

УДК 532.529

doi 10.26089/NumMet.v19r447

## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ С ЧАСТИЦАМИ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ЛАГРАНЖЕВЫХ ПОДХОДОВ К ОПИСАНИЮ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

К. Н. Волков<sup>1</sup>, В. Н. Емельянов<sup>2</sup>, И. В. Тетерина<sup>3</sup>

Рассматриваются вопросы, связанные с визуализацией течений, содержащих твердые частицы или жидкие капли, в различных практических приложениях. Приводятся примеры визуального представления решений ряда задач двухфазной газовой динамики, связанных с расчетами течений в каналах и вихревых структурах и полученных при помощи лагранжевых подходов. Помимо традиционных подходов к визуализации вихревых течений с частицами и каплями, основанных на построении линий уровня различных характеристик потока, фазовых траекторий и распределений концентрации дискретных включений, применяются сечения Пуанкаре и метод локальных показателей Ляпунова, а также различные критерии идентификации вихревых образований в поле течения. Обсуждается дисперсия частиц в турбулентном потоке и формирование областей с повышенным содержанием дисперсной фазы. В логическом отношении лагранжевый подход к описанию двухфазных течений является простым, но в вычислительном отношении достаточно трудоемким, поскольку для имитации движения примеси требуется проведение большого числа траекторных расчетов пробных частиц. Дополнительные вычислительные трудности связаны с необходимостью локализации частиц в контрольных объемах неструктурированной сетки и восполнением параметров несущего потока.

**Ключевые слова:** вычислительная газовая динамика, научная визуализация, двухфазное течение, канал, вихрь, дисперсия, кластеризация.

**1. Введение.** Добавление в поток твердых частиц или жидких капель осложняет картину течения, что связывается с разнообразием свойств (прежде всего, инерционности и концентрации) дисперсных включений, которые приводят к реализации многочисленных режимов течения [1]. Помимо практического использования (камеры сгорания тепловых двигателей, системы пожаротушения, теплообменники с двухфазным рабочим телом), частицы находят широкое применение при визуализации и бесконтактном определении параметров потока оптическими методами по изображениям частиц. При соблюдении определенных условий мгновенные скорости частиц-маркеров практически равняются соответствующим скоростям несущей среды.

Метод трассирующих частиц находит широкое применение для визуализации стационарных и нестационарных течений жидкости и газа, позволяя получить достаточно полное и детальное представление о структуре и особенностях потока. Одним из недостатков данного подхода является большой объем информации, подлежащей обработке и визуализации [2] (на практике для визуализации течений используются миллионы трассирующих частиц). Для уменьшения объема обрабатываемой информации и улучшения визуального представления картины течения трассирующие частицы инжектируются только вблизи специально выделенных линий и поверхностей [3] или при помощи интерактивного подхода [4], в котором точки инъекции частиц задаются пользователем. Использование средств виртуальной реальности для визуализации траекторий пассивных частиц в нестационарном трехмерном поле течения обсуждается в работе [5]. Сравнение эйлеровых (линии уровня) и лагранжевых (метод трассирующих частиц) способов визуализации рассматривается в работах [6, 7]. Топология векторного поля скорости обсуждается в работе [8].

<sup>1</sup> Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; вед. науч. сотр. e-mail: dsci@mail.ru

<sup>2</sup> Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; профессор, e-mail: vlademelyanov@gmail.com;

<sup>3</sup> Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: yaiv@mail.ru

Улучшение зрительного восприятия картины течения достигается за счет изменения формы частиц, которая изображается на рисунке, и ориентации частиц в соответствии с особенностями поля скорости. Например, форма частиц-маркеров изменяется с шарообразной в равномерном поле течения на эллипсоидальную в области отрыва потока [9]. В работе [10] для изменения пространственной плотности трассирующих частиц применяются характеристические показатели Ляпунова (Characteristic Lyapunov Exponent, CLE), а для уменьшения количества частиц, участвующих в расчетах, — различные геометрические примитивы для рисования траекторий трассирующих частиц. Увеличение расстояния между геометрическими примитивами указывает на увеличение скорости течения и наоборот [11]. Вычисление наибольшего показателя Ляпунова позволяет оценить степень расходимости или сходимости двух близлежащих траекторий. Используется раскрашивание траекторий частиц в соответствии с каким-либо критерием (например, в зависимости от скорости или температуры частицы), а для подчеркивания физических характеристик объекта — текстурный подход [12]. В некоторых случаях показатели Ляпунова используются совместно с текстурной визуализацией вихревого течения [13].

При рисовании траекторий частиц используются различные подходы к визуализации вихревых областей течения [14]. Наиболее часто применяется изображение траектории частицы в виде непрерывной линии, а для изображения характеристик несущего потока используется ряд плоскостей, расположенных в различных точках траектории по нормали к ней. Частицы отображаются в виде сфер различного радиуса, векторов или цилиндров для указания на их скорость и температуру. Применяется также фильтр отображения частиц для вывода только части их траекторий, расположенных в интересующей области потока. Для изображения траекторий частиц используются точки, линии, ориентированные в соответствии с каким-либо критерием, а также более сложные графические примитивы наподобие лент и трубок [15, 16]. При помощи анализа расходимости и сходимости траекторий частиц они объединяются в группы, а траектории частиц изображаются только в выделенных областях потока, характеризующихся высоким уровнем завихренности.

Взаимодействие частиц с крупномасштабными вихревыми структурами в струях и слоях смешения является причиной турбулентной миграции частиц и формирования областей с повышенным содержанием дисперсной фазы [17]. Использование неструктурированных сеток приводит к существенным трудностям при численной реализации лагранжевого подхода [18]. Дополнительные трудности возникают при использовании вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности и стохастическом описании движения частиц, когда траектории частиц приобретают запутанный характер и достаточно трудно поддаются визуализации при помощи стандартных программных средств [1].

В работах [19, 20] развиваются средства визуализации столкновений частиц в турбулентном потоке, а также средства визуализации трехмерных траекторий частиц в турбулентном потоке. Визуализация вихревого течения осуществляется при помощи текстурного подхода, учитывающего не только направление, но и величину скорости. В зависимости от размера (числа Стокса) частицы различных размеров взаимодействуют с вихревыми структурами различных масштабов. При этом возникает задача визуализации вихревых структур, играющих важную роль в переносе частиц данного размера. При визуализации областей течения с повышенной концентрацией частиц используются двумерные сечения расчетной области, на которые наносятся линии уровня завихренности. Области кластеризации дисперсной фазы и особенности их визуализации обсуждаются в работах [21, 22].

Для визуализации траекторий частиц в вихревых структурах находит применение оператор параллельных векторов [23]. При учете силы тяжести оператор параллельных векторов имеет различный вид для газа и частиц.

В настоящей статье обсуждаются методы визуализации вихревых течений жидкости и газа, содержащих твердые частицы или жидкие капли, для описания которых применяется лагранжев подход. Рассматриваются особенности реализации и применения лагранжевых подходов для анализа и визуализации структуры течений, возникающих в различных практических приложениях. Приводятся примеры расчетов и визуализации течений вязкого сжимаемого газа, содержащих дисперсные включения.

**2. Основные уравнения.** Уравнения, описывающие движение частицы, записываются в лагранжевых переменных и интегрируются вдоль траекторий индивидуальных частиц в известном (вычисленном заранее) газодинамическом поле.

**2.1. Пассивные частицы.** При пренебрежимо малом влиянии инерционных эффектов движение пассивной частицы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор частицы,  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  — скорость частицы в точке с координатами  $(x, y, z)$

в момент времени  $t$ . Поле скорости предполагается известным либо в результате решения уравнений Эйлера или Навье–Стокса, либо благодаря каким-либо кинематическим соображениям, либо в результате измерений.

Динамика трассирующих частиц описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (1) с полностью детерминированной правой частью (эйлерово поле скорости является регулярным), фазовое пространство которой совпадает с физическим пространством трассирующих частиц.

Транспорт динамически пассивной примеси в двумерных потоках несжимаемой жидкости исследуется с использованием хорошо разработанных методов гамильтоновой динамики. Стационарные гамильтоновы системы с одной степенью свободы являются интегрируемыми. В случае, когда функция тока не зависит от времени, жидкие частицы движутся регулярным образом вдоль контуров постоянства функции тока. В случае функции тока, зависящей от времени, гамильтоновая система, как правило, оказывается неинтегрируемой и появляются предпосылки для возникновения хаотического движения, приводящего к хаотической адвекции.

**2.2. Инертные частицы.** Уравнение, описывающее движение частицы сферической формы, имеет вид

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho S_m (\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) + \mathbf{f}_p. \quad (2)$$

К уравнению (2) добавляется кинематическое соотношение, позволяющее вычислить радиус-вектор центра масс частицы:

$$\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \mathbf{v}_p. \quad (3)$$

Здесь  $m_p$  — масса частицы,  $\rho$  — плотность газа,  $S_m$  — площадь миделевого сечения частицы,  $C_D$  — коэффициент сопротивления. Слагаемое  $\mathbf{f}_p$  в уравнении (2) включает в себя силы различной природы, но отличные от силы сопротивления, учет или неучет которых зависит от конкретной задачи. Температура частицы влияет на ее движение через поправку к коэффициенту сопротивления. Во многих режимах течения такая поправка мала и не учитывается [1].

Уравнения (2) и (3) интегрируются вдоль траектории частицы и требуют задания начальных условий — координат и скорости частицы в момент времени  $t = 0$ .

Скорость газа в уравнении (2) вычисляется в точках, лежащих на траектории частицы  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_p)$ . Скорость газа находится из решения уравнений газовой динамики в контрольных объемах эйлеровой сетки, узлы которой не совпадают с положением частицы. Это приводит к необходимости восполнения (интерполяции) газодинамических параметров несущего потока, что требует локализации частицы и нахождения ячейки или контрольного объема расчетной сетки, в котором находится частица в данный момент времени [1].

В детерминистической модели (Deterministic Tracking Model, DTM), описывающей движение дисперсной фазы в турбулентном потоке на основе решения уравнений только для средних параметров, взаимодействие дискретных включений с турбулентными молями исключается из рассмотрения, что справедливо для достаточно инерционных частиц, которые сравнительно слабо вовлекаются в турбулентное движение несущего потока. Положение пробной частицы в начальный момент времени полностью определяет ее дальнейшую эволюцию на единственной траектории движения.

В стохастической модели (Stochastic Tracking Model, STM) влияние турбулентности учитывается при помощи введения случайной силы в уравнение движения частицы [1]. В качестве скорости газа в уравнениях, описывающих движение частицы, используется мгновенная скорость турбулентного потока. Мгновенная скорость представляется в виде суммы средней и случайной составляющих. Средняя скорость рассчитывается тем или иным способом, а случайная скорость разыгрывается на основе метода статистических испытаний.

В модели взаимодействия частицы с турбулентными молями (Eddy Life Time Model, ELTM) поле турбулентности моделируется совокупностью вихрей сферической формы, каждый из которых характеризуется скоростью, размером и временем существования, зависящими от локальных характеристик турбулентности. Турбулентный моль теряет и приобретает свою индивидуальность скачкообразно, что приводит к возникновению пульсаций параметров турбулентного потока. В качестве критерия генерации случайной составляющей скорости обычно выбирается наименьшее время из времени существования вихря и времени взаимодействия частицы с вихрем.

Взаимодействие частицы с турбулентными молями приводит к хаотизации движения примеси, а положение частицы в данный момент времени определяет лишь вероятность ее пребывания в совокупности возможных состояний в каждый последующий момент времени. Получение статистически достоверной осредненной картины движения примеси требует расчета достаточно большого числа пробных частиц [1].

Для частиц конечного размера фазовое пространство имеет размерность  $2n$ , где  $n$  — размерность физического пространства. В плоском случае движение частицы конечного размера описывается системой, имеющей 4 степени свободы (в отличие от случая пассивных частиц, фазовое пространство которых остается двумерным). Для пассивных частиц фазовый объем совпадает с физическим объемом, а его динамика является консервативной в несжимаемом случае. Динамика частиц конечного размера является диссипативной даже в несжимаемом случае, а фазовый объем изменяется со скоростью  $n/Stk$ , где  $Stk$  — число Стокса.



Рис. 1. Реализация лагранжевого подхода

**3. Реализация лагранжевого подхода.** Реализацию метода меченых частиц поясняет рис. 1. На шаге 1 тем или способом производится расчет поля течения газа. В рассчитанном поле течения на шаге 2 выбирается множество точек, в которых производится инъекция меченых частиц. В простейшем случае в начальный момент времени частицы размещаются на прямой линии на равном удалении друг от друга. На шаге 3 интегрируются уравнения, описывающие движение частиц-маркеров в известном векторном поле. Шаг 4 позволяет добавить или удалить некоторые частицы в соответствии с заданными критериями (например, в зависимости от расхожимости или сходимости соседних траекторий частиц). При добавлении новых частиц осуществляется переход к шагу 3 для нахождения траекторий новых частиц. При необходимости некоторые частицы помечаются как удаленные из расчета (их дальнейшего отслеживания не проводится). Шаг 5 заключается в отображении траекторий меченых частиц.

**3.1. Интегрирование уравнений.** Для интегрирования уравнений, описывающих движение частиц, используются различные подходы. Среди наиболее часто используемых следует отметить методы Эйлера и Рунге–Кутты. К недостаткам метода Эйлера относятся слишком маленький шаг по времени, следствием чего является увеличение времени счета. Для повышения точности и ускорения счета применяются различные способы адаптивного выбора шага интегрирования по времени.

При использовании простых декартовых сеток поиск ячейки сетки, в которой находится частица, и интерполяция скорости обычно не вызывают затруднений.

При использовании криволинейных сеток реализация алгоритма и его составных частей несколько усложняется. Для упрощения реализации применяется преобразование координат  $\Phi : C \rightarrow P$ , позволяющее проводить вычисления в вычислительном пространстве ( $C$ -space) вместо физического пространства ( $P$ -space). Преобразование координат точки из вычислительного пространства в физическое осуществляется при помощи соотношения  $r = \Phi(s)$ , а обратное преобразование (из физического в вычислительное пространство) имеет вид  $s = \Phi^{-1}(r)$ . Для нахождения скорости в физическом  $v$  и вычислительном  $V$  пространствах используются соотношения  $v = JV$  и  $v = J^{-1}v$ , где  $J$  — якобиан преобразования координат. Реализация подхода требует обращения якобиана и вычисления его компонент. Учитывая симметрию, в двумерном случае рассчитывается 4, а в трехмерном случае — 6 компонент якобиана в каждом узле сетки.

Для повышения точности применяется модифицированный подход, основанный на итерационном уточнении координат точки в вычислительном пространстве. Расстояние  $\Delta s = s_1 - s_0$  между точками  $s_1$  (требуется определения) и  $s_0$  (начальное приближение) в вычислительном пространстве находится из соотношения  $\Delta s = [J(s_0)]^{-1} \Delta r$ , где  $\Delta r = r_1 - r_0$  — расстояние между точками  $r_1$  и  $r_0$  в физическом пространстве. Для сходимости алгоритма требуется около 3–5 итераций в каждой ячейке сетки. Для интерполяции скорости в физическом пространстве используется подход, основанный на применении локальных координат.

Модификации различных подходов, предназначенных для интегрирования уравнений на криволинейных и неструктурированных сетках, рассматриваются в работе [1].

**3.2. Добавление и удаление частиц.** При необходимости осуществляется добавление (в расходящемся потоке) или, наоборот, удаление (в сходящемся потоке) некоторых линий тока или траекторий меченых частиц. Добавление или удаление линий тока производится тогда, когда расстояние между соседними линиями тока превосходит некоторое предельное значение. Для этого каждая линия тока разделяется на сегменты, что позволяет определить ту или иную метрику, описывающую расстояние между соседними траекториями (рис. 2).

Пусть  $P_{i,t}$  — координаты частицы  $i$  в момент времени  $t$ . Тогда новая частица добавляется в том случае, если выполняются два условия.

1. Текущее расстояние между частицами в момент времени  $t$  в  $\alpha$  раз превосходит начальное расстояние между ними:

$$d(P_{i,t}, P_{i+1,t}) > \alpha d(P_{i,0}, P_{i+1,0}).$$

2. Расстояние между двумя соседними частицами растет не более чем в  $\beta$  раз быстрее, чем расстояние между позициями частиц на текущем и предыдущем шагах по времени:

$$d(P_{i,t}, P_{i+1,t}) - d(P_{i,t-1}, P_{i+1,t-1}) < \beta d(P_{i,t-1}, P_{i,t}).$$

Под  $d(x, y)$  понимается расстояние между точками  $x$  и  $y$ . На практике коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  полагаются равными 2.

Удаление частицы из расчета производится тогда, когда расстояние между соседними частицами становится слишком малым (например, когда частицы попадают в область течения со сходящимися линиями тока). Проводится проверка коллинеарности сегментов траекторий соседних частиц:

$$\left( \frac{P_{i,t} - P_{i-1,t}}{|P_{i,t} - P_{i-1,t}|} \right) \cdot \left( \frac{P_{i+1,t} - P_{i,t}}{|P_{i+1,t} - P_{i,t}|} \right) = 1.$$

При выполнении условия коллинеарности рассчитывается расстояние между соседними частицами. Сравняются расстояния между частицами в текущий и начальный моменты времени:

$$d(P_{i,t}, P_{i+1,t}) < \gamma d(P_{i,0}, P_{i+1,0}), \quad d(P_{i,t}, P_{i-1,t}) < \gamma d(P_{i,0}, P_{i-1,0}),$$

где  $\gamma$  — масштабный коэффициент ( $\gamma < 1$ ).

**4. Подобие линий тока и траекторий.** В начальный момент времени точки инжекции частиц обычно задаются автоматически или вручную, указывая линию инжекции частиц и их количество. Такие подходы не в полной мере учитывают особенности поля течения, что затрудняет восприятие визуальной информации. Во многих случаях интерпретация картины линий тока или траекторий меченых частиц предполагает знание алгоритма, на основе которого они были получены.

Использование специальных метрик позволяет выделить те области течения, в которых малое изменение начальных данных приводит к существенным изменениям в геометрии траекторий частиц. Для сравнения двух линий тока или двух траекторий частиц  $s_p$  и  $s_q$  в работе [24] предлагается простая метрика, основанная на использовании локальной информации о поле течения (рис. 3). Для точки  $p \in s_p$  находится ближайшая к ней точка  $q \in s_q$ , после чего выделяется  $n$  точек на каждой из траекторий в обоих направлениях по отношению к точкам  $p$  и  $q$  (выборки  $w_p$  и  $w_q$ , размер которых  $n$  задается пользователем). В результате имеется множество точек  $[p_0, \dots, p_{n-1}]$  на траектории  $s_p$  и множество точек  $[q_0, \dots, q_{n-1}]$  на траектории  $s_q$ , сохраняющих информацию о направлении движения (переход от точки 0 к точке  $n-1$  осуществляется в направлении движения по траектории). Метрика, являющаяся мерой сравнения двух траекторий, определяется следующим образом:

$$d(s_p, s_q) = \left\| \overrightarrow{p-q} \right\| + \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{p_k - q_k} \right\| - \left\| \overrightarrow{p-q} \right\|. \quad (4)$$

Соотношение (4) учитывает расстояние между траекториями  $s_p$  и  $s_q$ , а также их форму и ориентацию. Вклад слагаемых, отвечающих за форму и ориентацию траекторий, определяется коэффициентом  $\alpha$ . На практике полагается, что  $\alpha$  принимает значения от 1 до 3 [24].

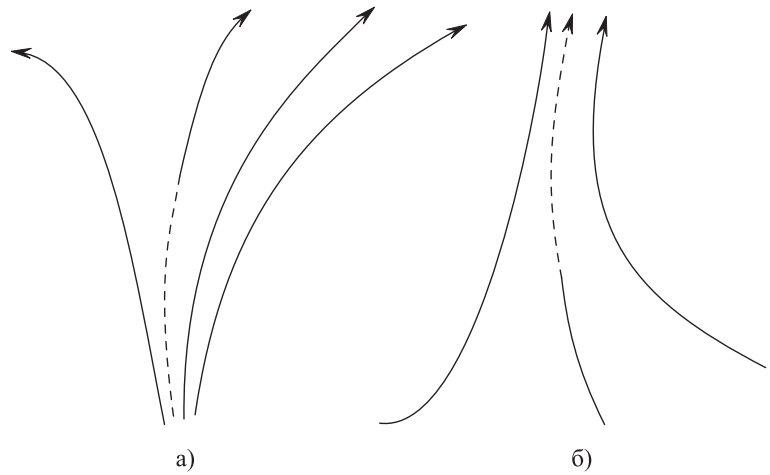


Рис. 2. Добавление (а) или удаление (б) линии тока (несуществующий участок линии тока изображается пунктиром)

Метрика (4) позволяет сравнить участки различных траекторий между собой. Для сравнения линий тока или траекторий меченых частиц целиком в качестве выборок  $w_p$  и  $w_q$  берутся все точки траекторий  $s_p$  и  $s_q$ . Каждой точке  $p \in s_p$  ставится в соответствие точка из множества  $s_q$  (рис. 4). При этом под  $p_0$  и  $q_0$  всегда понимаются начальные точки. После заполнения списка точек рассчитывается метрика  $d$ , которая не является симметричной:  $d(s_p, s_q) \neq d(s_q, s_p)$ .

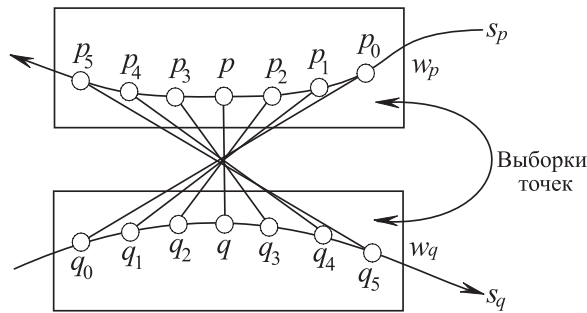


Рис. 3. Сравнение двух траекторий  $s_p$  и  $s_q$

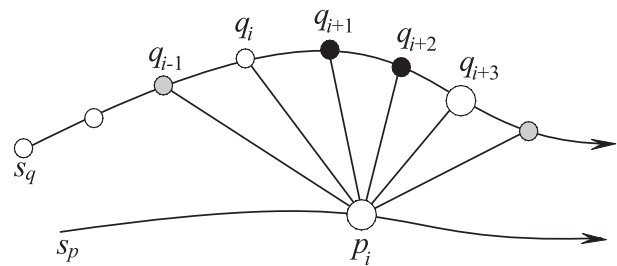
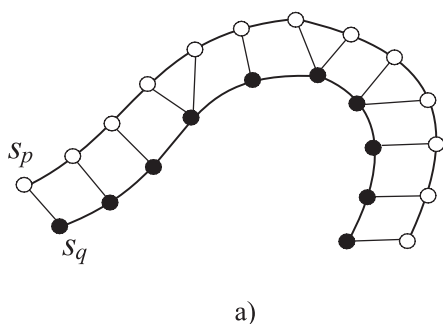
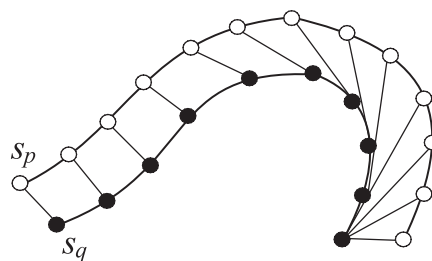


Рис. 4. Сравнение двух траекторий  $s_p$  и  $s_q$  на основе локального подхода

Для данной точки  $p_i \in s_p$  ищется точка  $q_j \in s_q$  при помощи процедуры поиска, основанной на параметризации кривых  $s_p$  и  $s_q$ . Для точки  $p_i$  (на рисунке она помечается крупным кружком) осуществляется поиск точки  $q_i$  на основе расчета расстояния  $d_i = \|\vec{q_i - p_i}\|$ . Если траектория  $s_q$  содержит меньше, чем  $i$  точек ( $n < i$ ), то производится сравнение лишь с конечной точкой  $q_{n-1}$ . Перебор точек производится в направлении движения по траектории  $s_q$ . При  $d_{i+1} < d_i$ , что соответствует условию  $d_{i+1} = \|\vec{p_i - q_{i+1}}\| < d_i$ , делается переход к следующей точке  $q_{i+2}$  (на рисунке точки, перебираемые в направлении движения, когда  $d_i$  увеличивается, помечаются черным кружком). Перебор точек продолжается до тех пор, пока расстояние между точками не начнет увеличиваться (на рисунке такая точка помечается серым кружком). В этом случае такая точка принимается в качестве окончательной, и поиск прекращается (точка  $q_{i+3}$  на рисунке). Перебор точек продолжается в противоположном направлении начиная с точки  $q_i$ . Поиск в обоих направлениях дает две точки. Это может быть одна и та же точка, если  $q_i$  оказывается ближе к  $p_i$ , чем  $q_{i+1}$ , или точка  $q_{i-1}$  (точки  $q_i$  и  $q_{i+3}$  на рисунке). Сравнение расстояний между найденными точками и точкой  $p_i$  позволяет сделать окончательный выбор ближайшей к  $p_i$  точки (на рисунке такая точка помечается кружком увеличенного размера). Найденные точки затем используются для расчета метрики, описывающей расхождение или сходимость двух траекторий или линий тока.



а)



б)

Рис. 5. Сравнение двух траекторий на основе геометрического подхода (а) и подхода, учитывающего сдвиг скорости (б)

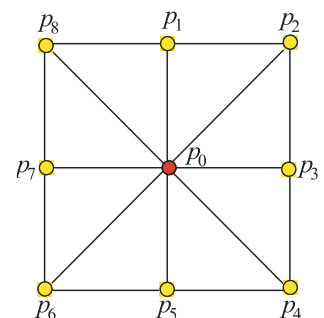


Рис. 6. Определение соседних точек в двумерном случае

Локальный подход основан на использовании только геометрической информации и не учитывает сдвига скорости между соседними точками (рис. 5). При наличии сдвига скорости или при различных скоростях движения частиц на соседних траекториях геометрический подход требует модификации, поскольку расстояние между характерными точками не описывается простой метрикой (кратчайшим расстоянием между выделенными точками).

Для описания чувствительности линий тока или траекторий меченых частиц к их начальному положению вводится функция

$$D(p_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d[s(p_0), s(p_i)]. \quad (5)$$

Для расчета функции (5) линии тока  $s_p$  находятся для каждой выбранной точки  $p_i$  расчетной области, учитывая  $n$  соседних точек. При этом  $n = 9$  в двумерном случае и  $n = 27$  в трехмерном случае (рис. 6). Функция  $d[s(p_0), s(p_i)]$  играет роль метрики и используется для выбора цветовой палитры.

На практике находят применение различные способы (метрики) для измерения расстояния между точками на соседних траекториях.

1. Наименьшее расстояние между точками

$$d_C(s_p, s_q) = \min_{p_k \in s_p, q_k \in s_q} \|p_k - q_k\|. \quad (6)$$

2. Среднее расстояние между точками

$$d_M(s_p, s_q) = \text{mean}\{d_m(s_p, s_q), d_m(s_q, s_p)\}, \quad (7)$$

где

$$d_m(s_p, s_q) = \text{mean} \min_{p_k \in s_p, q_k \in s_q} \|p_k - q_k\|.$$

3. Метрика Хаусдорфа

$$d_H(s_p, s_q) = \max\{d_h(s_p, s_q), d_h(s_q, s_p)\}, \quad (8)$$

где

$$d_h(s_p, s_q) = \max_{p_k \in s_p} \min_{q_k \in s_q} \|p_k - q_k\|.$$

4. Метрика Фреше, принимающая во внимание число и порядок точек вдоль траекторий:

$$d_F(s_p, s_q) = \min\{\|L\|, L \text{ is coupling between } P \text{ and } Q\}. \quad (9)$$

Определение является симметричным относительно двух кривых.

5. Метрика подобия

$$d_L = 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathbf{v}'(p) \cdot \mathbf{v}(p)}{|\mathbf{v}'(p)| |\mathbf{v}(p)| + 1} \right], \quad (10)$$

где  $\mathbf{v}'(p)$  — приближенный вектор в точке  $p$ ,  $\mathbf{v}(p)$  — исходный вектор выборки.

Выбор метрики зависит от интересов пользователя. Возможности и недостатки различных метрик поясняет рис. 7 (в начальный момент времени частицы инжектируются с прямой линии в точках  $p_0$  и  $q_0$ ). Метрика (6) не учитывает кривизну и сдвиг (фрагмент а). При использовании метрики (7) происходит потеря информации о направлении движения, а также игнорируется сдвиг (фрагмент б). Нахождение метрики (8) оказывается достаточно затратным с вычислительной точки зрения при одновременной потере информации о направлении движения (фрагмент в). Помимо существенных вычислительных расходов, метрика (9) не учитывает сдвиг. Метрика (10) производит сравнение векторов, а не линий тока [25].

Метрика и особенности ее реализации не указывают на особенности течения в той или иной области. Она позволяет лишь определить те области течения, в которых различие между соседними линиями тока или траекториями меченых частиц оказывается наибольшим. Такой подход позволяет пользователю выбрать интересующие области течения (например, вихревые образования) интерактивным образом, исключая их ручной поиск и ускоряя обработку данных. Появляется возможность выбрать наиболее оптимальное, с визуальной точки зрения, расположение меченых частиц в начальный момент времени (обычно задается длина отрезка, с которого инжектируются частицы, и число частиц, что приводит к расположению частиц на равном расстоянии друг от друга). Используемый подход позволяет расположить частицы в начальный момент времени таким образом, что их число (концентрация) будет наибольшим в тех областях течения, в которых наблюдается наибольшее различие между линиями тока или траекториями.

Метрика  $d(s_p, s_q)$  рассчитывается для каждой пары траекторий  $s_p$  и  $s_q$ , а полученная информация отображается в виде графика или гистограммы. По горизонтальной оси откладывается координата, характеризующая траекторию, а по вертикальной оси — параметр, характеризующий подобие двух траекторий и ограниченный сверху пороговым значением  $d_\tau$ . При  $d_i > d_\tau$  вводится новая траектория между траекториями  $s_p$  и  $s_q$ .

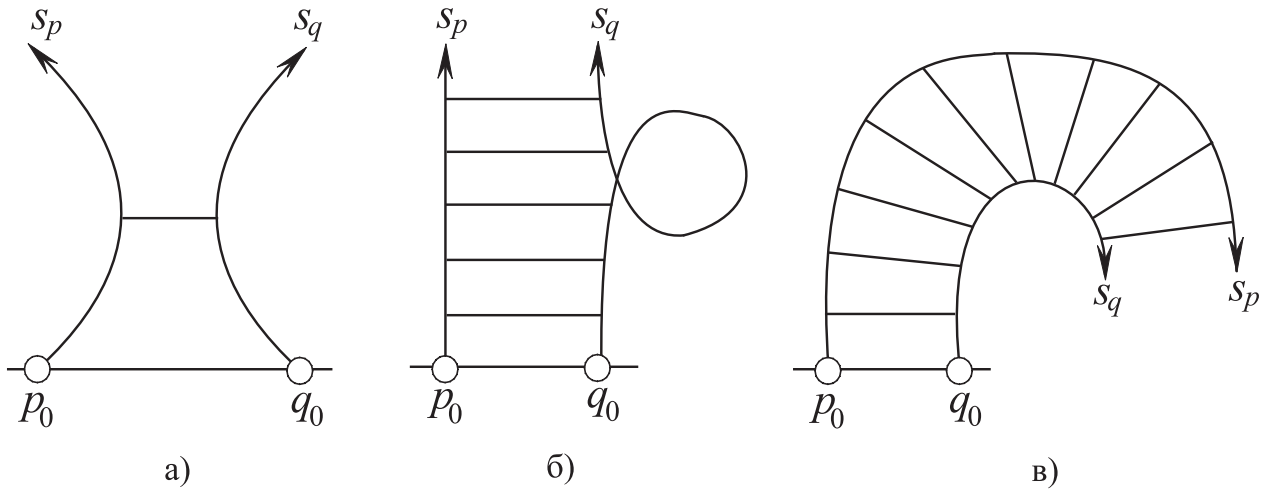


Рис. 7. Определение степени близости двух соседних траекторий на основе различных метрик

Каждая линия тока характеризуется набором параметров, таких как кривизна, угол кручения, степень искривления. В нестационарном потоке характеристики рассчитываются на каждом шаге по времени.

#### 1. Кривизна

$$c = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v}|^3},$$

где  $\mathbf{v}$  — локальная скорость,  $\mathbf{a}$  — локальное ускорение, которое определяется как  $\mathbf{a} = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$ .

#### 2. Угол кручения

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot [(\nabla \mathbf{a})\mathbf{a}]}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}.$$

#### 3. Степень искривления

$$S_T = \frac{1}{\|f(N) - f(1)\|} \sum_{i=1}^{N-1} \|f(i+1) - f(i)\|,$$

где  $f(x)$  — функция, которая задает положение каждой выборки в векторном поле. Под  $N$  понимается число точек на линии тока. Производится суммирование длин всех сегментов линии тока, после чего сумма делится на расстояние между начальной и конечной точками линии тока (рис. 8).

Кривизна, угол кручения и степень искривления рассчитываются для всех линий тока и нормализуются таким образом, что они изменяются в интервале от 0 до 1. Затем производится суммирование всех признаков в каждой точке линии тока, полагая, что вклады всех признаков являются равнозначными. Подход, основанный на одном критерии глобального уровня, приводит к тому, что некоторые линии тока становятся неразличимыми. В частности, спиралевидная линия тока становится неразличима от линии тока, имеющей нерегулярную форму. Для устранения недостатка каждая линия тока разбивается на ряд сегментов, состоящих из равного числа точек. Признаки вводятся и рассчитываются для каждого из сегментов линии тока.

**5. Особенности концентрации частиц.** В случае бесконечно малой инерционности частиц поля скорости несущей и дисперсной фаз совпадают, и при однородной начальной загрузке потока частицами концентрация дисперсной фазы во всем поле течения остается однородной. При учете малой, но конечной инерционности частиц картина поля средней плотности дисперсной фазы изменяется. При этом возникают локальные неоднородности концентрации дисперсной фазы, которые проявляются вблизи кинематических особенностей поля скорости несущей фазы (критические точки, разрывы, зоны локализованной завихренности). На огибающих траекторий частиц возникают тонкие слои с высокой концентрацией дисперсной фазы. Малоинерционные частицы накапливаются вблизи линии раздела двух потоков, при этом

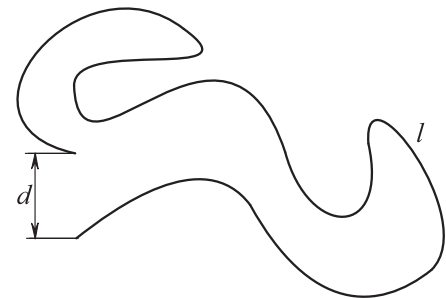


Рис. 8. Нахождение степени искривления линии тока ( $S_T = l/d$ , где  $l$  — длина линии тока,  $d$  — расстояние между начальной и конечной точками)

концентрация дисперсной фазы на контактной поверхности неограниченно (но интегрируемым образом) возрастает. При наличии интегрируемой особенности модель невзаимодействующих частиц сохраняется. В том случае, когда особенность является неинтегрируемой, модель двухфазного течения требует изменения [1].

В дисперсной среде возможно возникновение зон, свободных от частиц (фрагментация фазового объема) и областей пересекающихся траекторий частиц (образование “сборок” и “складок”), на границах которых концентрация дисперсной фазы резко возрастает. “Складкой” называется область течения, в которой в одну и ту же точку пространства приходят различные траектории частиц, так что часть пространства оказывается покрытой несколькими слоями среды. При этом в силу малости объемной концентрации частиц межчастичными столкновениями пренебрегается, поскольку реальные частицы приходят в данную точку пространства в разные моменты времени.

В связи с этим представляет интерес исследование поля концентрации инерционных частиц вблизи особенностей, являющихся типичными локальными элементами многих газодисперсных течений. Тяжелые частицы имеют тенденцию накапливаться в областях течения с высоким уровнем скоростей деформаций. Детальное исследование поля концентрации дисперсной фазы при наличии разрывов, интегрируемых особенностей, “сборок” и “складок” фазового объема требует высокой точности расчета поля скорости несущей фазы и развития специальных методов расчета поля концентрации дисперсной фазы.

Возникновение и развитие каустик в двухфазной среде имеет некоторые особенности по сравнению со средой из невзаимодействующих частиц. Каустики имеют другую физическую природу, чем пелены, возникновение которых обуславливается столкновениями частиц (пелены возникают при больших объемных концентрациях, а каустики — при малых).

**6. Дисперсия частиц.** Явление дисперсии частиц является более сложным по сравнению с турбулентной диффузией элементов газа, поскольку оно обуславливается не только турбулентной структурой потока, но также параметрами частиц (размер, плотность, форма). Пульсации скорости частицы зависят от пульсационных скоростей газового потока в точке пребывания частицы и инерционных свойств частиц.

Исследование дисперсии частиц в турбулентном потоке сводится к получению выражения для корреляционной функции скорости частицы и определению зависимости этой корреляции от параметров частиц и потока. Результаты теоретических исследований дисперсии тяжелых частиц в турбулентном потоке позволяют выделить три различных явления, обуславливающие процесс дисперсии частиц: эффект пересекающихся траекторий, эффект неразрывности и эффект инерции [26].

Эффект пересекающихся траекторий связан с действием объемных сил на частицу (например, гравитации или других внешних полей). Время существования вихрей превышает промежуток времени, в течение которого частица пересекает вихрь под действием объемных сил. Вследствие относительно высокой предельной скорости гравитационного осаждения частица постоянно выпадает из вихрей и корреляция ее скорости меньше по сравнению с корреляцией скорости элементов газа. Данный эффект приводит к тому, что дисперсия частиц оказывается меньше по сравнению с турбулентной диффузией элементов газа.

Эффект неразрывности также связан со скоростью витания частиц и проявляется в том случае, когда скорость витания существенно превышает скоростные пульсации газового потока. Дисперсия частиц в направлении, параллельном линии действия силы тяжести, оказывается выше дисперсии в направлении, перпендикулярном линии действия силы тяжести.

Эффект инерции состоит в том, что при отсутствии действия силы тяжести долговременная дисперсия инерционных частиц может превышать диффузию элементов газа. При этом величина дисперсии определяется соотношением между эйлеровым и лагранжевым интегральными временными масштабами потока. В том случае, когда эйлеров временной масштаб превышает лагранжев временной масштаб, дисперсия частиц больше, чем диффузия элементов газа. Проблема дисперсии инерционных частиц сводится к проблеме соотношения между эйлеровым и лагранжевым масштабами турбулентности.

**7. Кластеризация частиц.** Образование кластеров (компактных областей течения с повышенной концентрацией дисперсной фазы, окруженных зонами течения с низкой концентрацией) представляет собой одно из явлений, обусловленных взаимодействием частиц с турбулентными вихрями. Кластеризация частиц (preferential concentration) наблюдается в различных физических процессах, приводя к увеличению скорости осаждения частиц и частоты их коагуляции [27].

Явление кластеризации тяжелых частиц в неоднородном турбулентном потоке объясняется турбулентной миграцией (турбофорезом) частиц из областей течения с высокой интенсивностью турбулентности в зоны течения с низкой степенью турбулентности (в частности, в вязкий подслой на стенке канала). Вместе с тем, эффект кластеризации инерционных частиц возникает и в однородном турбулентном потоке, в котором отсутствуют градиенты пульсационной скорости газовой фазы, и механизм переноса

частиц под действием турбофореза не имеет места. Пространственное распределение частиц в статистически однородном турбулентном течении в любой момент времени носит локальный случайный характер и изменяется во времени. Локальное повышение концентрации тяжелых частиц наблюдается в областях течения с малой завихренностью вследствие действия центробежной силы и взаимодействия частиц с мелкомасштабными вихревыми структурами. Флуктуации концентрации и кластеризация инерционных частиц связаны со сжимаемостью поля скорости дисперсной фазы даже в несжимаемом несущем потоке (корреляция между дивергенцией скорости и зонами повышенной концентрации частиц).

Эффект кластеризации усиливается с ростом отношения временного масштаба корреляции скорости вращения к соответствующему масштабу скорости деформации. В вихревом потоке инерционные частицы перемещаются из областей течения, в которых вращение доминирует над сжатием или растяжением. На рисунках отображаются линии максимальных значений того или иного критерия идентификации вихря (в этой области концентрация частиц является наименьшей), показывающей границы течения с высокой и низкой концентрацией частиц [28].

**8. Численный метод.** Численная модель строится на основе решения нестационарных уравнений Навье–Стокса для вязкого сжимаемого газа в трехмерной постановке на структурированной и неструктурированной сетках. Уравнения записываются относительно средних (решение RANS — Reynolds-Averaged Navier–Stokes) или фильтрованных (LES — Large-Eddy Simulation) по пространству функций и формально совпадают с нестационарными уравнениями Рейнольдса. В случае решения RANS проблема замыкания решается при помощи  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности. При использовании LES крупные вихри, находящиеся под прямым воздействием граничных условий и несущие в себе максимум рейнольдсовых напряжений, рассчитываются. Мелкие вихри имеют более универсальную структуру и моделируются при помощи моделей подсеточного масштаба (Sub-Grid Scale, SGS). В качестве модели подсеточной вихревой вязкости используется модель Смагоринского. Влияние турбулентности учитывается при помощи введения случайных флуктуаций скорости в уравнение движения пробной частицы.

Для дискретизации основных уравнений применяется явная квазимоноотонная схема повышенного порядка точности, основанная на модификации метода Годунова. Конвективные потоки рассчитываются независимо по каждому координатному направлению с помощью приближенного решения задачи Римана (метод HLLC — Harten, Lax and van Leer with Contact). Повышение пространственного порядка точности схемы без потери ее монотонности достигается при помощи ограничителя minmod limiter. Для дискретизации диффузионных потоков применяются центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка точности. Интегрирование по времени проводится методом Рунге–Кутты 3-го порядка.

Для решения задачи Коши применяются методы, позволяющие выделить в решении быстро и медленно затухающие компоненты [29]. В основе разработанных разностных схем лежит линеаризация исходной системы уравнений, реализующая принцип замораживания отдельных членов или частей уравнений, а также их приближенное представление в виде упрощенных функциональных зависимостей, и последующее аналитическое интегрирование приближенного уравнения на каждом шаге по времени. Шаг интегрирования вдоль каждой траектории ограничивается временным и пространственным масштабами турбулентности. В расчетах проводится моделирование от  $10^3$  до  $10^4$  траекторий пробных частиц в зависимости от их размера.

В случае, когда влияние частиц на течение газа не учитывается, вычислительная процедура расщепляется на расчет течения газа с последующим расчетом траекторий частиц в известном газодинамическом поле. Частицы инжектируются только из тех точек расчетной области, которые представляют интерес для исследования особенностей решаемой задачи.

При учете обратного влияния примеси производится расчет поля течения чистого газа, после чего рассчитываются траектории частиц и вычисляются слагаемые, описывающие межфазный обмен импульсом и энергией. Источниковые члены рассчитываются как произведение счетной концентрации частиц на интенсивности межфазного обмена импульсом, приходящиеся на одну частицу. Суммарное воздействие частиц на среду определяется суммированием вкладов от всех частиц, находящихся в данной ячейке. Поле течения газа пересчитывается с учетом слагаемых, описывающих межфазное взаимодействие, и снова рассчитываются траектории частиц (в модифицированном поле течения). Процесс повторяется до тех пор, пока не выполняется критерий сходимости.

**9. Примеры визуализации в прикладных задачах.** Возможности методов визуализации вихревых течений с частицами демонстрируются на примере решения ряда задач двухфазной газовой динамики, связанных с движением и рассеиванием дискретных включений в турбулентных каналах и вихрях.

**9.1. Рассеивание частиц в канале со вдувом.** Проводится моделирование турбулентного течения газозвеси в канале с несимметричным вдувом (влияние частиц на газ не учитывается) и сравнение

результатов расчетов с данными, полученными без учета влияния турбулентных пульсаций на движение частицы. Подробная постановка задачи приводится в работе [30].

Совместим ось  $x$  прямоугольной декартовой системы координат с нижней стенкой канала, а оси  $y$  и  $z$  свяжем с его поперечным сечением. С верхней стенки канала осуществляется вдув со скоростью  $v_w$ . Нижняя стенка полагается непроницаемой. Ширина и длина канала выбираются равными  $h = 0.01$  м и  $l = 0.30$  м соответственно. В качестве рабочей среды принимается воздух. В начальный момент времени задается профиль продольной скорости, имеющий место в вихревом течении невязкой несжимаемой жидкости. Скорость в направлении оси  $z$  полагается равной нулю. На верхней стенке выставляются граничные условия нормального вдува со скоростью  $v_w$ , а на нижней стенке — условия прилипания и непротекания. Левая торцевая стенка канала полагается непроницаемой. На границе, через которую газ покидает расчетную область, используются неотражающие граничные условия. В направлении оси  $z$  задаются периодические граничные условия (условия повторения течения). Скорость вдува изменяется во времени по гауссовскому закону, но остается постоянной в пространстве. Частицы инжектируются в канал с верхней стенки по нормали к поверхности со скоростью, равной скорости вдува.

Расчеты проводятся на сетке, содержащей  $200 \times 100 \times 50$  углов, со сгущением узлов к левой стенке (по координате  $x$ ) и непроницаемой стенке (по координате  $y$ ) канала по закону геометрической прогрессии. Шаг сетки по координате  $z$  полагается постоянным. Шаг по времени составляет  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-6}$  с. Для достижения статистически стационарной картины течения делается 50 000 шагов по времени.

Результаты расчетов движения и рассеивания частиц окиси алюминия ( $r_p = 5 \div 50$  мкм) в канале показаны на рис. 9 для различных размеров частиц (чисел Стокса). В начальный момент времени частица находится на верхней стенке канала. Расчеты проводятся начиная с точки  $x_{p0} = 3$  с шагом  $\Delta x = 3$ . Расчет заканчивается либо при выходе частицы за пределы расчетной области (при  $x/h > 30$ ), либо при выпадении частицы на нижнюю стенку канала.

Степень вовлечения частицы в пульсационное движение определяется соотношением между временем динамической релаксации частицы и характерным временным масштабом турбулентности. Неоднородность поля турбулентности несущей фазы для частиц мелких фракций ( $r_p = 2 \div 8$  мкм) приводит к появлению турбулентной миграции частицы (силы турбофореза), направленной в сторону уменьшения пульсационной энергии газа. Для частиц крупных фракций ( $r_p \sim 30 \div 50$  мкм) пульсации скорости не оказывают существенного влияния на движение примеси на всем участке развития потока в силу инерционности таких частиц. Слабая миграция частиц, направленная в сторону уменьшения пульсационной энергии газа, наблюдается лишь для частиц, инжектируемых в канал на достаточно большом удалении от левого торца канала (при  $x_{p0} > 10$ ). Степень рассеивания (дисперсия смещения частицы) тем сильнее, чем меньше размер частицы ( $r_p \sim 5 \div 15$  мкм) и чем дальше от левой границы расчетной области она инжектируется в канал. Кинетическая энергия турбулентности и среднеквадратическая скорость несущего потока изменяются вдоль оси канала по закону, близкому к параболическому.

Траектории стоксовых частиц и распределение концентрации конденсированной фазы в канале с двухсторонним равномерным вдувом показаны на рис. 10 (скорость вдува полагается равной 2.5 м/с). В окрестности огибающей траекторий частиц имеет место локальное увеличение концентрации дисперсной фазы. Отметим существование двух качественно различных видов поперечного движения частицы в канале со вдувом. При  $Stk^{-1} > 2\pi$  (мелкие частицы) движение частиц носит непериодический характер, причем ось канала является асимптотой для траекторий частиц. При  $Stk^{-1} < 2\pi$  (крупные частицы) имеет место пересечение траектории частицы с осью канала. Значение  $Stk^{-1} = 2\pi$  является критерием перехода частицы через ось канала.

**9.2. Кластеризация частиц в канале.** Рассматривается формирование областей с повышенной концентрацией твердых частиц в полностью развитом турбулентном течении в канале с непроницаемыми стенками.

Обычно используемые методы статистического усреднения сглаживают качественные особенности типичных реализаций. Например, статистическое усреднение по всем реализациям делает поле средней концентрации пассивной примеси в случайном поле скорости все более гладким, в то время как каждая его отдельная реализация за счет перемешивания областей с существенно разной концентрацией стремится стать более изрезанной в пространстве. Статистические средние обычно характеризуют глобальные пространственно-временные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри нее. Такие детали существенно зависят от характера поля скорости — является оно дивергентным или бездивергентным. В отдельных реализациях образуются кластеры — компактные области повышенной концентрации примеси, окруженные обширными областями с низкой концентрацией частиц. При этом все статистические моменты расстояния между частицами

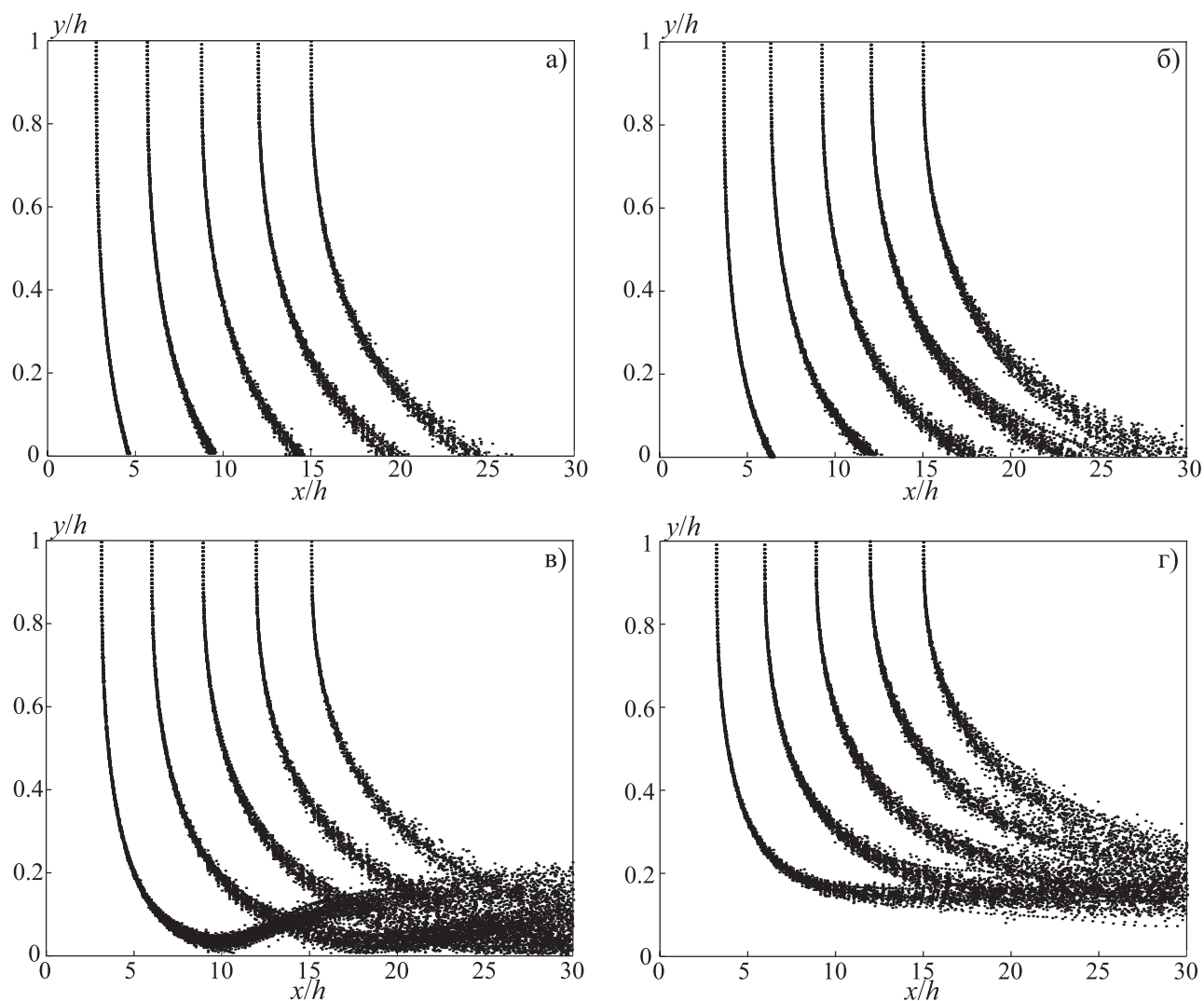


Рис. 9. Траектории частиц в канале со вдувом при  $Stk = 1.0$  (а);  $0.75$  (б);  $0.5$  (в);  $0.25$  (г)

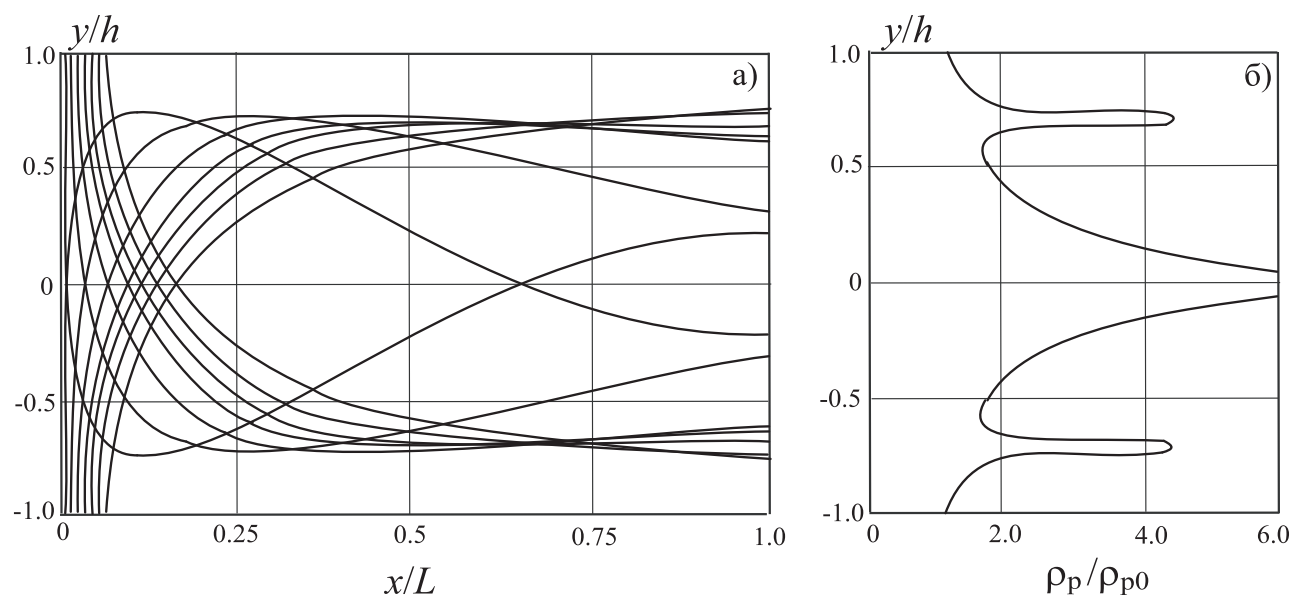


Рис. 10. Траектории частицы (а) и распределение концентрации частиц (б) в канале со вдувом при  $Stk = 1.8$

экспоненциально растут во времени (имеет место статистическое разбегание частиц в среднем).

Система координат выбирается таким образом, что ось  $x$  направлена вдоль течения, а оси  $y$  и  $z$  связаны с поперечным сечением канала. Канал имеет полуширину  $h$ . Длина канала полагается равной  $4\pi h$ , а его протяженность в поперечном направлении —  $2\pi h$ . На верхней и нижней стенках канала используются условия прилипания и непротекания. В других координатных направлениях применяются периодические граничные условия. Стенки канала считаются теплоизолированными.

Плотности воздуха присваивается значение  $\rho = 1.2 \text{ кг/м}^3$ , а вязкости воздуха — значение  $\nu = 1.6 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Подробная постановка задачи приводится в работе [31]. Течение характеризуется числом Рейнольдса  $\text{Re}_\tau = u_\tau h/\nu$ , где  $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$  — динамическая скорость,  $\tau_w$  — сдвиговые напряжения на стенке канала. Безразмерное время вводится как  $t = u_\tau y/h$ . Качество расчетной сетки характеризуется безразмерной пристеночной координатой  $y^+ = y u_\tau/\nu$ . В основном расчетном варианте  $\text{Re}_\tau = 160$ , что соответствует числу Рейнольдса  $\text{Re} = 2450$ , рассчитанному по средней скорости течения и полуширине канала ( $\text{Re} = u h/\nu$ ). При увеличении числа Рейнольдса значение координаты  $y^+$  тоже возрастает.

Частицы вводятся в канал в момент времени  $t = 0$ , а их начальное положение выбирается случайным образом. Начальная скорость частицы полагается равной мгновенной скорости течения в точке ввода частицы. Отношение плотности газа к плотности материала частицы равняется  $\rho/\rho_p = 10^{-3}$ . Инерционность частицы характеризуется числом Стокса  $\text{Stk} = \tau_p^+ = \tau_p u_\tau/\nu$ , где  $\tau_p$  — время релаксации скорости частицы.

Расчеты проводятся на сетке, содержащей  $128 \times 120 \times 120$  узлов. Узлы сетки сгущаются вблизи стенок канала таким образом, что  $y^+ = 0.05$ , а в области  $y^+ < 8$  располагается около 12 узлов сетки. Расчеты проводятся с шагом по времени  $\Delta t = 4.8 \times 10^{-4}$  до момента времени  $t_f = 10$ . Число частиц, участвующих в расчетах, составляет  $10^5$ . Интегрирование уравнений движения частицы проводится до момента времени  $t_f = 10$ .

Распределение частиц по поперечному сечению канала в фиксированный момент времени показывается рис. 11. По поперечному сечению канала частицы распределяются неравномерным образом, имея тенденцию к накоплению в пограничном слое на нижней и верхней стенках канала. Наблюдается накопление частиц в вязком подслое, что связывается со структурой пристеночной турбулентности и формированием вихрей в турбулентном пограничном слое. В таких вихрях касательные компоненты тензора мгновенных рейнольдсовых напряжений являются отрицательными ( $v' < 0$  и  $w' > 0$ ), а их уровень — достаточно высоким, что приводит к генерации турбулентности. Вихревые структуры ориентированы (вытянуты) по направлению потока. Перенос частиц по направлению к стенке канала и их накопление вблизи стенки происходит в тех областях, в которых продольная скорость потока оказывается меньше средней скорости (рис. 12).

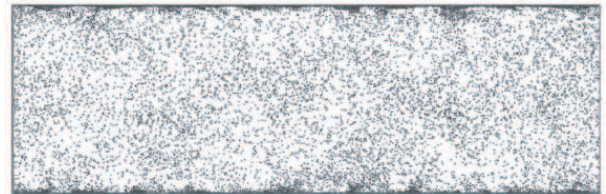


Рис. 11. Распределение частиц по поперечному сечению канала в момент времени  $t = 10$  при  $\text{Stk} = 25$

Распределение частиц в вязком подслое показывает рис. 13а в момент времени  $t = 10$  (при  $\text{Stk} = 25$ ). Хорошо заметна ориентация областей с повышенным содержанием частиц в направлении потока. Перенос частиц по направлению к стенке канала за счет формирования пары вихревых структур с противоположным вращением жидкости в них подтверждает рис. 13б, на котором показаны отрицательные и положительные поверхности уровня компоненты вихря скорости  $\omega_z$  ( $\omega_{z1} = -0.1$  и  $\omega_{z2} = +0.1$ ), а также распределение концентрации частиц.

Кластеризация частиц представляет собой чисто кинематическое явление, происходящее в отсутствие какого-либо взаимодействия между частицами. При усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скорости такая особенность динамики частиц исчезает.

**9.3. Взаимодействие частиц с вихревыми структурами.** Рассматривается взаимодействие твердых частиц с комбинированным вихрем. В свободном вихре линии тока имеют вид концентрических окружностей. Мелкие частицы следуют вдоль линий тока, приобретая также некоторую скорость в радиальном направлении, в результате чего траектория частицы имеет вид спирали.

Мгновенные распределения концентрации монодисперсных частиц при  $d_p = 1 \text{ мкм}$  показывает рис. 14 (общее число частиц составляет  $10^5$ ). Сплошная линия соответствует границе ядра вихря. В начальный момент времени распределение концентрации частиц является однородным (фрагмент а). В дальнейшем частицы выбрасываются в периферийные области вихря (фрагмент б), а затем наблюдается их накопление на границе расчетной области. В конечный момент времени ядро вихря является практически свободным

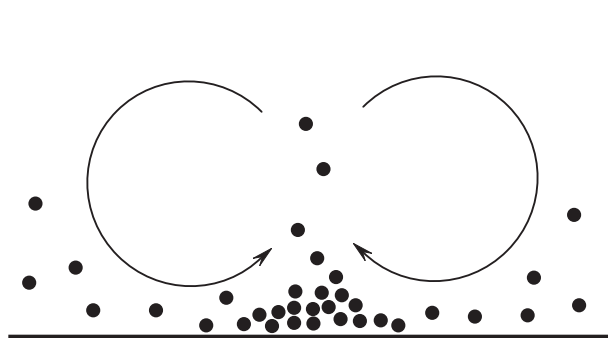


Рис. 12. Формирование вихрей и схема накопления частиц в пристеночной области

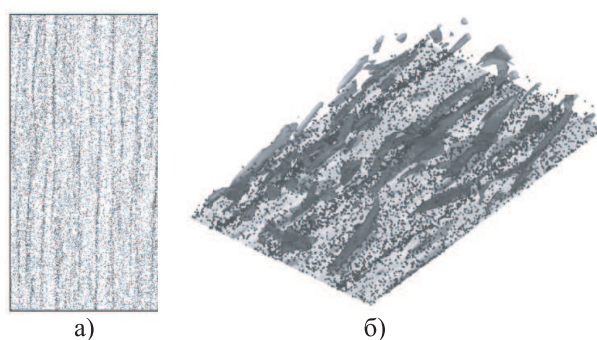


Рис. 13. Распределения частиц в пограничном слое при  $y^+ < 3$  (а) и распределение вихря скорости вблизи стенки (б)

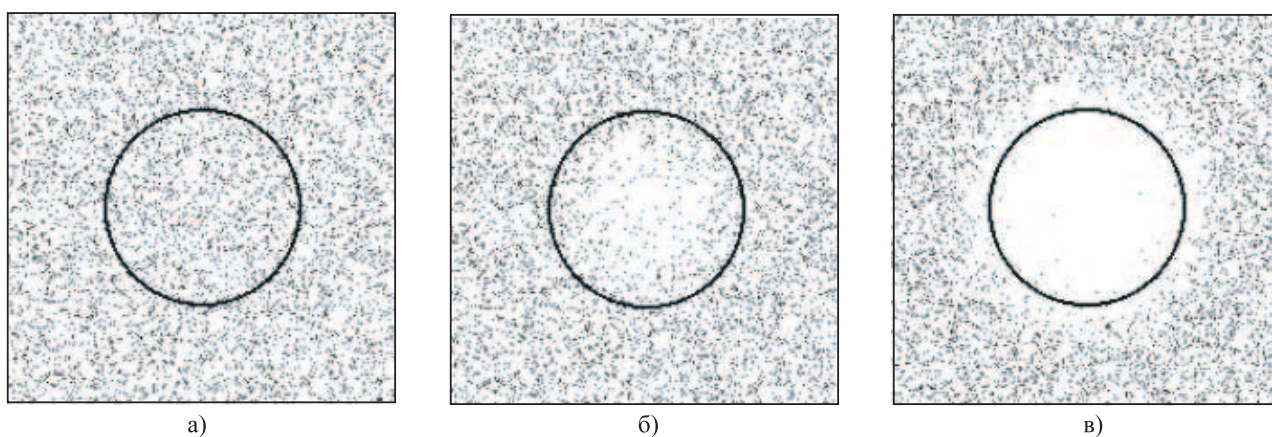


Рис. 14. Распределения концентрации монодисперсных частиц в моменты времени 0 (а), 0.3 с (б), 1 с (в)

от частиц (фрагмент в).

Мгновенные распределения концентрации полидисперсных частиц в области, занятой вихрем, показывает рис. 15. Распределение размеров частиц подчиняется логарифмически нормальному распределению со средним диаметром частиц, равным 1 мкм. Сравнение результатов расчетов, приведенных на рис. 14 и 15, показывает, что в случае полидисперсных частиц центральная область вихря оказывается занятой частицами в течение более продолжительного времени.

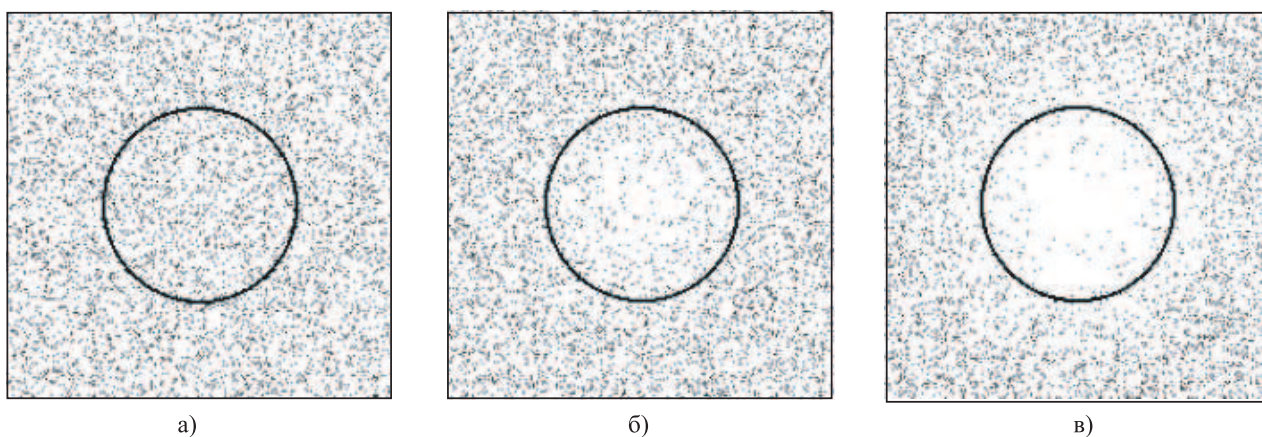


Рис. 15. Распределения концентрации полидисперсных частиц в моменты времени 0 (а), 0.3 с (б), 1 с (в)

Результаты траекторных расчетов пробных частиц позволяют найти время  $t_d$ , за которое частица покидает границы вихря: при  $R = 0.05$  м и  $U = 25$  м/с частица диаметром 1.5 мкм ( $Stk = 3.5 \times 10^{-3}$ ) покидает ядро вихря ( $r < R$ ) за время, равное 0.3 с.

Приведенные результаты позволяют выбрать размер частиц, обеспечивающий надежные измерения концентрации частиц в области, занятой вихрем. Крупные частицы покидают центр вихря за достаточно короткий промежуток времени, что затрудняет проведение экспериментальных измерений. Использование мелких частиц имеет трудности, связанные с рассеиванием света на таких частицах (сечение рассеивания пропорционально  $d_p^2$ ), что делает измерения при помощи оптических методов неэффективными. При  $\pi d_p / \lambda < 1$ , где  $\lambda$  — длина волны, рассеивание света становится рэлеевским.

**10. Заключение.** Рассмотрены методы и инструменты, предназначенные для визуализации двухфазных течений, возникающих в различных практических приложениях. Приведены примеры визуального представления решений ряда задач двухфазной газовой динамики, связанных с расчетами течений в каналах и вихрях. Сравнительный анализ различных критериев, используемых в вычислительной практике для визуализации течений с твердыми частицами и жидкими каплями, показывает, что среди широкого набора критериев распознавания режима движения дисперсных включений не существует универсального критерия. Каждый из рассмотренных критериев направлен на анализ определенной особенности движения, а выбор соответствующего критерия диктуется постановкой задачи и особенностями реализации.

The research leading to these results has been partially supported by the European Community's Research Infrastructure Action (grant agreement VISIONAIR 262044) under the 7th Framework Programme (FP7/2007–2013).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008.
2. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Капранов И.Е., Тетерина И.В. Лагранжевые когерентные вихревые структуры и их численная визуализация // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**. 293–313.
3. Van Wijk J.J. Flow visualization with surface particles // IEEE Computer Graphics and Applications. 1993. Vol. 13, N 4. 18–24.
4. Shen H.W., Li G.S., Bordoloi U.D. Interactive visualization of three-dimensional vector fields with flexible appearance control // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2004. **10**, N 4. 434–445.
5. Kuester F., Bruckschen R., Hamann B., Joy K.I. Visualization of particle traces in virtual environments // Proceedings of the ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology, 15–17 November 2001, Baniff, Alberta, Canada. New York: ACM Press, 2001. 151–157.
6. Jänicke H., Scheuermann G. Measuring complexity in Lagrangian and Eulerian flow descriptions // Computer Graphics Forum. 2010. **29**, N 6. 1783–1794.
7. Li G.S., Tricoche X., Hansen C. Physically-based dye advection for flow visualization // Computer Graphics Forum. 2008. **27**, N 3. 727–734.
8. Fuchs R., Kemmler J., Schindler B., Waser J., Sadlo F., Hauser H., Peikert R. Toward a Lagrangian vector field topology // Computer Graphics Forum. 2010. **29**, N 3. 1163–1172.
9. Yuan X., Chen B. Illustrating surfaces in volume // Proceedings of the IEEE/EG Symposium on Visualization (VisSym'04), 19–21 May 2004, Konstanz, Germany. Aire-la-Ville: Eurographics Association, 2004. 9–16.
10. Bürger K., Kondratieva P., Krüger J., Westermann R. Importance-driven particle techniques for flow visualization // Proceedings of the IEEE Pacific Visualization Symposium (PacificVis'08), 4–7 March 2008, Kyoto, Japan. New York: IEEE Press, 2008. 71–78.
11. Liang K., Monger P., Couchman H. Interactive parallel visualization of large particle datasets // Parallel Computing. 2005. **31**, N 2. 243–260.
12. Jones C., Ma K.-L. Visualizing flow trajectories using locality-based rendering and warped curve plots // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2010. **16**, N 6. 1587–1594.
13. Sadlo F., Bachthaler S., Dachsbacher C., Weiskopf D. Space-time flow visualization of dynamics in 2D Lagrangian coherent structures // Computer Vision, Imaging and Computer Graphics. Theory and Application. Berlin: Springer, 2012. 145–159.
14. Krüger J., Kipfer P., Kondratieva P., Westermann P. A particle system for interactive visualization of 3D flows // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2005. **11**, N 6. 744–756.
15. Schirski M., Kuhlen T., Hopp M., Adomeit P., Pischinger S., Bischof C. Efficient visualization of large amounts of particle trajectories in virtual environments using virtual tubelets // Proceedings of the ACM SIGGRAPH International Conference on Virtual Reality Continuum and its Applications in Industry (VRCAI'04), 16–18 June 2004, Singapore. New York: ACM Press, 2004. 141–147.
16. Merhof D., Sonntag M., Enders F., Nimsky C., Greiner G. Hybrid visualization for white matter tracts using triangle strips and point sprites // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2006. **12**, N 5. 1181–1188.
17. Bachalo W.D. Experimental methods in multiphase flows // International Journal of Multiphase Flow. 1994. **20**. Supplement 1. 261–295.
18. Widhalm M., Ronzheimer A., Meyer J. Lagrangian particle tracking on large unstructured three-dimensional meshes // AIAA Paper. 2008. N 2008-472.

19. *Lu G., Ly V., Wang X., Rohith M.V., Ayala O., Wang L.-P., Kambhamettu C.* A tool for visualizing large-scale interactions between turbulence and particles in 3D space through 2D trajectory visualization // *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 8034. Heidelberg: Springer, 2013. 48–57.
20. *Toschi F., Bodenschatz E.* Lagrangian properties of particles in turbulence // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2009. **41**. 375–404.
21. *Bec J., Biferale L., Cencini M., Lanotte A., Musacchio S., Toschi F.* Heavy particle concentration in turbulence at dissipative and inertial scales // *Physical Review Letters*. 2007. **98**, N 8. doi 10.1103/PhysRevLett.98.084502.
22. *Coleman S.W., Vassilicos J.C.* A unified sweep-stick mechanism to explain particle clustering in two- and three-dimensional homogeneous, isotropic turbulence // *Physics of Fluids*. 2009. **21**, N 11. doi 10.1063/1.3257638.
23. *Günther T., Theisel H.* Vortex cores of inertial particles // *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2014. **20**, N 12. 2535–2544.
24. *Chen Y., Cohen J.D., Krolík J.* Similarity-guided streamline placement with error evaluation // *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2007. **13**, N 6. 1448–1455.
25. *Li L., Hsieh H.-H., Shen H.-W.* Illustrative streamline placement and visualization // *Proceedings of the IEEE Pacific Visualization Symposium*, 5–7 March 2008, Kyoto, Japan. New York: IEEE Press, 2008. 79–86.
26. *Карпушинский А.И., Руди Ю.А., Тислер С.В., Хусаинов М.Т., Щеглов И.Н.* Применение цифровой трассерной визуализации для исследования дисперсии частиц в турбулентном газовом потоке // *Теплофизика высоких температур*. 2012. **50**, № 3. 408–417.
27. *Зайчик Л.И., Алимпченков В.М.* Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит, 2007.
28. *Homann H., Bec J.* Concentrations of inertial particles in the turbulent wake of an immobile sphere // *Physics of Fluids*. 2015. **27**, N 5. doi 10.1063/1.4919723.
29. *Волков К.Н.* Разностные схемы интегрирования уравнений движения пробной частицы в потоке жидкости или газа // *Вычислительные методы и программирование*. 2004. **5**. 1–17.
30. *Emelyanov V.N., Teterina I.V., Volkov K.N., Garkushev A.U.* Pressure oscillations and instability of working processes in the combustion chambers of solid rocket motors // *Acta Astronautica*. 2017. **135**. 161–171.
31. *Волков К.Н.* Моделирование крупных вихрей полностью развитого турбулентного течения в канале и сравнение моделей подсеточной вихревой вязкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 2006. **47**, № 3. 31–42.

Поступила в редакцию  
16.10.2018

## Visualization of Numerical Results Obtained for Gas–Particle Flows Using Lagrangian Approaches to the Dispersed Phase Description

K. N. Volkov<sup>1</sup>, V. N. Emelyanov<sup>2</sup>, and I. V. Teterina<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering;  
ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist,  
e-mail: dsci@mail.ru*

<sup>2</sup> *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering;  
ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Professor,  
e-mail: vlademelyanov@gmail.com*

<sup>3</sup> *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering;  
ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Ph.D., Associate Professor,  
e-mail: yaiv@mail.ru*

Received October 16, 2018

**Abstract:** Some issues related to the implementation and physical and mathematical support of computational experiments on the investigation of fluid and gas flows containing Lagrangian coherent vortex structures are considered. Methods and tools designed to visualize vortical flows arising in various practical applications are discussed. Examples of visual representation of solutions of gas dynamics problems computed with Lagrangian approaches to the description of flows of fluid and gas are provided. In addition to traditional approaches to the visualization of vortex flows based on the construction of contours of various flow quantities, the phase trajectories of Lagrangian particles, the Poincaré section, and the local Lyapunov exponent method are applied. The Lagrangian approach to the description of two-phase flows is relatively simple, but time-consuming from the computational point of view, because it requires a large number of trajectory calculations of sample particles.

Additional computational difficulties come from the need of localization of particles in the control volumes of unstructured mesh and interpolation of flow quantities of gas phase.

**Keywords:** computational fluid dynamics, scientific visualization, gas-particle flow, channel, vortex, dispersion, clusterization.

### References

1. K. N. Volkov and V. N. Emel'yanov, *Flows of Gas with Particles* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
2. K. N. Volkov, V. N. Emel'yanov, I. E. Kapranov, and I. V. Teterina, "Lagrangian Coherent Vortex Structures and Their Numerical Visualization," *Vychisl. Metody Programm.* **19**, 293–313 (2018).
3. J. J. van Wijk, "Flow Visualization with Surface Particles," *IEEE Comput. Graph. Appl.* **13** (4), 18–24 (1993).
4. H. W. Shen, G. S. Li, and U. D. Bordoloi, "Interactive Visualization of Three-Dimensional Vector Fields with Flexible Appearance Control," *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* **10** (4), 434–445 (2004).
5. F. Kuester, R. Bruckschen, B. Hamann, and K. I. Joy, "Visualization of Particle Traces in Virtual Environments," in *Proc. ACM Symp. on Virtual Reality Software and Technology, Baniff, Canada, November 15–17, 2001* (ACM Press, New York, 2001), pp. 151–157.
6. H. Jänicke and G. Scheuermann, "Measuring Complexity in Lagrangian and Eulerian Flow Descriptions," *Comput. Graph. Forum* **29** (6), 1783–1794 (2010).
7. G. S. Li, X. Tricoche, and C. Hansen, "Physically-based Dye Advection for Flow Visualization," *Comput. Graph. Forum* **27** (3), 727–734 (2008).
8. R. Fuchs, J. Kemmler, B. Schindler, et al., "Toward a Lagrangian Vector Field Topology," *Comput. Graph. Forum* **29** (3), 1163–1172 (2010).
9. X. Yuan and B. Chen, "Illustrating Surfaces in Volume," in *Proc. 6th Joint IEEE/EG Symp. on Visualization, Konstanz, Germany, May 19–21, 2004* (Eurographics Association, Aire-la-Ville, 2004), pp. 9–16.
10. K. Bürger, P. Kondratieva, J. Krüger, and R. Westermann, "Importance-Driven Particle Techniques for Flow Visualization," in *Proc. IEEE Pacific Visualization Symposium, Kyoto, Japan, March 4–7, 2008* (IEEE Press, New York, 2008), pp. 71–78.
11. K. Liang, P. Monger, and H. Couchman, "Interactive Parallel Visualization of Large Particle Datasets," *Parallel Comput.* **31** (2), 243–260 (2005).
12. C. Jones and K.-L. Ma, "Visualizing Flow Trajectories Using Locality-based Rendering and Warped Curve Plots," *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* **16** (6), 1587–1594 (2010).
13. F. Sadlo, S. Bachthaler, C. Dachsbacher, and D. Weiskopf, "Space-Time Flow Visualization of Dynamics in 2D Lagrangian Coherent Structures," in *Computer Vision, Imaging and Computer Graphics. Theory and Application* (Springer, Berlin, 2013), pp. 145–159.
14. J. Krüger, P. Kipfer, P. Kondratieva, and P. Westermann, "A Particle System for Interactive Visualization of 3D Flows," *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* **11** (6), 744–756 (2005).
15. M. Schirski, T. Kuhlen, M. Hopp, et al., "Efficient Visualization of Large Amounts of Particle Trajectories in Virtual Environments Using Virtual Tubelets," in *Proc. ACM SIGGRAPH Int. Conf. on Virtual Reality Continuum and Its Applications in Industry, Singapore, June 16–18, 2004* (ACM Press, New York, 2004), pp. 141–147.
16. D. Merhof, M. Sonntag, F. Enders, et al., "Hybrid Visualization for White Matter Tracts Using Triangle Strips and Point Sprites," *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* **12** (5), 1181–1188 (2006).
17. W. D. Bachalo, "Experimental Methods in Multiphase Flows," *Int. J. Multiphase Flow* **20** (Suppl. 1), 261–295 (1994).
18. M. Widhalm, A. Ronzheimer, and J. Meyer, "Lagrangian Particle Tracking on Large Unstructured Three-Dimensional Meshes," *AIAA Paper* 2008-472 (2008). doi 10.2514/6.2008-472
19. G. Lu, V. Ly, X. Wang, et al., "A Tool for Visualizing Large-Scale Interactions between Turbulence and Particles in 3D Space through 2D Trajectory Visualization," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2013), Vol. 8034, pp. 48–57.
20. F. Toschi and E. Bodenschatz, "Lagrangian Properties of Particles in Turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**, 375–404 (2009).
21. J. Bec, L. Biferale, M. Cencini, et al., "Heavy Particle Concentration in Turbulence at Dissipative and Inertial Scales," *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007). doi 10.1103/PhysRevLett.98.084502
22. S. W. Coleman and J. C. Vassilicos, "A Unified Sweep-Stick Mechanism to Explain Particle Clustering in Two- and Three-Dimensional Homogeneous, Isotropic Turbulence," *Phys. Fluids* **21** (2009) doi 10.1063/1.3257638

23. T. Günther and H. Theisel, “Vortex Cores of Inertial Particles,” *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* **20** (12), 2535–2544 (2014).
24. Y. Chen, J. D. Cohen, and J. Krolik, “Similarity-Guided Streamline Placement with Error Evaluation,” *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* **13** (6), 1448–1455 (2007).
25. L. Li, H.-H. Hsieh, and H.-W. Shen, “Illustrative Streamline Placement and Visualization,” in *Proc. IEEE Pacific Visualization Symposium, Kyoto, Japan, March 5–7, 2008* (IEEE Press, New York, 2008), pp. 79–86.
26. A. I. Kartushinsky, Yu. A. Rudi, S. V. Tisler, et al., “Application of Particle Tracking Velocimetry for Studying the Dispersion of Particles in a Turbulent Gas Flow,” *Teplofiz. Vys. Temp.* **50** (3), 408–417 (2012) [*High Temp.* **50** (3), 381–390 (2012)].
27. L. I. Zaichik and V. M. Alipchenkov, *Statistical Models of Particle Motion in Turbulent Fluid* (Fizmatlit, Moscow, 2007) [in Russian].
28. H. Homann and J. Bec, “Concentrations of Inertial Particles in the Turbulent Wake of an Immobile Sphere,” *Phys. Fluids* **27** (2015). doi 10.1063/1.4919723
29. K. N. Volkov, “Finite Difference Schemes for Integrating the Equations for Sample Particle Motion in a Fluid or Gas Flow,” *Vychisl. Metody Programm.* **5**, 1–17 (2004).
30. V. N. Emelyanov, I. V. Teterina, K. N. Volkov, and A. U. Garkushev, “Pressure Oscillations and Instability of Working Processes in the Combustion Chambers of Solid Rocket Motors,” *Acta Astronaut.* **135**, 161–171 (2017).
31. K. N. Volkov, “Large Eddy Simulation in a Fully Developed Turbulent Flow in a Channel and Comparison of Subgrid Eddy Viscosity Models,” *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **47** (3), 31–42 (2006) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **47** (3), 330–339 (2006)].