

УДК 004.942

doi 10.26089/NumMet.v19r445

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ УСВОЕНИЯ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКОГО, АНСАМБЛЕВОГО И ЛОКАЛЬНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ И ЗАДАЧИ ЛОРЕНЦА

Д. А. Ростиллов¹, М. Н. Кауркин², Р. А. Ибраев³

Статья посвящена сравнению трех методов усвоения данных наблюдений: фильтр Калмана (Kalman Filter, KF), ансамблевый фильтр Калмана (Ensemble Kalman Filter, EnKF) и локальный фильтр Калмана (Local Kalman Filter, LKF). Выполнены численные эксперименты по усвоению синтетических данных этими методами в двух разных моделях, описываемых системами дифференциальных уравнений. Первая описывается одномерным линейным уравнением адвекции, а вторая — системой Лоренца. Проведено сравнение средних ошибок и времени исполнения этих методов при различных размерах модели, которые согласуются с теоретическим оценками. Показано, что вычислительная сложность ансамблевого и локального фильтров Калмана растет линейно с увеличением размера модели, в то время как у первого метода эта сложность растет со скоростью куба. Рассмотрена эффективность одной из возможных параллельных реализаций локального фильтра Калмана.

Ключевые слова: фильтр Калмана, ансамблевый фильтр Калмана, локальный фильтр Калмана, система Лоренца, линейная адвекция, усвоение данных.

1. Введение. В прикладных науках о Земле, таких как океанология и метеорология, часто используются математические методы моделирования физических систем, в основе которых лежит некоторая система дифференциальных уравнений, решаемая с помощью численных методов. Однако полученные результаты не обязаны абсолютно точно отражать истинное состояние системы. Во-первых, математическая модель не может описывать реальность в полной мере. Во-вторых, для решения систем дифференциальных уравнений нужно иметь начальные или граничные условия, которые на практике не известны заранее и могут быть лишь оценены на основе данных измерений. Для уточнения расчетов математической модели используется усвоение (ассимиляция) данных, которая представляет собой корректировку модельных результатов с использованием данных измерений.

Методы ассимиляции данных можно разбить на два основных класса. Один класс методов основан на вариационных принципах. Например, такие методы, как 3D-Var и 4D-Var, относятся к данной категории. Подробнее с данными методами можно ознакомиться в [1–3].

Второй класс методов основан на статистической теории оценивания и фильтрации процессов. Этот класс методов получил название “фильтрация Калмана” [4]. Метод, предложенный в настоящей статье, применим к линейным моделям, ошибки которых являются гауссовскими. Фильтр Калмана (KF) предоставляет оптимальную с точки зрения среднеквадратичной ошибки оценку состояния линейной модели [5]. Несмотря на то что этот метод был успешно реализован и применен для широкого спектра практических задач, его вычислительная сложность не позволяет использовать его для задач прогноза состояния океана в моделях высокого разрешения. Кроме того, классический фильтр Калмана неприменим для задач ассимиляции данных в нелинейных динамических системах. Для этих задач был разработан обобщенный фильтр Калмана (Extended Kalman Filter, EKF) [6, 7]. Существуют также более общие методы ассимиляции, основанные на построении специальной последовательности цепей Маркова, с помощью которой обеспечивается сходимость к состоянию модели [8].

Следующим шагом в развитии методов данного класса является ансамблевый фильтр Калмана (EnKF), предложенный в работе [5]. Этот подход позволил сократить количество дорогостоящих операций с матрицами больших (10^6 – 10^9) размерностей [9]. Кроме того, данный метод хорошо подходит для параллельной

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; студент, e-mail: danilrostilov@gmail.com

² Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Нахимовский просп., 36, 117218, Москва; науч. сотр., e-mail: kaurkinmn@gmail.com

³ Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, ул. Губкина, д. 8, 119333, Москва; главный науч. сотр., e-mail: ibrayev@mail.ru

реализации, так как ансамбль прогнозов может рассчитываться параллельно, что позволяет эффективно использовать ресурсы современных суперкомпьютеров [10].

Одним из альтернативных подходов для уменьшения вычислительной сложности классического фильтра Калмана является подход “локализации”, основная идея которого заключается в том, что матрицы, используемые в расчетах, имеют ранг, который существенно меньше размерности. Такая идея приводит к локальному фильтру Калмана (LKF). Этот метод описан и проанализирован в статьях [11–13]. Предметом изучения настоящей статьи являются только упомянутые выше методы фильтрации Калмана.

Сравнение методов 4-D-Vар и EnKF приведено в работе [14], в которой показано, что среди них нет однозначно лучшего метода. Обзор методов ассимиляции данных и краткий очерк их исторического развития можно найти в [5, 15].

2. Цели исследования. Цель статьи — провести сравнение методов KF, EnKF и LKF на примере задачи Лоренца и уравнения адвекции, проанализировать сильные и слабые стороны каждого из методов, а также исследовать вычислительную стоимость и оценить их применимость для глобальной модели динамики океана высокого разрешения. Будет затронута тема возможности параллельной реализации локального фильтра Калмана и оценена его эффективность.

3. Тестирование методов усвоения данных для уравнения адвекции. Здесь и далее будет использоваться терминология и обозначения из первоисточников об LKF-методе [11–13].

3.1. Постановка эксперимента. В уравнении адвекции

$$u_t - a \cdot u_x = 0$$

константа a полагалась равной -1.

Шаг по времени был взят равным 0.005, что не следует считать характерным для океанологических задач. Обычно этот параметр выбирается из соображений частоты поступления данных для ассимиляции в систему, например в глобальных моделях океана шаг по времени составляет 5 минут, а усвоение происходит раз в сутки. В синтетических же экспериментах шаг по времени подбирается из соображений баланса точность/производительность: чем чаще происходит ассимиляция данных, тем ближе будет прогнозируемое поведение системы к реальному, но тем чаще придется производить процедуру ассимиляции.

Сетка по оси x равномерная с шагом 1 от 0 до $N - 1$, где N — размерность сетки. Далее этот параметр будет варьироваться. Вектор начального состояния был взят равным сетке: $[0, 1, \dots, N - 1]$. Каждый вектор из начального ансамбля был сгенерирован прибавлением к каждой компоненте вектора начального состояния случайной нормально распределенной ошибки. Матрица ошибок ковариации наблюдений R бралась диагональной со значением 0.01 на диагонали. Ассимиляция данных наблюдений производилась на каждом 10-м временном шаге. Оператор наблюдений $H(x) : R^N \rightarrow R^d$, который действует из пространства наблюдений в пространство модельных значений, задается фактически как оператор проекции из набора всех точек в некоторый поднабор из этих точек. Во время расчетов мы полагали, что каждый метод выполнял 500 шагов по времени. Параметры в LKF взяты следующими: $l = 1$ и $K = M - 1$, где M — размер ансамбля, который, в свою очередь, был взят равным 55. Под l здесь и далее понимается размер локального блока вектора состояния, который берется для проекции. Под K здесь и далее понимается ранг матрицы, с помощью которой мы приближаем матрицу ковариации.

Следует чуть подробнее пояснить, как конкретно производились вычисления с ансамблем в методе EnKF. Для указанного метода требуется начальный ансамбль векторов состояния модели, который затем со временем эволюционирует согласно классической схеме, описанной в [5]. Начальный ансамбль строился следующим образом. Мы имеем вектор начального состояния модели, построенный указанным выше способом. Далее, мы M раз (M — размер ансамбля) генерируем случайный нормально распределенный вектор с нулевым вектором средних и диагональной матрицей ковариации (на диагонали стоят 0.001). Таким образом, каждый вектор (элемент ансамбля) начального условия, с которого начинается интегрирование модели, представляет собой сумму начального состояния и вектора сгенерированной ошибки. Затем векторы-решения, полученные при интегрировании модели, будут использоваться для построения ковариационных матриц ошибок модели.

3.2. Вычислительная сложность. Теоретические оценки. Из теоретических описаний алгоритмов [5, 11] следует, что они зависят от размерности N вектора состояния системы следующим образом:

$$\text{KF} - \mathcal{O}(N^3), \quad \text{EnKF} - \mathcal{O}(N), \quad \text{LKF} - \mathcal{O}(N).$$

Напомним, что время работы метода LKF растет линейно от размера задачи, поскольку в матричных операциях не присутствуют элементы, чьи размерности были бы равны размерности всего пространства состояний. Вместо этого там присутствуют матрицы размерности локального пространства состояний,

которая определяется параметром l . Рассматривая зависимость времени работы методов от количества элементов ансамбля M , можно выявить следующую асимптотику:

$$KF - \mathcal{O}(1), \quad \text{EnKF} - \mathcal{O}(M), \quad \text{LKF} - \mathcal{O}(M).$$

3.3. Вычислительная стоимость. Практические результаты. На рис. 1 представлены совмещенные графики временных затрат, которые понадобились классическому, ансамблевому и локальному фильтрам Калмана, чтобы провести ассимиляцию данных в описанном выше эксперименте. На оси абсцисс отмечена общая размерность вектора состояний системы. На оси ординат отмечено прологарифмированное общее время выполнения одного шага в секундах.

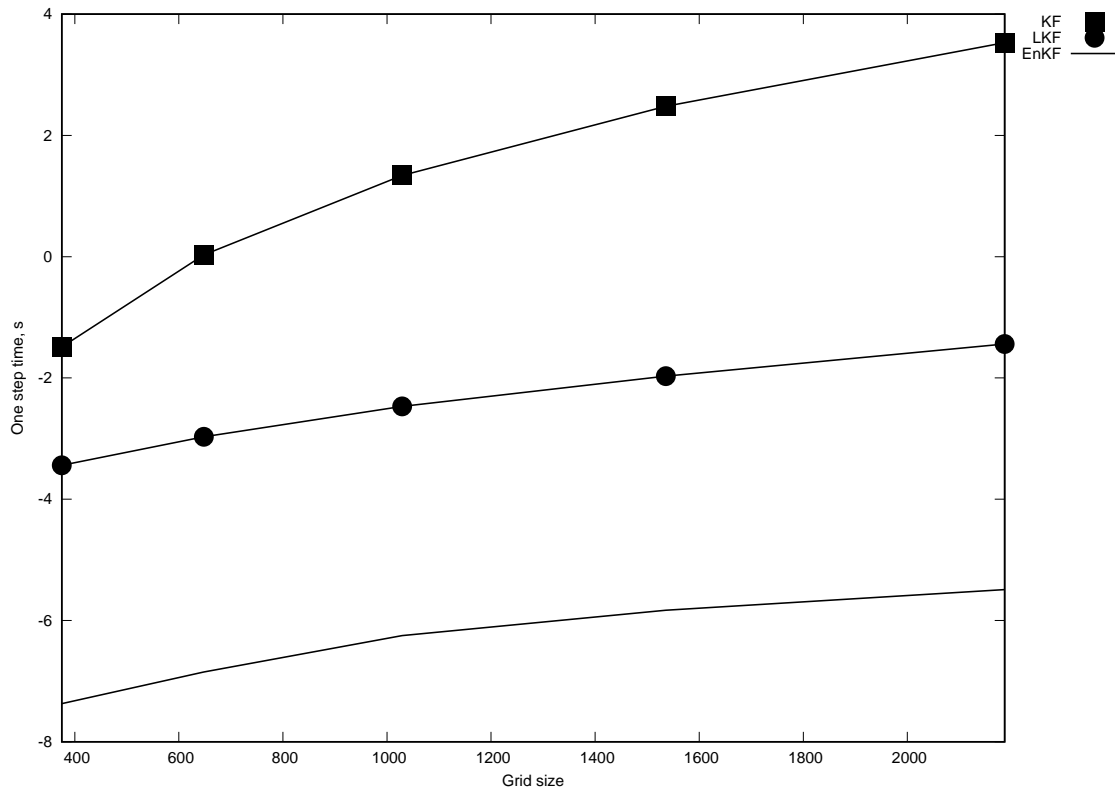


Рис. 1. Временные затраты на ассимиляцию данных в уравнение адвекции для классического, ансамблевого и локального фильтра Калмана в зависимости от размера задачи. На оси абсцисс отмечена общая размерность вектора состояний системы. На оси ординат отмечено прологарифмированное среднее время выполнения одного шага ассимиляции

Из рис. 1 можно сделать вывод о том, что теоретические асимптотики для времени работы алгоритмов подтверждаются на практике.

Самый медленный метод KF, очевидно, не применим на задачах с большой размерностью вектора состояний. Локальный фильтр Калмана, показал приемлемую скорость даже на задачах размерностей порядка 10 000. Ансамблевый фильтр Калмана опередил локальный фильтр Калмана по скорости на 2–3 порядка.

4. Тестирование методов усвоения данных для системы Лоренца.

4.1. Постановка эксперимента. Усвоение данных производилось на системе точек, каждая из которых подчинялась системе Лоренца. Данная система является одной из первых моделей математической теории хаоса, которая была описана Лоренцем в [16]. Лоренц, рассуждая о хаотической природе атмосферы в своих работах, отметил, что, имея даже абсолютно точные модели и измерения, невозможно точно предсказывать погоду на длительный срок. Это свойство ограниченности предсказуемости модели определяется чувствительной зависимостью от начальных условий и составляет для атмосферы 2–3 недели, а для океана около 2 месяцев [16]. Дело в том, что в моделях атмосферы малейшее изменение начальных условий может существенно изменить поведение системы. Лоренц задался целью найти пример системы дифференциальных уравнений, которые имели бы указанное свойство неустойчивости к малым изменениям в начальных условиях. Система Лоренца как раз и являет собой пример такой системы.

Рассматриваемая система имеет всего три свободные переменные, но в то же время ее решения ведут себя аperiодично и хаотично. Данные свойства делают ее полезным примером для тестовых проверок различных методов ассимиляции. Например, автор ансамблевого фильтра Калмана в своей книге [17] проводит часть численных экспериментов именно на примере данной задачи.

Сама система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \sigma \cdot (y - x), \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x \cdot (\rho - z) - y, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = x \cdot y - \beta \cdot z. \end{cases}$$

В экспериментах параметры были выбраны равными классическим значениям: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ и $\rho = 28$. Предполагалось, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ точки расположены в узлах кубической сетки

$$\left[(0.01 \cdot i; 0.5 + 0.01 \cdot i; 0.5 + 0.01 \cdot i) \mid i = 0, \dots, N - 1 \right],$$

где N — количество узлов сетки на одной стороне. Далее этот параметр будет варьироваться. В таких обозначениях размерность вектора пространства состояний будет равна $3 \times N^3$. Шаг по времени был выбран равным 0.005. Каждый вектор из начального ансамбля был сгенерирован с использованием той же процедуры, что и в эксперименте для предыдущей системы. Матрица ковариации наблюдений R бралась диагональной со значением 0.01 на диагонали. Ассимиляция данных наблюдений производилась на каждом 10-м временном шаге.

Оператор наблюдений $H(x) : R^{3N^3} \rightarrow R^{3d}$ выбирает d точек из общего набора точек и возвращает их координаты. Во время расчетов мы полагали $d = 10$. Каждый метод проходил 500 шагов по времени. Параметры в LKF-методе взяты следующими: $l = 1$ и $K = M - 1$, где M — размер ансамбля.

Так как классический фильтр Калмана предполагает линейность оператора эволюции системы $M(x, t)$, а в модели с системой Лоренца это не так, то для данного метода ассимиляции данных мы брали оператор $M(x, t)$ равным якобиану отображения из прошлого состояния в будущее.

4.2. Вычислительная стоимость. Результаты и выводы о временных затратах методов полностью дублируют соответствующие разделы 3.2 и 3.3 настоящей статьи, в которых мы проанализировали данный вопрос в эксперименте с адвекцией. В целях экономии места не будем повторяться.

4.3. Анализ ошибок методов. Как было отмечено при описании постановки эксперимента, для классического фильтра Калмана оператор эволюции системы был линеаризован посредством вычисления якобиана отображения. В таком случае естественно ожидать снижения точности данного метода в сравнении с методами, которые не используют такую аппроксимацию. Заметим, что диапазоны значений левой и правой частей рис. 3 разнятся примерно в 2000 раз, что и подтверждает приведенное выше замечание.

Сравнивая графики ошибок, можно сделать два основных вывода.

1) Ошибки методов LKF и EnKF по порядку одинаковы, однако LKF показывает более высокую точность.

2) Ошибки метода KF примерно в 2000 раз превосходят ошибки методов EnKF и LKF.

5. Параллельная реализация LKF. Как упоминалось ранее, локальный ансамблевый фильтр Калмана допускает простую параллельную реализацию, так как вычисления выполняются для каждого отдельного элемента глобального вектора состояния модели независимо от других, именно поэтому мы можем проводить локальную ассимиляцию данных параллельно в каждой точке.

Для параллельной реализации LKF-метода была использована технология MPI. Симуляция происходила на нелинейной задаче, порожденной системой Лоренца. Практически все параметры симуляции были взяты такими же, как и в разделе 4.1. Разница лишь в том, что в этом эксперименте ассимиляция данных производилась на каждом шаге.

На рис. 4 приведен график эффективности параллельной реализации локального фильтра Калмана, т.е. продемонстрирована зависимость общего времени работы программы от количества используемых процессоров.

Кроме того, следует отметить, что были проведены симуляции и для уравнения переноса. Результаты тестов по параллельной эффективности для данной задачи совпадают с результатами, полученными для системы Лоренца.

6. Заключение. В настоящей статье авторы сравнили три метода усвоения данных: простой фильтр Калмана, ансамблевый фильтр Калмана и локальный фильтр Калмана.

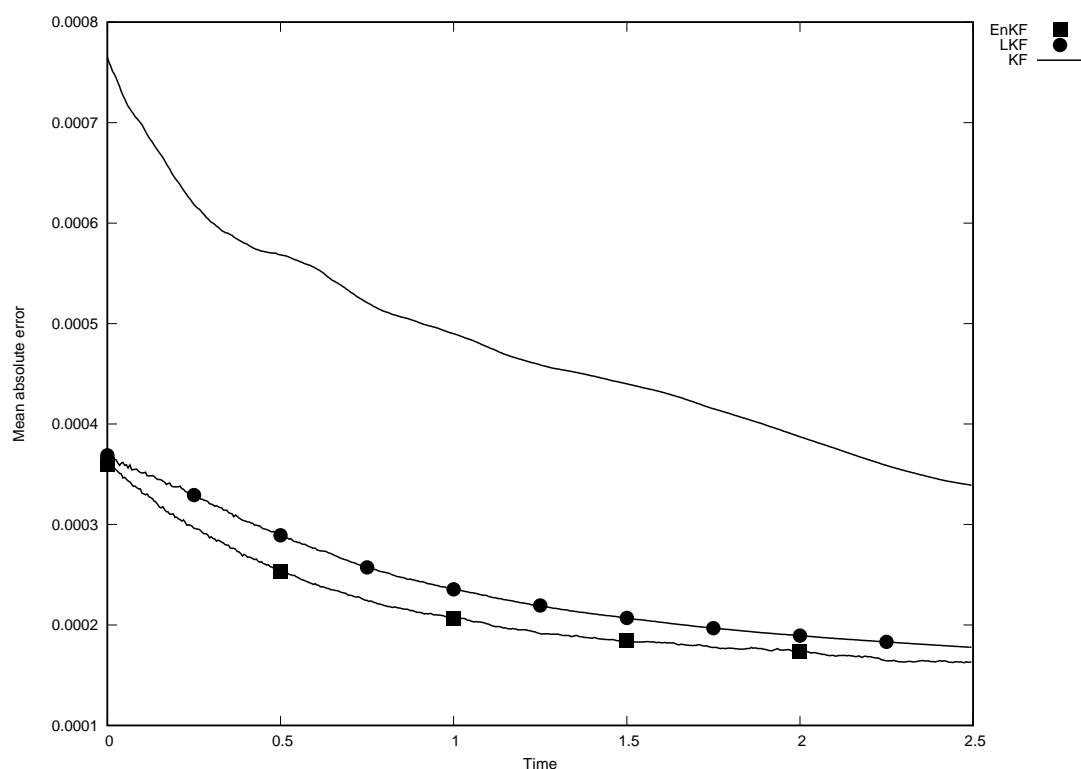


Рис. 2. Зависимость средней абсолютной ошибки прогноза трех моделей ассимиляции в зависимости от текущего времени при размере ансамбля $M = 5$

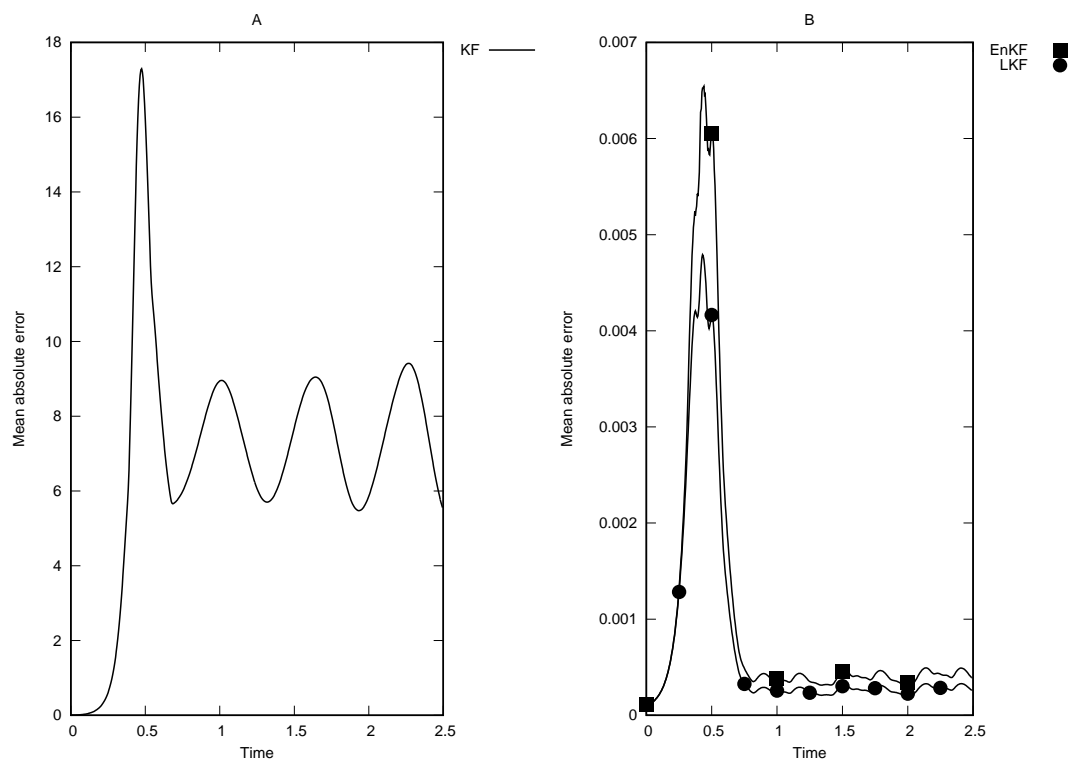


Рис. 3. Графики зависимости среднеквадратичной ошибки от текущего времени: А) ошибка классического фильтра Калмана (сплошная линия); В) отражены ошибки методов EnKF и LKF (отмечены квадратами и кругами соответственно). Размер ансамбля $M = 50$

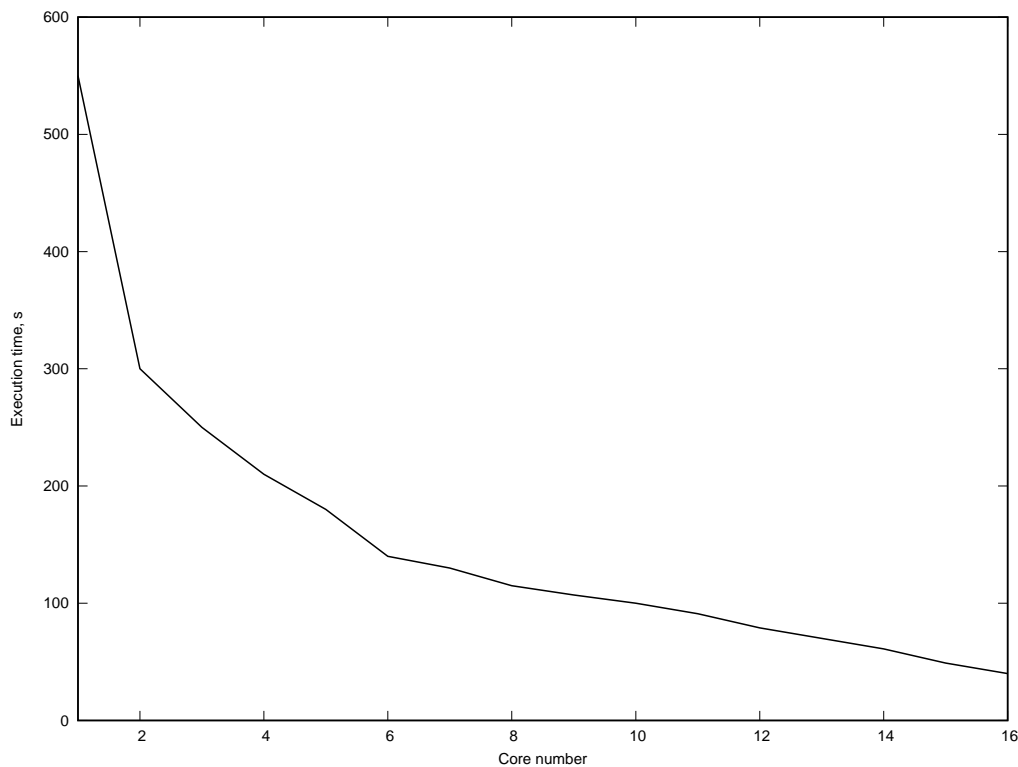


Рис. 4. Зависимость общего времени работы параллельной реализации LKF (ось Y , секунды) от количества используемых процессоров (ось X)

Сравнение производилось по двум параметрам — время работы и точность, а также для двух принципиально разных систем — системы Лоренца и уравнений адвекции. Ансамблевые методы (EnKF и LKF) продемонстрировали одинаковые порядки точности и вычислительных затрат в обоих экспериментах, поэтому нельзя сделать однозначного вывода о предпочтительности какого-то метода из них. Однако с уверенностью можно сказать, что классический фильтр Калмана уступает ансамблевым аналогам по обоим критериям сравнения, особенно ярко это проявляется на примере нелинейной системы. Кроме того, рассмотрена одна из возможных параллельных реализаций локального фильтра Калмана, которая продемонстрировала практически линейный рост скорости работы при увеличении количества процессорных ядер. Метод EnKF тоже допускает параллельную реализацию и его эффективность будет аналогичной.

Благодаря тому, что рассмотренные методы допускают эффективную параллельную реализацию, они востребованы в задачах моделирования Мирового океана. Следует отметить, что в таких задачах типичное количество узлов сетки имеет порядок 10^8 , а количество данных наблюдений имеет порядок 10^5 . В таких условиях классический фильтр Калмана становится неприменимым, так как имеет асимптотику времени работы $O(N^3)$. Локальный и ансамблевый фильтры Калмана имеют линейную асимптотику времени работы от количества узлов сетки, поэтому их вполне возможно применять на практике в задачах моделирования океана, которые решаются с использованием компьютеров массивно-параллельной архитектуры с распределенной памятью с несколькими тысячами вычислительных ядер [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П. Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. **48**, № 8. 1371–1391.
2. Parrish D.F., Derber J.C. The National Meteorological Center's spectral statistical-interpolation analysis system // Monthly Weather Review. 1992. **120**, N 8. 1747–1763.
3. Rabier F., Liu Z. Variational data assimilation: theory and overview // Proc. ECMWF Seminar on Recent Developments in Data Assimilation for Atmosphere and Ocean. Reading: ECMWF, 2003. 29–43.
4. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory // Journal of Basic Engineering. 1961. **83**, N 1. 95–108.

5. Evensen G. The ensemble Kalman filter: theoretical formulation and practical implementation // *Ocean Dynamics*. 2003. **53**, N 4. 343–367.
6. Miller R.N. Perspectives on advanced data assimilation in strongly nonlinear systems // *Data Assimilation*. Vol. 19. Berlin: Springer, 1994. 195–215.
7. Julier S., Uhlmann J.K. A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?>
8. Беляев К.П., Танажура К.А.С., Тучкова Н.П. Математическое обоснование, применение и сравнение обобщенного метода усвоения данных наблюдений, основанного на методах диффузионной аппроксимации, с другими методами усвоения данных // *Информатика и ее применения*. 2012. **6**, № 4. 84–94.
9. Климова Е.Г., Платов Г.А., Киранова Н.В. Разработка системы усвоения данных об окружающей среде на основе ансамблевого фильтра Калмана // *Вычислительные технологии*. 2014. **19**, N 3. 27–37.
10. Кауркин М.Н., Ибраев Р.А., Беляев К.П. Усвоение данных АРГО в модель динамики океана с высоким разрешением по методу ансамблевой оптимальной интерполяции (EnOI) // *Океанология*. 2016. **56**, № 6. 852–860.
11. Ott E., Hunt B.R., Szunyogh I., Corazza M., Kalnay E., et al. Exploiting local low dimensionality of the atmospheric dynamics for efficient ensemble Kalman filtering. <https://arxiv.org/abs/physics/0203058v3>.
12. Ott E., Hunt B., Szunyogh I., et al. A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation // *Tellus*. 2004. **56**, N 5. 415–428.
13. Szunyogh I., Satterfield E.A., Aravequia J.A., Fertig E.J., Guarinati G., Kalnay E., Hunt B.R., Kostelich E.J., Kuhl D.D., Ott E., Yorke J.A. The local ensemble transform Kalman filter and its implementation on the NCEP global model at the University of Maryland // *Proc. ECMWF Workshop on Flow Dependent Aspects of Data Assimilation*. Reading: ECMWF, 2007. 47–63.
14. Kalnay E., Li H., Miyoshi T., Yang S., Ballabrera-Poy J. 4-D-Var or ensemble Kalman filter? // *Tellus A*. 2007. **59**, N 5. 758–773.
15. Ипатова В.М., Шутяев В.П. Алгоритмы и задачи ассимиляции данных для моделей динамики атмосферы и океана // *Научно-образовательный курс МФТИ*. <https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/99f/algasassimilation.pdf>.
16. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // *Journal of Atmospheric Sciences*. 1963. **20**. 130–141.
17. Evensen G. Data assimilation: the ensemble Kalman filter. Berlin: Springer, 2009.
18. Evensen G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics // *Journal of Geophysical Research*. 1994. **99**. doi: 10.1029/94jc00572.
19. Mahfouf J.-F., Rabier F. The ECMWF operational implementation of four-dimensional variational assimilation. II: Experimental results with improved physics // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 2007. **126**. 1171–1190.
20. Кауркин М.Н., Ибраев Р.А., Беляев К.П. Усвоение данных наблюдений в модели динамики океана высокого пространственного разрешения с применением методов параллельного программирования // *Метеорология и гидрология*. 2016. № 7. 47–57.
21. Толстых М.А., Ибраев Р.А. и др. Модели глобальной атмосферы и Мирового океана: алгоритмы и суперкомпьютерные технологии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.

Поступила в редакцию
23.06.2018

Comparison of Data Assimilation Methods Based on the Classical, Ensemble and Local Kalman Filter by the Example of the Advection Equation and Lorenz System

D. A. Rostilov¹, M. N. Kaurkin², and R. A. Ibrayev³

¹ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Student, e-mail: danilrostilov@gmail.com

² Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences; Nakhimovskiy prospect 36, Moscow, 117218, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: kaurkinmn@gmail.com

³ Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences; ulitsa Gubkina 8, Moscow, 119333, Russia; Dr. Sci., Professor, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Principal Scientist, e-mail: ibrayev@mail.ru

Received June 23, 2018

Abstract: The paper is devoted to the comparison of three data assimilation methods: the Kalman Filter (Kalman Filter, KF), the ensemble Kalman Filter (EnKF), and the local Kalman Filter (LKF). A number of

numerical experiments on data assimilation by these methods are performed on two different models described by systems of differential equations. The first one is a simple one-dimensional linear equation of advection and the second one is the Lorenz system. The mean errors and the execution time of these assimilation methods are compared for different model sizes. The numerical results are consistent with the theoretical estimates. It is shown that the computational complexity of local and ensemble Kalman filters grows linearly with the size of the model, whereas in the classical Kalman Filter this complexity increases according to the cubic law. The efficiency of parallel implementation of the local Kalman filter is considered.

Keywords: Kalman Filter, Ensemble Kalman Filter, Local Kalman Filter, Lorenz equations, advection equation, data assimilation.

References

1. V. I. Agoshkov, E. I. Parmuzin, and V. P. Shutyaev, "Numerical Algorithm for Variational Assimilation of Sea Surface Temperature Data," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **48** (8), 1371–1391 (2008) [*Comput. Math. Math. Phys.* **48** (8), 1293–1312 (2008)].
2. D. F. Parrish and J. C. Derber, "The National Meteorological Center's Spectral Statistical Interpolation Analysis System," *Mon. Wea. Rev.* **120** (8), 1747–1763 (1992).
3. F. Rabier and Z. Liu, "Variational Data Assimilation: Theory and Overview," in *Proc. ECMWF Seminar on Recent Developments in Data Assimilation for Atmosphere and Ocean, Reading, UK, September 8–12, 2003* (ECMWF, Reading, 2003), pp. 29–43.
4. R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *J. Basic Eng.* **83** (1), 95–108 (1961).
5. G. Evensen, "The Ensemble Kalman Filter: Theoretical Formulation and Practical Implementation," *Ocean Dyn.* **53** (4), 343–367.
6. R. N. Miller, "Perspectives on Advanced Data Assimilation in Strongly Nonlinear Systems," in *Data Assimilation* (Springer, Berlin, 1994), Vol. 19, pp. 195–215.
7. S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions," <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?>. Cited November 28, 2018.
8. K. P. Belyaev, C. A. S. Tanajura, and N. P. Tuchkova, "Mathematical Foundation, Application, and Comparison of General Data Assimilation Method Based on Diffusion Approximation with Other Data Assimilation Schemes," *Inform. Primen.* **6** (4), 84–94 (2012).
9. E. G. Klimova, G. A. Platov, and N. V. Kilanova, "Development of Environmental Data Assimilation System Based on the Ensemble Kalman Filter," *Vychisl. Tekhnol.* **19** (3), 27–37 (2014).
10. M. N. Kaurkin, R. A. Ibrayev, and K. P. Belyaev, "ARGO Data Assimilation into the Ocean Dynamics Model with High Spatial Resolution Using Ensemble Optimal Interpolation (EnOI)," *Okeanologiya* **56** (6), 852–860 (2016) [*Oceanology* **56** (6), 774–781 (2016)].
11. E. Ott, B. R. Hunt, I. Szunyogh, et al., "Exploiting Local Low Dimensionality of the Atmospheric Dynamics for Efficient Ensemble Kalman Filtering," <https://arxiv.org/abs/physics/0203058v3>. Cited November 28, 2018.
12. E. Ott, B. R. Hunt, I. Szunyogh, et al., "A Local Ensemble Kalman Filter for Atmospheric Data Assimilation," *Tellus* **56** (5), 415–428 (2004).
13. I. Szunyogh, E. A. Satterfield, J. A. Aravéquia, et al., "The Local Ensemble Transform Kalman Filter and Its Implementation on the NCEP Global Model at the University of Maryland," in *Proc. ECMWF Workshop on Flow Dependent Aspects of Data Assimilation, Reading, UK, June 11–13, 2007* (ECMWF, Reading, 2007), pp. 47–63.
14. E. Kalnay, H. Li, T. Miyoshi, et al., "4-D-Var or Ensemble Kalman Filter?," *Tellus A: Dyn. Meteorol. Oceanogr.* **59** (5), 758–773 (2007).
15. V. M. Ipatova and V. P. Shutyaev, *Algorithms and Problems of Data Assimilation for the Models of Atmosphere and Ocean* <https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/99f/algsaasimulation.pdf>. Cited November 28, 2018.
16. E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow," *J. Atmos. Sci.* **20**, 130–141 (1963).
17. G. Evensen, *Data Assimilation: The Ensemble Kalman Filter* (Springer, Berlin, 2009).
18. G. Evensen, "Sequential Data Assimilation with a Nonlinear Quasi-Geostrophic Model Using Monte Carlo Methods to Forecast Error Statistics," *J. Geophys. Res. Oceans* **99** (1994). doi 10.1029/94JC00572

19. J.-F. Mahfouf and F. Rabier, “The ECMWF Operational Implementation of Four-Dimensional Variational Assimilation. II: Experimental Results with Improved Physics,” *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **126**, 1171–1190 (2007).
20. M. N. Kaurkin, R. A. Ibrayev, and K. P. Belyaev, “Data Assimilation in the Ocean Circulation Model of High Spatial Resolution Using the Methods of Parallel Programming,” *Meteorol. Gidrol.*, No. 7, 47–57 (2016) [*Russ. Meteorol. Hydrol.* **41** (7), 479–486 (2016)].
21. M. A. Tolstykh, R. A. Ibraev, E. M. Volodin, et al., *Models of Global Atmosphere and World Ocean: Algorithms and Supercomputing Technologies* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].