оператор через \mathcal{R}_{km} .

Аналогично, бесконечная матрица $K_{mm}(\tau, \sigma)$, построенная по $M[r_m(\tau)r_m^T(\sigma)]$, задает оператор \mathcal{R}_{mm} , действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$.

Пусть

$$H_{mk}(t, \sigma) = \begin{bmatrix} h_{mk}^{\alpha}(t, \sigma) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Тогда, используя бесконечные матрицы, уравнение (37) запишется в виде

$$K_{km}(t, \sigma) = \int_0^t H_{mk}^{\alpha}(t, \tau)K_{mm}(\tau, \sigma) d\tau + \alpha H_{mk}^{\alpha}(t, \sigma),$$

а в операторной форме — в виде

$$\mathcal{A}_{km}^{\alpha} \mathcal{R}_{mm} + \alpha \mathcal{A}_{km}^{\alpha} = \mathcal{R}_{km}. \tag{38}$$

Покажем, что решение уравнения (38) задает приближенное решение (13). Докажем вначале ряд дополнительных фактов.

Лемма 3. *Справедливо соотношение $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \|\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}\| = 0$.*

Доказательство. Для каждого фиксированного t по определению операторной нормы имеем

$$\|\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}\| = \sup_{\varphi, \psi} \left\{ \frac{|([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}]\varphi, \psi)_{0Q}|}{\|\varphi\|_{-1tG} \|\psi\|_{0Q}}; \varphi \in W_{2t}^{-1}(G), \psi \in L_2(Q), \|\varphi\|_{-1tG} \neq 0, \|\psi\|_{0Q} \neq 0 \right\}.$$

Оценим числитель в правой части этого равенства:

$$|([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}]\varphi, \psi)_{0Q}| = |M[(u, \psi)_{0Q}(r, \varphi)_{-1tG} - (u_k, \psi)_{0Q}(r_m, \varphi)_{-1tG}]|.$$

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\begin{aligned} |([\mathcal{R}_{ur} - \mathcal{R}_{km}]\varphi, \psi)_{0Q}| &\leq \left(M[\|u - u_k\|_{0Q}^2] M[\|r\|_{-1tG}^2] \right)^{1/2} + \\ &+ \left(M[\|u_k\|_{0Q}^2] M[\|r - r_m\|_{-1tG}^2] \right)^{1/2} \|\varphi\|_{-1tG} \|\psi\|_{0Q}. \end{aligned}$$

Из леммы 2 следует, что первое слагаемое в правой части при $k \rightarrow \infty$ стремится к 0. Покажем, что $M[\|r - r_m\|_{-1tG}^2] \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Рассмотрим норму $\|r - r_m\|_{-1tG}$. Отметим, что здесь r и r_m понимаются как бесконечные векторы. Координаты вектора \bar{r} имеют вид $r_i = (r, \lambda_i)_{0\Lambda}$, координаты вектора $\bar{r}_m - r_m^i$ имеют вид

$$\bar{r}_m - r_m^i = \begin{cases} (r, \lambda_i)_{0\Lambda}, & i \leq m, \\ 0, & i > m. \end{cases}$$

Кроме того, справедливо равенство $\|\bar{r} - \bar{r}_m\|_{-1tG} = \|r - r_m\|_{-1tG}$, где r и r_m представлены обобщенными

рядами Фурье $j_t^* r = \sum_{i=1}^{\infty} (j_t^* r, \lambda_i)_{0\Lambda} \lambda_i$, $j_t^* r_m = \sum_{i=1}^{\infty} (j_t^* r_m, \lambda_i)_{0\Lambda} \lambda_i$. Тогда при $m \rightarrow \infty$

$$\|\bar{r} - \bar{r}_m\|_{-1tG}^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} (j_t^* r, \lambda_i)_{0\Lambda} \lambda_i \right\|_{0G}^2 \leq 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} \|(j_t^* r, \lambda_i)_{0\Lambda} \lambda_i\|_{0G}^2 = 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} \|(r, \lambda_i)_{0\Lambda} \lambda_i\|_{-1tG}^2 \rightarrow 0,$$

как остаточный член разложения функции в ряд Фурье.

Таким образом, $M[\|r - r_m\|_{-1tG}^2] \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Лемма 4. Для каждого фиксированного t и $\alpha > 0$ имеет место соотношение $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha\| = 0$, где $\mathcal{R}_r^\alpha = \mathcal{R}_r + \alpha I \delta(\tau - \sigma)$ и $\mathcal{R}_{mm}^\alpha = \mathcal{R}_{mm} + \alpha I \delta(\tau - \sigma)$.

Доказательство. Операторы \mathcal{R}_r^α и \mathcal{R}_{mm}^α для всех $\alpha > 0$ определены на всем $W_2^1(G)$. По определению операторной нормы имеем

$$\|\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha\| = \sup_g \left\{ \frac{|\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha]g, g \rangle|}{\|g\|_{1tG}}; g \in W_{2t}^1(G), \|g\|_{1tG} \neq 0 \right\}.$$

Оценим числитель. После несложных преобразований находим

$$|\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha]g, g \rangle| = |M[\langle r_\alpha, g \rangle^2 - \langle r_{m\alpha}, g \rangle^2]| = |M[\langle r_\alpha - r_{m\alpha}, g \rangle \langle r_\alpha + r_{m\alpha}, g \rangle]|, \quad (39)$$

где $r_\alpha(\tau)$ — наблюдения, связанные с $u(\tau, x)$ соотношением $r_\alpha(\tau) = \mathcal{S}u + w_\alpha(\tau)$; $w_\alpha(\tau)$ — белый невырожденный шум с нулевым средним и ковариационным оператором $M[w_\alpha(\tau); w_\alpha(\sigma)] = (W + \alpha I)\delta(\tau - \sigma)$. Наблюдения $r_{m\alpha}(\tau)$ строятся аналогично. Эти процессы нужны лишь для доказательства, конечный алгоритм решения задачи их не будет содержать.

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского к правой части (39), получаем аналогично доказательству леммы 3, что

$$|\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha]g, g \rangle| \leq M[\|r_\alpha - r_{m\alpha}\|_{-1tG}^2] \left(M[\|r_\alpha + r_{m\alpha}\|_{-1tG}^2] \right)^{1/2} \|g\|_{1tG}^2 \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$, поскольку поведение r_α и $r_{m\alpha}$ такое же, как r и r_m .

Теорема 2. Для фиксированных $\alpha > 0$ и t выполняется равенство

$$\lim_{k, m \rightarrow \infty} M[(z, \hat{u}_{km}^\alpha - \hat{u}_\alpha)_q^2] = 0, \quad z \in E_q, \quad (40)$$

где $\hat{u}_\alpha = A_\alpha r$, A_α — решение уравнения (13), $\hat{u}_{km}^\alpha = \mathcal{A}_{km}^\alpha r$, \mathcal{A}_{km}^α — решение уравнения (38).

Доказательство. Из уравнения (38) находим, что $\mathcal{A}_{km}^\alpha = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1}$; этот оператор задает оптимальную линейную оценку $\hat{u}_{km}^\alpha(t, x) = \mathcal{A}_{km}^\alpha r = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1}r = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}r$.

Аналогично, из уравнения (13) имеем $\hat{u}_\alpha(t, x) = A_\alpha r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r + \alpha I)^{-1}r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}r$. Согласно этим формулам, математическое ожидание в (40) можно записать в виде

$$\begin{aligned} M[(z, \hat{u}_{km}^\alpha - \hat{u}_\alpha)_q^2] &= M\left[\left(z, \{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)\} + \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}r\right)_q^2\right] \leq \\ &\leq 2\left(M[z, \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)_q^2] + M\left[\left(z, \{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\}r\right)_q^2\right]\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к первому слагаемому в правой части, получаем

$$M[(z, \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)_q^2] \leq \|z\|_q^2 \|\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}\|^2 M[\|r_m - r\|_{-1tG}^2] \rightarrow 0$$

при $k, m \rightarrow \infty$ по лемме 3.

Оценим второе слагаемое. Прибавим и вычтем $\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}$; после преобразований применим неравенство Коши–Буняковского. Имеем при $k, m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} M\left[\left(z, \{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\}r\right)_q^2\right] &\leq \\ &\leq 2\left(\|z\|_q^2 \|\mathcal{R}_{km}\|^2 \|(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - (\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\|^2 + \|(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\|^2 \|\mathcal{R}_{km} - \mathcal{R}_{ur}\|^2 \|r\|_{-1tG}^2\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

согласно леммам 3 и 4.

Подставим эти соотношения в (41) и получим утверждение теоремы.

Теорема 3. Для каждого фиксированного t справедливо соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{k, m \rightarrow \infty} M[(z, \hat{u}_{km}^\alpha(t, x) - u(t, x))_q^2] = m(t),$$

где $\hat{u}_{km}^\alpha(t, x)$ — решение приближенной задачи фильтрации (23), (24).

Доказательство. Прибавим и вычтем под знаком скалярного произведения $\hat{u}_\alpha(t, x)$; после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{k, m \rightarrow \infty} M \left[(z, \hat{u}_{km}^\alpha(t, x) - u(t, x))_q^2 \right] = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{k, m \rightarrow \infty} M \left[\left\{ (z, \hat{u}_{km}^\alpha(t, x) - \hat{u}_\alpha(t, x))_q + (z, \hat{u}_\alpha(t, x) - u(t, x))_q \right\}^2 \right] \leq m(t) \end{aligned}$$

согласно теореме 2.

Таким образом, доказана сходимость решения приближенной регуляризованной задачи линейной фильтрации к решению исходной задачи.

Приведем алгоритм решения приближенной задачи линейной оптимальной фильтрации (32)–(34), основанный на построении последовательности регуляризованных оценок, полученных с помощью фильтра Калмана–Бьюки.

Введем обозначения. Через $\chi(\tau)$ обозначим вектор с координатами

$$\chi_i(\tau) = \begin{cases} \vartheta_i(\tau), & \text{при } i \leq k; \\ \frac{d\vartheta_{i-k}(\tau)}{d\tau}, & \text{при } k < i \leq 2k, \end{cases}$$

матрица $F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ F_k & 0 \end{bmatrix}$, где I — единичная матрица порядка k , F_k — матрица размерности $k \times k$, координаты которой $F_k^{ij} = (\mathcal{B}\rho_i, \rho_j)_{0P}$; $\zeta(\tau)$ — вектор с координатами $\zeta_i(\tau) = 0$ при $i = 1, 2, \dots, k$ и $\zeta_i(\tau) = (v, \rho_{i-k})_{0P}$ при $i = k + 1, k + 2, \dots, 2k$; C — матрица $m \times 2k$, $C = [C_k \ \bar{0}]$, где $\bar{0}$ — нулевая матрица размера $m \times k$, а координаты матрицы C_k вычисляются по формуле $C_k^{lj} = (\mathcal{S}\rho_j, \lambda_l)_{0\Lambda}$; $r_m(\tau)$ — вектор наблюдений, $r_m^l(\tau) = (r(\tau), \lambda_l)_{0\Lambda}$; $w(\tau)$ — шум, $w_l = (\xi, \lambda_l)_{0\Lambda}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $l = 1, 2, \dots, m$.

С учетом введенных обозначений задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать следующим образом.

Векторный случайный процесс $\chi(\tau)$ моделируется системой

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = F\chi(\tau) + \zeta(\tau), \quad \chi(0) = \begin{bmatrix} \vartheta_0 \\ \vartheta_{10} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

где $\zeta(\tau)$ — белый вырожденный шум. Наблюдается процесс $\{r_m(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$, связанный с $\chi(\tau)$ соотношением

$$r_m(\tau) = C\chi(\tau) + w(\tau). \quad (43)$$

Требуется найти последовательность оценок $\{\hat{\chi}^\alpha(\tau)\}_{\alpha > 0}$ процесса $\chi(\tau)$ в момент $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ M \left[(z, \chi(t) - \mathcal{H}^\alpha r_m(t))_k^2 \right] - \inf_{\mathcal{H}} M \left[(z, \chi(t) - \mathcal{H} r_m(t))_k^2 \right] \right\} = 0, \quad (44)$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам \mathcal{H} , действующим из пространства наблюдений в пространство состояний; \mathcal{H} — определяется соотношением

$$\mathcal{H} r_m = \int_0^t h(t, \tau) r_m(\tau) d\tau, \quad \hat{\chi}^\alpha(t) = \mathcal{H}^\alpha r_m = \int_0^t \hat{h}^\alpha(t, \tau) r_m(\tau) d\tau;$$

матрица $\hat{h}^\alpha(t, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$M[\chi(t)r_m^T(\sigma)] = \int_0^t \hat{h}^\alpha(t, \tau) C(\tau) M[\chi(\tau)\chi^T(\sigma)C^T(\sigma)] d\tau + \hat{h}^\alpha(t, \sigma) S_\alpha(\sigma), \quad (45)$$

а $S_\alpha(\sigma) = R(\sigma) + \alpha I_m$, где I_m — единичная матрица порядка m и $R(\sigma)$ — матрица интенсивности вырожденного белого шума $w(\sigma)$; z — произвольный вектор из E_{2k} .

Имеют место следующие статистики:

$$\begin{aligned}
 M[\vartheta_0] &= 0, \quad M[\vartheta_0\vartheta_0^T] = P_0, \quad P_0^{ij} = (\mathcal{U}_0\rho_i, \rho_j)_{0P}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \\
 M[\vartheta_{10}] &= 0, \quad M[\vartheta_{10}\vartheta_{10}^T] = P_{10}, \quad P_{10}^{ij} = (\mathcal{U}_1\rho_i, \rho_j)_{0P}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \\
 M[\zeta(\tau)] &= 0, \quad M[\zeta(\tau)(\zeta(\sigma))^T] = Q(\tau)\delta(\tau - \sigma), \quad Q_{ij}(\tau) = (\mathcal{V}\rho_i, \rho_j)_{0P}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \\
 M[w(\tau)] &= 0, \quad M[w(\tau)w^T(\sigma)] = R(\tau)\delta(\tau - \sigma), \quad R_{ql}(\tau) = (\mathcal{W}\lambda_q, \lambda_l)_{0\Lambda}, \quad q, l = 1, 2, \dots, m, \\
 M[\chi(0)] &= 0, \quad M[\chi(0)\chi^T(0)] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_{10} \end{bmatrix}, \quad M[\chi(0)\zeta^T(\tau)] = M[\chi(0)w^T(\tau)] = M[w(\tau)\zeta^T(\sigma)] = 0,
 \end{aligned}$$

$R(\tau)$ — матрица порядка m , $R(\tau) \geq 0$, \mathcal{U}_0 — ковариационный оператор процесса $u_0(x)$, \mathcal{U}_1 — ковариационный оператор процесса $u_1(x)$, \mathcal{V} — ковариационный оператор процесса $v(\tau, x)$, \mathcal{W} — ковариационный оператор процесса $\xi(\tau, x)$.

Запишем матрицу $\hat{h}^\alpha(t, \tau)$ в виде $\hat{h}^\alpha(t, \tau) = \begin{bmatrix} h_{1mk}^\alpha(t, \tau) \\ h_{2mk}^\alpha(t, \tau) \end{bmatrix}$, где $h_{1mk}(t, \tau)$ и $h_{2mk}(t, \tau)$ — матрицы размера $k \times m$. Тогда уравнение Винера–Хопфа (45) можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} M[\vartheta(t)r_m^T(\sigma)] = \int_0^t h_{1mk}^\alpha(t, \tau)C_k(\tau)M[\vartheta(t)(\tau)\vartheta(t)^T(\sigma)C_k^T(\sigma) d\tau + h_{1mk}^\alpha(t, \sigma)S_\alpha(\sigma), \\ M[\vartheta(t)r_m^T(\sigma)] = \int_0^t h_{2mk}^\alpha(t, \tau)C_k(\tau)M[\vartheta(t)(\tau)\vartheta(t)^T(\sigma)C_k^T(\sigma) d\tau + h_{2mk}^\alpha(t, \sigma)S_\alpha(\sigma). \end{cases} \quad (46)$$

Интегральные уравнения в (46) независимы и первое уравнение совпадает с уравнением Винера–Хопфа (37) для задачи (32)–(34), т.е. решение h_{1mk}^α совпадает с h_{mk}^α . Следовательно, оценка состояния $\hat{\vartheta}^\alpha(t)$ системы (32)–(34) равна первым k координатам вектора $\hat{\chi}^\alpha(t)$ — решению задачи (42)–(44), которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{\chi}^\alpha(\tau)}{d\tau} = F(\tau)\hat{\chi}^\alpha(\tau) + P(\tau)C^T(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)[r_m(\tau) - C(\tau)\hat{\chi}^\alpha(\tau)], \quad \hat{\chi}^\alpha(0) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty, \quad (47)$$

где $P(\tau)$ — решение уравнения Риккати

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = F(\tau)P(\tau) + P(\tau)F^T(\tau) + G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau) - P(\tau)C^T(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)C(\tau)P(\tau), \quad P(0) = \begin{bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Обоснование алгоритма решения задачи (42)–(44) дано в [3, 5]. Параметр регуляризации выбирается согласно одному из методов, приведенных в [1–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01–01–00398).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
3. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
4. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
5. Колос М.В., Колос И.В. Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. Колос М.В., Колос И.В. О разрешимости обобщенной задачи Дирихле для гиперболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2002. 3, № 2. 68–78.

Поступила в редакцию
27.09.2003